



Concours Mathématiques et Physique  
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 06 Juin 2013      Heure : 8 H      Durée : 4 H      Nbre pages : 08  
Barème :      1<sup>ère</sup> Partie : 08 pts      2<sup>ème</sup> Partie : 12 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier d'indiquer avec précision les références des questions.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

**LIGNE BIFILAIRE**

Le problème est composé de deux parties indépendantes. La première partie s'intéresse à l'étude d'une ligne bifilaire en régime stationnaire, ce qui permettra de déterminer certaines de ses caractéristiques. La deuxième partie s'intéresse à l'étude de la ligne bifilaire en régime variable, ce qui permettra d'expliquer son utilisation en téléphonie classique comme ligne de transmission et en radiodiffusion comme antenne demi-onde.

**Données :** Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$

Perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ SI}$

Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

**Formulaires :** Définition du gradient :  $df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{\text{OM}}$

En coordonnées cylindriques on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}}(f(r) \vec{u}_z) = -\frac{\partial f(r)}{\partial r} \vec{u}_\theta$$

Double produit vectoriel :  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$

$$\sin(p) \cdot \cos(q) = \frac{\sin(p+q) + \sin(p-q)}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = 1,22$$

**Notation :** On note  $j$  le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ .



Soit une ligne bifilaire constituée de deux conducteurs parfaits cylindriques pleins ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) (Figure 1), de même rayon  $a$ , de même longueur  $\ell$  et dont les axes parallèles à l'axe ( $O_1z$ ), sont distants de  $d$  avec  $a \ll d \ll \ell$ .

Soient  $O_1$  et  $O_2$  les intersections des axes des deux cylindres avec le plan ( $xO_1y$ ).

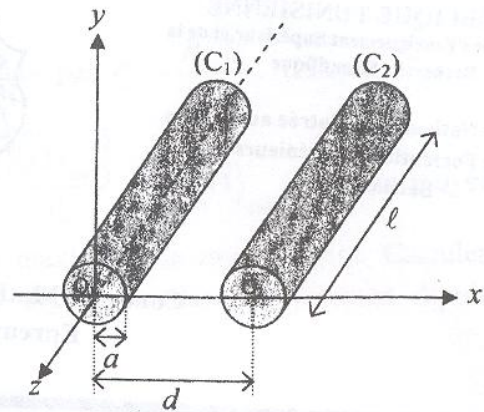


Figure-1-

### 1<sup>ère</sup> Partie : Etude d'une ligne bifilaire en régime stationnaire

La ligne bifilaire est plongée dans un milieu isolant assimilé au vide dépourvu de charges et de courants de permittivité électrique  $\epsilon_0$  et de perméabilité magnétique  $\mu_0$ .

On notera  $(O_1, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  le repère cartésien et  $(O_1, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  le repère cylindrique.

Les parties I et II sont indépendantes.

#### I- Ligne bifilaire ouverte : étude électrostatique

La ligne bifilaire est alimentée par un générateur de tension constante (Figure 2). Le cylindre ( $C_1$ ), étant connecté à la borne positive de ce générateur, porte une charge positive et le cylindre ( $C_2$ ) porte une charge négative.

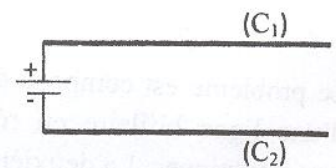


Figure-2-

1- Rappeler, dans le cadre de l'électrostatique, les équations de Maxwell ainsi que leurs formes intégrales dans le vide caractérisé par une charge de densité  $\rho(M)$ . Donner l'expression du champ électrique  $\vec{E}(M)$  en fonction du potentiel électrique  $V(M)$ .

2- Donner le champ électrique dans un conducteur en équilibre électrostatique. Que peut-on dire de son potentiel ? Décrire, en le justifiant, la répartition des charges de ce conducteur.

3-a) Justifier que les densités surfaciques de charges  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , portées respectivement par les faces latérales des cylindres ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ), sont uniformes.

On négligera la charge portée par les faces circulaires aux extrémités des cylindres.

3-b)- Sachant que les cylindres ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) sont en influence totale, trouver la relation entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

3-c) Compte tenu du fait que  $a \ll d \ll \ell$ , les deux cylindres peuvent être assimilés à deux fils infinis portant respectivement les densités linéiques de charges  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Exprimer  $\lambda_1$  en fonction de  $\sigma_1$  et  $a$ . En déduire que  $\lambda_2 = -\lambda_1 = -\lambda_c$ .

4- On s'intéresse au cylindre ( $C_1$ ) seul et soit  $M$  un point appartenant au plan ( $xO_1y$ ).

4-a) Justifier que le champ électrique  $\vec{E}_1(M)$ , créé par ( $C_1$ ), s'écrit  $\vec{E}_1(M) = E_1(r_1) \vec{u}_r$  avec  $O_1M = r_1 > a$ .



4-b) Montrer que  $E_1(r_1) = \frac{\lambda_c}{2 \pi \epsilon_0 r_1}$ .

4-c) En déduire, à une constante près, le potentiel électrique  $V_1(M)$ , crée par  $(C_1)$ .

5- On s'intéresse aux deux cylindres  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

5-a) En déduire que le potentiel  $V(M)$  crée par les deux cylindres s'écrit :

$$V(M) = V(r_1, r_2) = \frac{\lambda_c}{2 \pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + K \text{ avec } K \text{ une}$$

constante et  $r_2 = O_2M > a$  (Figure 3).

5-b) On note  $V_{C1}$  et  $V_{C2}$  les valeurs respectives de  $V(M)$  au niveau des deux cylindres  $(C_1)$  et  $(C_2)$ . En étudiant les potentiels aux points  $H_1$  et  $H_2$ , appartenant respectivement aux surfaces latérales des cylindres  $(C_1)$  et  $(C_2)$  (voir figure 3), déterminer la différence de potentiel  $V_{C1} - V_{C2}$ .

5-c) En déduire que la capacité linéique de la ligne bifilaire est :  $C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{a} - 1\right)}$ .

Calculer numériquement pour une ligne téléphonique sa capacité linéique pour  $a = 0,3 \text{ mm}$  et  $d = 1,5 \text{ mm}$ .

6-a) Soit  $M$  un point appartenant à l'axe  $(O_1x)$  et situé entre les points  $O_1$  et  $O_2$ . Déterminer le potentiel  $V(M)$  en ce point en fonction de l'abscisse  $x$  et les données.

6-b) On considère l'espace entre les deux cylindres conducteurs situé dans le plan  $(xO_1z)$ . Montrer que le champ électrique s'écrit :  $\vec{E}(M) = \frac{\lambda_c}{2 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \vec{u}_x$ .

6-c) Pour les lignes haute tension on a  $V_{C1} - V_{C2} = 90 \text{ kV}$  ;  $a = 1,2 \text{ cm}$  et  $d = 25 \text{ cm}$ . Calculer la valeur du champ électrique au voisinage des cylindres conducteurs. Commenter le résultat obtenu sachant que les poils du corps humain se redressent à partir de  $1 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ .

## II- Ligne bifilaire court-circuitée : étude magnétostatique

La ligne bifilaire est maintenant alimentée par un générateur de courant d'intensité constante  $I$ . Elle est fermée par un court-circuit à son extrémité finale (Figure 4). Les deux cylindres conducteurs sont donc parcourus par des courants de même intensité  $I$  mais circulant en sens opposés.

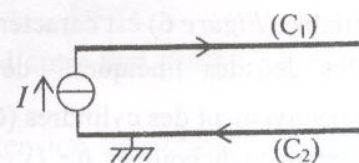


Figure-4-

7- Rappeler, dans le cadre de la magnétostatique, les équations de Maxwell ainsi que leurs formes intégrales dans le vide caractérisé par un courant de densité  $\vec{j}(M)$ . Donner l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en fonction du potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$ .

8- On s'intéresse au cylindre  $(C_1)$  seul et soit  $M$  un point appartenant au plan  $(xO_1y)$ .

8-a) Justifier que le champ magnétique et le potentiel vecteur créés par le cylindre  $(C_1)$ , s'écrivent :

$$\vec{B}_1(M) = B_1(r_1) \vec{u}_\theta \text{ et } \vec{A}_1(M) = A_1(r_1) \vec{u}_z \text{ avec } O_1M = r_1 > a.$$

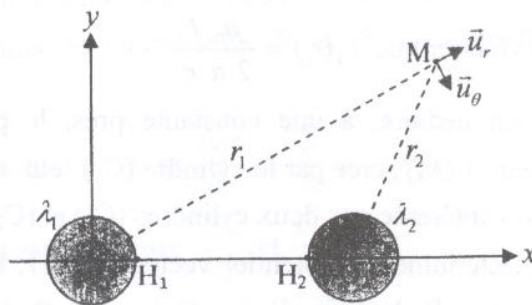


Figure-3-

8-b) Montrer que  $B_1(r_1) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r_1}$ .

8-c) En déduire, à une constante près, le potentiel vecteur  $\vec{A}_1(M)$ , créé par le cylindre  $(C_1)$  seul.

9- On s'intéresse aux deux cylindres  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

9-a) Déterminer le potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$ , créé par les deux cylindres, sur l'axe  $(Oy)$ , avec  $O$  milieu de  $O_1$  et  $O_2$  (Figure 5).

9-b) En déduire que

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(r_1, r_2) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \vec{u}_z \text{ avec } r_2 = O_2M \text{ et } r_1 = O_1M \text{ (Figure 5).}$$

10-a) Soit  $M$  un point appartenant à l'axe  $(O_1x)$  et situé entre les points  $O_1$  et  $O_2$ . Déterminer le potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$  en ce point en fonction de l'abscisse  $x$  et les données.

10-b) On considère l'espace entre les deux cylindres conducteurs situé dans le plan  $(xO_1z)$ . En déduire que le champ magnétique s'écrit :  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \vec{u}_y$ .

10-c) Déterminer le flux de ce champ magnétique à travers la surface rectangulaire de largeur  $H_1H_2$  située entre les deux cylindres conducteurs dans le plan  $(xO_1z)$  (Figure 5).

10-d) En déduire que l'inductance linéique de la ligne bifilaire est  $L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d}{a} - 1\right)$ .

Calculer numériquement pour une ligne téléphonique son inductance linéique pour  $a = 0,3 \text{ mm}$  et  $d = 1,5 \text{ mm}$ .

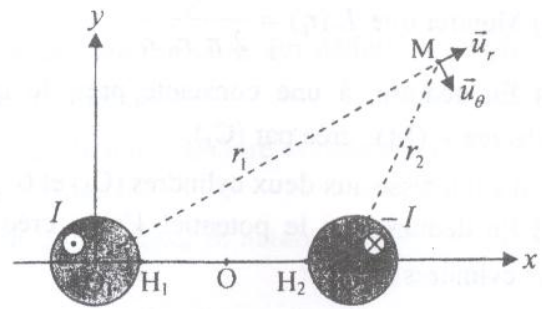


Figure-5-

## 2<sup>ème</sup> Partie : Etude d'une ligne bifilaire en régime variable

### I- Mise en équations et solutions générales

La ligne bifilaire alimentée par un générateur  $G$  de tension variable (Figure 6) est caractérisée, pour  $t$  et  $z$  donnés, par :

. les densités linéiques de charge  $\lambda_c(z, t)$  et  $-\lambda_c(z, t)$  respectivement des cylindres  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

. l'intensité du courant  $i(z, t)$  circulant dans les deux cylindres  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

. la différence de potentiel électrique  $u(z, t)$  entre les cylindres  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

L'espace entre les deux cylindres conducteurs situé dans le plan  $(xO_1z)$  est assimilé au vide dépourvu de charge et de courant de permittivité électrique  $\epsilon_0$  et de perméabilité magnétique  $\mu_0$ .

On admet que dans cet espace le champ électromagnétique s'écrit, pour  $x$  donné,

$\vec{E} = E(z, t) \vec{u}_x = \frac{\lambda_c(z, t)}{2 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \vec{u}_x$  et  $\vec{B} = B(z, t) \vec{u}_y = \frac{\mu_0 i(z, t)}{2 \pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \vec{u}_y$  et que le potentiel vecteur est de la forme  $\vec{A} = A(z, t) \vec{u}_z$ .

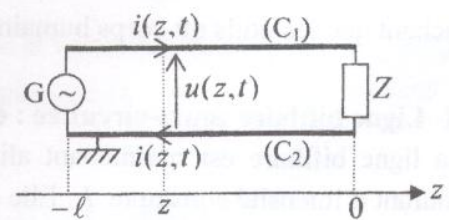


Figure-6-



1- Ecrire les équations de Maxwell dans l'espace compris entre les cylindres et situé dans le plan  $(xOz)$ . Donner les relations liant les champs électrique et magnétique  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  aux potentiels scalaire  $V$  et vecteur  $\vec{A}$ .

2- A partir de l'une des équations de Maxwell établir la relation entre  $\frac{\partial \lambda_c}{\partial t}$  et  $\frac{\partial i}{\partial z}$ .

3- A partir de l'une des équations de Maxwell établir la relation entre  $\frac{\partial \lambda_c}{\partial z}$  et  $\frac{\partial i}{\partial t}$ .

4- Montrer, pour  $z$  et  $t$  donnés, que la différence de potentiel entre les cylindres  $(C_1)$  et  $(C_2)$  s'écrit :  $u(z,t) = \frac{\lambda_c(z,t)}{C}$  avec  $C$  la capacité linéique de la ligne bifilaire.

5- En déduire les deux équations différentielles couplées suivantes :  $\frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial u}{\partial t}$  et  $\frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t}$  avec  $L$  l'inductance linéique de la ligne bifilaire.

6-a) En déduire que l'intensité  $i(z,t)$  obéit à l'équation différentielle :  $\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$ . Quel nom donne-t-on à ce type d'équation ? Donner  $v$  et préciser sa dimension.

On appellera onde de courant toute solution de cette équation.

6-b) Etablir l'équation différentielle équivalente pour la tension  $u(z,t)$ .

6-c) Quelle est la solution générale de l'équation différentielle vérifiée par  $i(z,t)$ . Interpréter chaque terme de cette solution.

7-a) Peut-on appliquer les lois de l'électrocinétique pour une ligne bifilaire de longueur  $\ell = 500$  m et pour un signal électrique de fréquence  $f = 1$  MHz se propageant à la célérité de la lumière dans le vide ?

7-b) On se propose de raisonner sur une longueur  $dz$  de la ligne qu'on modélise par une bobine d'inductance  $L dz$  et un condensateur de capacité  $C dz$  (Figure 7). On note  $i(z,t)$  et  $i(z+dz,t)$  les intensités des courants dans la ligne respectivement en  $z$  et  $z+dz$  et  $u(z,t)$  et  $u(z+dz,t)$  les tensions dans la ligne respectivement en  $z$  et  $z+dz$ . En appliquant les lois de l'électrocinétique

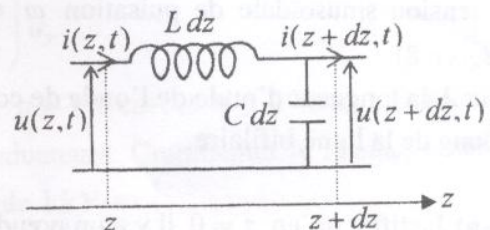


Figure-7-

aux bornes du condensateur d'une part et aux bornes de la bobine d'autre part établir, à l'ordre le plus bas, les deux équations couplées de la question 5.

8- La ligne bifilaire est alimentée en  $z = -\ell$  par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et fermée en  $z = 0$  par une charge d'impédance  $Z$  (Figure 6). L'onde de courant peut s'écrire, en notation complexe,  $\underline{i}(z,t) = \underline{i}_1(z,t) + \underline{i}_2(z,t)$  avec  $\underline{i}_1(z,t) = I_1 e^{j(\omega t - kz)}$ ,  $\underline{i}_2(z,t) = I_2 e^{j(\omega t + kz)}$ ,  $k$  est le nombre d'onde et  $I_1$  et  $I_2$  sont des constantes positives.

8-a) Etablir la relation de dispersion liant  $k$  et  $\omega$ .

8-b) L'onde de tension s'écrit, en notation complexe,  $\underline{u}(z,t) = \underline{u}_1(z,t) + \underline{u}_2(z,t)$ . En utilisant la première équation couplée de la question 5-, montrer que  $\underline{u}_1(z,t) = Z_c \underline{i}_1(z,t)$  et

$\underline{u}_2(z,t) = -Z_c \underline{i}_2(z,t)$  avec  $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$  appelée impédance caractéristique de la ligne bifilaire.

## II- Ligne bifilaire adaptée : onde progressive

9- Ecrire la condition aux limites à l'extrémité  $z = 0$  de la ligne bifilaire. En déduire le rapport  $I_2/I_1$  en fonction de  $Z$  et  $Z_c$ . Quel nom peut-on donner à ce rapport ?

10- A quelle condition l'onde de courant qui se propage dans la ligne bifilaire est plane progressive selon  $z > 0$  ? Dans ces conditions la ligne est dite adaptée. Expliquer.

Pour la suite on s'intéresse à cette onde progressive selon  $z > 0$ . Ecrire, en notation réelle,  $i(z, t)$  et  $u(z, t)$ .

11-a) Déterminer la vitesse de phase  $v_\phi$  et la vitesse de groupe  $v_g$  en fonction de  $L$  et  $C$ .

11-b) Les signaux électriques de forme quelconque sont-ils déformés au cours de la propagation ? Expliquer.

12-a) Déterminer la puissance électrique  $P(z, t)$  transportée par l'onde électrique le long de la ligne bifilaire ainsi que sa valeur moyenne temporelle  $\langle P(z, t) \rangle$ .

12-b) Déterminer l'énergie électrique  $w(z, t)$  stockée dans la ligne bifilaire, par unité de longueur, ainsi que sa valeur moyenne temporelle  $\langle w(z, t) \rangle$ .

12-c) Montrer que  $P(z, t)$  et  $w(z, t)$  vérifient la relation  $\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ . Commenter.

12-d) Déterminer  $\frac{\langle P(z, t) \rangle}{\langle w(z, t) \rangle}$ . Que représente ce rapport ?

## III- Ligne bifilaire ouverte : Onde stationnaire

La ligne bifilaire est alimentée en  $z = -\ell$  par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et ouverte en  $z = 0$  (Figure 8).

Soit  $\lambda$  la longueur d'onde de l'onde de courant qui se propage le long de la ligne bifilaire.

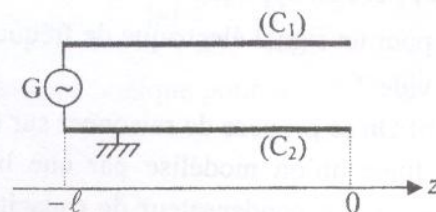


Figure-8-

13-a) Justifier qu'en  $z = 0$  il y a un nœud de courant, en déduire la valeur du rapport  $I_2/I_1$ .

13-b) En déduire, qu'en notation réelle, l'onde stationnaire de courant s'écrit :

$$i(z, t) = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin(\omega t).$$

13-c) Déterminer les positions des nœuds et des ventres de courant en fonction de  $\lambda$ .

13-d) Dessiner à un instant  $t$  donné l'amplitude de l'onde de courant en fonction de  $z$  dans le cas où  $\ell = 3\lambda$ .

14- Déterminer, en notation réelle, l'onde de tension  $u(z, t)$ . En déduire  $\langle P(z, t) \rangle$  la valeur moyenne temporelle de la puissance électrique transportée par l'onde. Commenter.

## IV- Antenne demi-onde

Cette partie est indépendante des parties précédentes de l'épreuve.

Dans cette partie on choisit l'origine O le milieu de l'antenne demi-onde, on prendra l'axe (Oz) confondu avec l'antenne et on notera  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$  le repère sphérique.



On écarte les brins de la ligne bifilaire en circuit ouvert, étudiée précédemment, d'une longueur  $\lambda/4$  (Figure 9-a), on réalise ainsi une antenne demi-onde (Figure 9-b). L'onde stationnaire de courant le long de l'antenne s'écrit :  $i(z,t) = I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \cos(\omega t)$  avec  $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ .

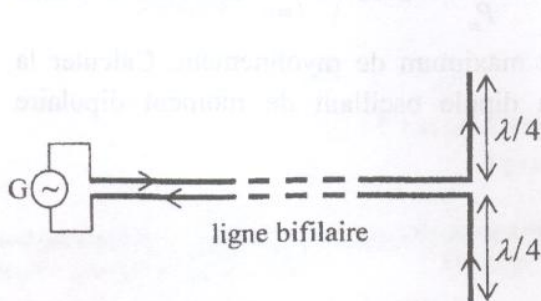


Figure-9-a-

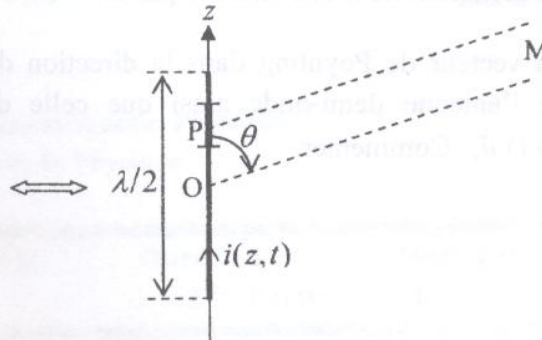


Figure-9-b-

15- Quelle doit être la longueur de l'antenne demi-onde de la chaîne radio jeune de fréquence 99,4 MHz ?

16- Quelles conditions doit nécessairement vérifier le courant  $i(z,t)$ .

17- Quelle est la différence majeure entre l'antenne demi-onde et le dipôle électrique oscillant ?

18- On décompose l'antenne en éléments de longueur  $dz$  avec  $dz \ll \lambda$  (Figure 9-b).

18-a) Exprimer la charge  $q(z,t)$  en fonction de  $I_0$ ,  $\omega$  et  $\lambda$ .

18-b) Justifier qu'un élément de l'antenne se comporte comme un dipôle électrique oscillant. Déterminer son moment dipolaire élémentaire  $d\vec{p}(z,t) = dp(z,t) \vec{u}_z$ .

19- Le champ électrique rayonné, en un point M de l'espace, par un dipôle électrique oscillant de moment dipolaire  $\vec{p} = p \vec{u}_z$ , situé autour du point O, est :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{OM} \frac{d^2}{dt^2} \left( p \left( t - \frac{OM}{c} \right) \right) \vec{u}_\theta \text{ avec } \theta = \left( \vec{p}, \vec{OM} \right).$$

19-a) On suppose que les champs rayonnés par chaque élément  $dz$  sont émis dans la même direction  $\theta$  (Figure 9-b). Justifier que le champ électrique rayonné par un élément  $dz$  de l'antenne, situé autour d'un point P tel que  $OP = z$ , est

$$d\vec{E}(M,t) = -\frac{I_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} PM\right) dz \vec{u}_\theta \text{ avec } r = OM.$$

19-b) Exprimer PM en fonction de  $r$ ,  $z$  et  $\theta$ .

19-c) En déduire que le champ électrique rayonné par l'antenne demi-onde est :

$$\vec{E}(M,t) = -\frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r\right) \vec{u}_\theta.$$

20- Quelle est la structure de l'onde rayonnée par l'antenne au point M ? En déduire la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting  $\langle \vec{\Pi} \rangle$ .

21-a) Déterminer  $P_m$  la puissance électromagnétique moyenne totale rayonnée par l'antenne demi-onde à travers une sphère de centre O et de rayon  $r$ .

21-b) On définit la résistance de rayonnement  $R_r$  de l'antenne par  $P_m = \frac{R_r I_0^2}{2}$ . Calculer  $R_r$ .

22- On définit la directivité d'une antenne par  $D = 4 \pi r^2 \frac{\|\langle \vec{\Pi} \rangle_{\max}\|}{P_m}$  avec  $\langle \vec{\Pi} \rangle_{\max}$  la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting dans la direction du maximum de rayonnement. Calculer la directivité de l'antenne demi-onde ainsi que celle du dipôle oscillant de moment dipolaire  $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . Commenter.