



## Concours en Mathématiques Physique

### Épreuve de Mathématiques I

Durée : 4 heures    Date : 10 Juin 2005    Heure : 8 H    Nb pages : 5

Barème :    Exercice : 6 pts    Partie I : 7 pts    Partie II : 7 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.  
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

### Exercice

Soient  $a$  un réel strictement positif et  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\cosh a - \cos x}.$$

A

1. Montrer que

$$\varphi(x) = \frac{-2e^{ix}}{(e^{ix} - e^a)(e^{ix} - e^{-a})}.$$

2. Montrer qu'il existe une suite réelle  $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ , que l'on déterminera, vérifiant pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cos(nx).$$

3. En déduire l'expression des intégrales

$$I_n = \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$



et

$$I = \int_0^{2\pi} \varphi^2(x) dx.$$

[B] On suppose que  $\varphi$  admet un développement en série entière au voisinage de 0.

1. Établir que ce développement s'écrit :

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^{2p}.$$

2. Calculer  $b_0$  et  $b_1$ .

3. En remarquant la relation

$$\varphi(x)(\operatorname{cha} - \cos x) = 1,$$

exprimer  $b_n (n \geq 1)$  en fonction de  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ .

4. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$|b_n| \leq \frac{a^{-2n}}{\operatorname{cha} - 1}.$$

5. En déduire un minorant du rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_{p \geq 0} b_p x^{2p}$ .

6. On pose  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ,  $z \in \mathcal{C}$ .

(a) Résoudre dans  $\mathcal{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :  $\cos z = \operatorname{cha}$ .

(b) Soit la série entière  $\sum_{p \geq 0} b_p z^{2p}$  de rayon de convergence  $R$ . On note

$$S(z) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p z^{2p}.$$

i. Démontrer que pour tout  $z \in \mathcal{C}$  tel que  $|z| < R$  on a :

$$S(z)(\operatorname{cha} - \cos z) = 1.$$

ii. En déduire la valeur du rayon de convergence  $R$ .

## Problème

### Partie I

Soient  $x_0$  un réel fixé et  $f$  une application continue de  $[0, +\infty[$  à valeurs dans  $\mathcal{C}$  tels que l'application  $t \mapsto f(t)e^{-tx_0}$  soit intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

1. (a) Montrer que pour tout  $x \geq x_0$ , l'application  $t \mapsto f(t)e^{-tx}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On pose pour  $x \geq x_0$  :

$$L(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx} dt.$$

- (b) Montrer que  $L$  est continue sur  $[x_0, +\infty[$ .  
 (c) Montrer que  $L$  est de classe  $C^1$  sur  $]x_0, +\infty[$ .

2. On suppose dans cette question que pour tout  $x \geq x_0$ ,  $L(x) = 0$ . On introduit la fonction

$$F : [0, +\infty[ \rightarrow \mathcal{C}$$

$$t \mapsto F(t) = \int_0^t f(s)e^{-x_0 s} ds.$$

- (a) Montrer que pour tout  $x > x_0$ , l'application  $t \mapsto F(t)e^{-(x-x_0)t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et que

$$\int_0^{+\infty} F(t)e^{-(x-x_0)t} dt = 0.$$

- (b) Montrer que pour tout  $x > x_0$ ,

$$\int_0^1 F(-\ln(t))t^{x-x_0-1} dt = 0.$$

- (c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^1 F(-\ln(t))t^n dt = 0.$$

- (d) Montrer que l'application  $t \mapsto F(-\ln(t))$  est prolongeable en une fonction continue sur  $[0, 1]$ . On notera  $G$  ce prolongement.  
 (e) Montrer que l'application  $G$  est nulle sur  $[0, 1]$  (on pourra utiliser le théorème de Weierstrass).  
 (f) En déduire que  $f$  est nulle sur  $[0, +\infty[$ .

3. (a) Soient  $\beta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\beta, \beta[$ . Montrer que l'application

$$u \mapsto f(u)e^{-u(x_0 + re^{i\theta})}$$

est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

On pose pour  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\beta, \beta[$ ,

$$h(r, \theta) = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-u(x_0 + re^{i\theta})} du.$$

- (b) Soit  $\theta$  fixé dans  $] -\beta, \beta[$ . Montrer que l'application  $r \mapsto h(r, \theta)$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .  
 (c) Soit  $r$  fixé dans  $]0, +\infty[$ . Montrer que l'application  $\theta \mapsto h(r, \theta)$  est de classe  $C^1$  sur  $] -\beta, \beta[$ .

(d) Vérifier que,  $\forall (r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\beta, \beta[$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) - ir \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = 0.$$

## Partie II

Dans la suite du problème on appelle série de **Dirichlet** toute série de la forme  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$  où  $z$  appartient à  $\mathcal{C}$ ,  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite à valeurs complexes et  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  est une suite de nombres réels positifs, strictement croissante et non majorée.

Pour toute série de Dirichlet  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ , on désigne par

$$D_c = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge} \}.$$

$$D_a = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge absolument} \}.$$

On définit l'abscisse de convergence  $\sigma_c$  et l'abscisse de convergence absolue  $\sigma_a$  par :

$$\sigma_c = \inf D_c \quad \text{et} \quad \sigma_a = \inf D_a.$$

On convient que :

si  $D_c = \emptyset$ , alors  $\sigma_c = +\infty$  et si  $D_a = \emptyset$ , alors  $\sigma_a = +\infty$ .

A

1. Soit  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$  une série de Dirichlet d'abscisse de convergence  $\sigma_c$  et d'abscisse de convergence absolue  $\sigma_a$ .
  - (a) Montrer que  $\sigma_c \leq \sigma_a$ .
  - (b) Montrer que si  $a_n$  est réel positif pour tout  $n \geq 1$ , alors  $\sigma_c = \sigma_a$ .
2. (a) Soit la série de Dirichlet  $\sum_{n \geq 1} e^{-\ln(n)z}$ . Déterminer son abscisse de convergence  $\sigma_c$  et son abscisse de convergence absolue  $\sigma_a$ .
  - (b) Soit la série de Dirichlet  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n e^{-\ln(n)z}$ . Déterminer son abscisse de convergence  $\sigma_c$  et son abscisse de convergence absolue  $\sigma_a$ .
3. Soit la série de Dirichlet  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\ln(n)z}$  où  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite de nombres complexes.
  - (a) Montrer que si pour un réel  $x$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^x}$  converge, alors pour tout  $\epsilon > 0$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^{x+1+\epsilon}}$  converge absolument.

(b) Montrer alors que :

$$\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1.$$

4. Soit une série de Dirichlet  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ . On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\lambda_n} = b \in \mathbb{R}^+$ .

(a) Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \lambda_n \geq \frac{1}{b+\epsilon} \ln(n).$$

(b) Soit  $x$  un réel tel que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x}$  converge. soient  $\epsilon > 0$  et  $\alpha > 0$ .

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x'}$  converge absolument où  $x' = x + (1+\alpha)(b+\epsilon)$ .

(c) Montrer que

$$\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + b.$$

[B] Soit  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$  une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue  $\sigma_a$  finie.

1. Montrer que pour tout  $x > \sigma_a$ , la série  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n x}$  converge absolument.

On pose pour  $x \in ]\sigma_a, +\infty[$ ,  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$ .

2. Montrer que  $g$  est continue sur  $]\sigma_a, +\infty[$ .

3. Soit  $z \in \mathcal{C}$  tel que  $\Re(z) > \sigma_a$ , où  $\Re(z)$  désigne la partie réelle de  $z$ .

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$  converge absolument.

4. Soient  $x_0 > \sigma_a$  et  $\beta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

On pose pour  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\beta, \beta[$ ,

$$f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (x_0 + r e^{i\theta})}.$$

(a) Soit  $\theta$  fixé dans  $]-\beta, \beta[$ . Montrer que l'application  $r \mapsto f(r, \theta)$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

(b) Soit  $r$  fixé dans  $]0, +\infty[$ . Montrer que l'application  $\theta \mapsto f(r, \theta)$  est de classe  $C^1$  sur  $]-\beta, \beta[$ .

(c) Vérifier que,  $\forall (r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\beta, \beta[$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) - ir \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = 0.$$