

**Corrigé de l'épreuve de physique**  
**Concours Mathématiques et Physique**  
**Session Juin 2013**

**LIGNE BIFILAIRE**

**1<sup>ère</sup> partie : Etude d'une ligne bifilaire en régime continu (40/100)**

**I- Ligne bifilaire ouverte : électrostatique (23/100)**

Q	Réponse	Barème
1-	$\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{Q_{\text{intérieur} \Sigma}}{\epsilon_0}$	1
	$\text{rot} \vec{E}(M) = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = 0$	1
	$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$	0,5
2-	Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique est nul.	0,5
	Soit M un point appartenant au volume du conducteur en équilibre électrostatique on a $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) = \vec{0}$ donc $\forall M$ on a $V(M) = C^{te}$	0,5
	Pour un conducteur en équilibre électrostatique les charges sont situées à sa surface en effet : $\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$ avec $\vec{E}(M) = \vec{0}$ donc $\rho(M) = 0$	0,5
3-a)	$a \ll d \ll \ell$ : les deux cylindres sont infinis (pas d'effet de pointe) et très éloignés l'un de l'autre donc les densités surfaciques de charge sont uniformes.	1
3-b)	Les cylindres ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) sont en influence totale $\Rightarrow Q_2 = -Q_1$ avec $\left. \begin{aligned} Q_1 &= \iint \sigma_1 dS_1 = \sigma_1 2 \pi a \ell \\ Q_2 &= \iint \sigma_2 dS_2 = \sigma_2 2 \pi a \ell \end{aligned} \right\} \text{ donc } \sigma_2 = -\sigma_1$	1
3-c)	$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \int \lambda_1 d\ell_1 = \lambda_1 \ell \\ Q_1 &= \sigma_1 2 \pi a \ell \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = 2 \pi a \sigma_1$	1
	De même $Q_2 = \int \lambda_2 d\ell_2 = \lambda_2 \ell = -Q_1 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 = -\lambda_c$	0,5
4-a)	$\lambda_1$ étant uniforme donc la distribution de charge est invariante par rotation autour de ( $O_1 z$ ) et par translation le long de ( $O_1 z$ ) donc $\vec{E}_1$ ne dépend que de la variable $r_1$ .	0,5
	Puisque $\lambda_1$ est uniforme alors ( $M, \vec{u}_r, \vec{u}_z$ ) plan de symétrie Puisque $\lambda_1$ est uniforme et le cylindre ( $C_1$ ) est infini alors ( $M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ ) plan de symétrie $\vec{E}_1$ étant un vrai vecteur alors il appartient à l'intersection de ces deux plans de symétrie donc $\vec{E}_1$ est radial $\Rightarrow \vec{E}_1 = E_1(r_1) \vec{u}_r$ .	1
4-b)	La surface de Gauss $\Sigma$ est un cylindre d'axe ( $O_1 z$ ), de hauteur $h$ et de rayon $r_1 > a$ . $\oiint_{\Sigma} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S}_{\Sigma} = \Phi_{\text{latéral}} + \underbrace{\Phi_{\text{bases}}}_{=0} = \iint_{S_{\text{latéral}}} E_1(r_1) \vec{u}_r \cdot d\vec{S}_{\text{latéral}} \vec{u}_r = E_1(r_1) 2 \pi r_1 h$ $Q_{\text{int} \Sigma} = \int_{-h}^0 \lambda_1 d\ell_1 = \lambda_1 h$ donc $E_1(r_1) 2 \pi r_1 h = \frac{\lambda_1 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1(r_1) = \frac{\lambda_c}{2 \pi \epsilon_0 r_1}$	2
4-c)	$\vec{E}_1(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V_1(M) \Rightarrow E_1(r_1) = -\frac{dV_1}{dr_1} \Rightarrow V_1(M) = -\frac{\lambda_1}{2 \pi \epsilon_0} \int \frac{dr_1}{r_1} = -\frac{\lambda_c}{2 \pi \epsilon_0} \ln(r_1) + K_1$	1,5

5-a)	Le potentiel crée par (C <sub>2</sub> ) seul est : $V_2 = -\frac{(-\lambda_c)}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) + K_2$ . D'après le principe de superposition le potentiel crée par (C <sub>1</sub> ) et (C <sub>2</sub> ) est : $V(M) = V_1 + V_2 = \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + K$ .	1
5-b)	$\left. \begin{aligned} V_{C1} = V(H_1) = V(r_1 = a, r_2 = d-a) &= \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right) + K \\ V_{C2} = V(H_2) = V(r_1 = d-a, r_2 = a) &= \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{d-a}\right) + K \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{C1} - V_{C2} = \frac{\lambda_c}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d}{a} - 1\right)$	2
5-c)	$C_{\text{ligne bifilaire}} = \frac{Q_1}{V_{C1} - V_{C2}} = \frac{\lambda_c \ell}{V_{C1} - V_{C2}} = \frac{\pi\epsilon_0 \ell}{\ln\left(\frac{d}{a} - 1\right)} \Rightarrow C = \frac{C_{\text{ligne bifilaire}}}{\ell} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{a} - 1\right)}$	1
	$C = \frac{\pi \cdot 8,84 \cdot 10^{-12}}{\ln\left(\frac{1,5}{0,3} - 1\right)} = 22 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} = 20 \text{ pF.m}^{-1}$	1
6-a)	M appartient à l'axe (O <sub>1</sub> x) et il est situé entre O <sub>1</sub> et O <sub>2</sub> donc r <sub>1</sub> = x et r <sub>2</sub> = d - x d'où $V(M) = \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-x}{x}\right) + K$	1
6-b)	(C <sub>1</sub> ) et (C <sub>2</sub> ) sont infinis et uniformément chargés donc la distribution est invariante par translation le long de (O <sub>1</sub> z) : $V(M \in (xO_1z)) = V(M \in (O_1x)) = \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d-x}{x}\right) + K$ $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x = \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \vec{u}_x$	0,5 1,5
6-c)	Au voisinage des cylindriques c.à.d. en x = a ou x = d - a on a $\ \vec{E}\  = \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a}\right)$ et $V_{C1} - V_{C2} = \frac{\lambda_c}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d}{a} - 1\right) \Rightarrow \ \vec{E}\  = \frac{V_{C1} - V_{C2}}{2 \ln\left(\frac{d}{a} - 1\right)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a}\right)$	1
	$\ \vec{E}\  = \frac{90 \cdot 10^3}{2 \ln\left(\frac{25}{1,2} - 1\right)} \left(\frac{1}{1,2} + \frac{1}{25-1,2}\right) \cdot 10^2 = 1,17 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1} = 1,17 \text{ MV.m}^{-1}$	1
	Il ne faut pas s'approcher des lignes de haute tension.	0,5

## II- Ligne bifilaire court-circuitée : magnétostatique (17/100)

Q	Réponse	Barème
7-	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M) \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = \mu_0 I_{\text{entree } \Gamma}$	1
	$\text{div} \vec{B}(M) = 0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = 0$	1
	$\vec{B}(M) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M)$	0,5
8-a)	Le courant est uniforme donc la distribution de courant est invariante par rotation autour de (O <sub>1</sub> z) et par translation le long de (O <sub>1</sub> z) donc $\vec{B}_1$ et $\vec{A}_1$ ne dépendent que de la variable r <sub>1</sub> .	0,5
	Puisque le courant est uniforme alors (M, $\vec{u}_r$ , $\vec{u}_z$ ) plan de symétrie. $\vec{B}_1$ est un pseudo	



	vecteur donc il est perpendiculaire au plan de symétrie donc $\vec{B}_1 = B_1(r_1) \vec{u}_\theta$ .	1
	Puisque le courant est uniforme et le cylindre ( $C_1$ ) est infini alors ( $M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ ) plan d'antisymétrie. $\vec{A}_1$ est un vrai vecteur donc il est perpendiculaire au plan d'antisymétrie donc $\vec{A}_1 = A_1(r_1) \vec{u}_z$ .	1
8-b)	Le contour d'Ampère est un cercle orienté, d'axe ( $O_1 z$ ) et de rayon $r_1 > a$ . $\oint_{\Gamma} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell}_\Gamma = \oint_{\Gamma} B_1(r_1) \vec{u}_\theta \cdot (+d\ell \vec{u}_\theta) = B_1(r_1) 2\pi r_1$ $I_{\text{enlace } \Gamma} = +I \Rightarrow B_1(r_1) 2\pi r_1 = \mu_0 I \Rightarrow B_1(r_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$	2
8-c)	$\vec{B}_1(M) = \text{rot } \vec{A}_1(M) \Rightarrow B_1(r_1) = -\frac{dA_1(r_1)}{dr_1} \Rightarrow A_1(r_1) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{dr_1}{r_1} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(r_1) + K'_1$	1
9-a)	Soit M un point appartenant à l'axe ( $Oy$ ) donc $r_1 = r_2$ Les courants sont uniformes et les cylindres sont infinis alors ( $O, \vec{u}_x, \vec{u}_y$ ) est un plan d'antisymétrie donc $\vec{A}(r_1 = r_2)$ est porté par $\vec{u}_z$ . Les courants sont uniformes ( $O, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ ) est un plan d'antisymétrie donc $\vec{A}(r_1 = r_2)$ est porté par $\vec{u}_x$ . $\vec{A}(r_1 = r_2)$ ne peut pas être porté à la fois par $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ donc $\vec{A}(r_1 = r_2) = \vec{0}$ .	1,5
9-b)	Le potentiel vecteur crée par ( $C_2$ ) seul est : $\vec{A}_2 = \left[ -\frac{\mu_0(-I)}{2\pi} \ln(r_2) + K'_2 \right] \vec{u}_z$ . D'après le principe de superposition le potentiel vecteur crée ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) est : $\vec{A}(M) = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + K' \right] \vec{u}_z$ Puisque $\vec{A}(r_1 = r_2) = \vec{0} \Rightarrow K' = 0 \Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \vec{u}_z$	1
10-a)	M appartient à l'axe ( $O_1 x$ ) et il est situé entre $O_1$ et $O_2$ donc $r_1 = x$ et $r_2 = d - x$ d'où $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d-x}{x}\right) \vec{u}_z$ .	1
10-b)	( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) sont infinis et les courants uniformes donc la distribution est invariante par translation le long de ( $O_1 z$ ) : $\vec{A}(M \in (xO_1 z)) = \vec{A}(M \in (O_1 x)) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d-x}{x}\right) \vec{u}_z$ $\vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A}(M) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x \wedge A(M) \vec{u}_z = -\frac{dA}{dx} \vec{u}_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \vec{u}_y$	0,5 1
10-c)	$\Phi = \iint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \vec{u}_y \cdot dx dz \vec{u}_y$ $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-l}^0 dz \int_a^{d-a} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ell \ln\left(\frac{x}{d-x}\right) \Big _a^{d-a} = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right) I$	2
10-d)	$\Phi = L_{\text{ligne bifilaire}} I \Rightarrow L = \frac{L_{\text{ligne bifilaire}}}{\ell} = \frac{\Phi}{\ell I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d}{a} - 1\right)$	1
	$L = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \ln\left(\frac{1,5}{0,3} - 1\right) = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} = 0,55 \mu\text{H.m}^{-1}$	1

**2<sup>ème</sup> partie : Etude d'une ligne bifilaire en régime variable (60/100)**

**I- Mise en équation et solution générale (23/100)**

Q	Réponse	Barème
1-	$\text{div} \vec{E} = 0 ; \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \text{div} \vec{B} = 0 ; \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	2
	$\vec{E}(M,t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M,t) - \frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t} ; \vec{B}(M,t) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M,t)$	1
2-	<p>A partir de l'équation de Maxwell-Ampère : <math>\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow</math></p> $\vec{\nabla} \wedge B(z,t) \vec{u}_y = -\frac{\partial B}{\partial z} \vec{u}_x = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \vec{u}_x \Rightarrow -\mu_0 \frac{\partial i}{\partial z} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \lambda_c}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial \lambda_c}{\partial t}$	1,5
3-	<p>A partir de l'équation de Maxwell-Faraday : <math>\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow</math></p> $\vec{\nabla} \wedge E(z,t) \vec{u}_x = \frac{\partial E}{\partial z} \vec{u}_y = -\frac{\partial B}{\partial t} \vec{u}_y \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \lambda_c}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \lambda_c}{\partial z} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial i}{\partial t}$	1,5
4-	$\vec{E}(M,t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M,t) - \frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow \int_{C1}^{C2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{C1}^{C2} \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} - \int_{C1}^{C2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}$ <p>Dans le plan (xOz) et pour z donné on a <math>d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x \Rightarrow</math></p> $\int_{C1}^{C2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C1}^{C2} \frac{\partial A}{\partial t} \vec{u}_z \cdot dx \vec{u}_x = 0 ; \int_{C1}^{C2} \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = \int_{C1}^{C2} dV = V_{C2} - V_{C1} = -u(z,t) \text{ et}$ $\int_{C1}^{C2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\lambda_c(z,t)}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^{d-a} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\lambda_c(z,t)}{\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$ <p>Donc <math>u(z,t) = \frac{\lambda_c(z,t)}{\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)</math> puisque <math>C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} \Rightarrow u(z,t) = \frac{\lambda_c(z,t)}{C}</math></p>	1,5
5-	$-\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial \lambda_c}{\partial t} \text{ avec } u(z,t) = \frac{\lambda_c(z,t)}{C} \Rightarrow -\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial u}{\partial t}$	1
	$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda_c}{\partial z} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ u(z,t) = \frac{\lambda_c(z,t)}{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} C \frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ L C = \varepsilon_0 \mu_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t}$	1
6-a)	$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = -C \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = -C \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - L C \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$	1
	Equation d'Alembert	0,5
	$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	0,5
	v a la dimension d'une vitesse	0,5
6-b)	$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -L \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial i}{\partial z} \\ -\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - L C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$	1

6-c)	La solution générale de l'équation différentielle vérifiée par $i(z,t)$ est de la forme :	0,5
	$i(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt)$ avec	0,5
	$f(z - vt)$ : onde plane qui se propage selon $z > 0$ avec la célérité $v$ $g(z + vt)$ : onde plane qui se propage selon $z < 0$ avec la célérité $v$	0,5
7-a)	On applique les lois de l'électrocinétique dans l'approximation des régimes quasi stationnaire. Pour une ligne bifilaire ce n'est pas le cas car on n'a pas $\lambda \gg \ell$ en effet $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6} = 300 \text{ m} < \ell = 500 \text{ m}$ .	1,5
7-b)	La tension aux bornes de la bobine est $u_L = L dz \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$ D'après la loi des mailles on a $u_L = u(z,t) - u(z+dt,t) = -\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} dz$ donc $L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}$	2
	La tension aux bornes du condensateur est $u_C = \frac{q_C}{C dz} = u(z+dz,t) = u(z,t) + \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} dz$ avec $i_C = \frac{\partial q_C}{\partial t} \Rightarrow$ au premier ordre on a $i_C = C dz \frac{\partial u_C}{\partial t} = C dz \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$ D'après la loi des nœuds on a $i(z,t) = i_C + i(z+dz,t) \Rightarrow i_C = -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} dz$ donc $C \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}$	2
8-a)	Injectant $\underline{i}(z,t)$ dans l'équation de propagation, écrite en notation complexe, $\frac{\partial^2 \underline{i}}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 \underline{i}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow -k^2 \underline{i}(z,t) - LC (-\omega^2 \underline{i}(z,t)) = 0 \Rightarrow \forall z \text{ et } \forall t \text{ on a } k = \omega \sqrt{LC}$	1
8-b)	$-\frac{\partial \underline{i}_1}{\partial z} = C \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} \Rightarrow -(-jk \underline{i}_1) = C(j\omega \underline{u}_1) \Rightarrow \underline{u}_1 = \frac{k}{C\omega} \underline{i}_1 = \frac{\omega \sqrt{LC}}{C\omega} \underline{i}_1 = \sqrt{\frac{L}{C}} \underline{i}_1$	1
	$-\frac{\partial \underline{i}_2}{\partial z} = C \frac{\partial \underline{u}_2}{\partial t} \Rightarrow -(+jk \underline{i}_2) = C(j\omega \underline{u}_2) \Rightarrow \underline{u}_2 = -\frac{k}{C\omega} \underline{i}_2 = \dots\dots\dots = -\sqrt{\frac{L}{C}} \underline{i}_2$	1

## II- Ligne bifilaire adaptée : onde progressive (11,5/100)

9-	$\underline{u}(z=0,t) = Z \underline{i}(z=0,t) \Rightarrow$	0,5
	$Z_c (I_1 - I_2) = Z (I_1 + I_2) \Rightarrow \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{Z_c - Z}{Z_c + Z}$	1
	Coefficient de réflexion en amplitude de l'onde de courant	0,5
10-	L'onde de courant dans la ligne bifilaire est une OPPM selon $z > 0$ si $I_2 = 0$	0,5
	Si $I_2 = 0$ alors $Z = Z_c$ : la ligne est dite adaptée car elle est terminée par une impédance égale à son impédance caractéristique.	0,5
	Pour une OPPM selon $z > 0$ on a $\underline{i}(z,t) = I_1 \cos(\omega t - kz)$ et $\underline{u}(z,t) = Z_c I_1 \cos(\omega t - kz)$	1
11-a)	$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ et $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ avec $k = \omega \sqrt{LC} \Rightarrow v_\varphi = v_g = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	1
11-b)	Un signal de forme quelconque est la superposition de signaux sinusoïdaux de pulsation $\omega$ différente. Puisque $v_\varphi$ est indépendant de $\omega$ (milieu non dispersif) alors	



	les signaux sinusoïdaux se propagent avec la même vitesse $v_\phi$ ce ci entraine que le signal électrique ne se déforme pas au cours de sa propagation.	1
12-a)	$P(z,t) = u(z,t) i(z,t) = Z_c I_1^2 \cos^2(\omega t - k z)$	1
	$\langle P(z,t) \rangle = \frac{Z_c I_1^2}{2}$	0,5
12-b)	$w = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C u^2 = \frac{I_1^2}{2} (L + Z_c^2 C) \cos^2(\omega t - k z) \left\{ \Rightarrow w(z,t) = I_1^2 L \cos^2(\omega t - k z) \right.$ $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$	1
	$\langle w(z,t) \rangle = \frac{I_1^2 L}{2}$	0,5
12-c)	$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= 2 Z_c I_1^2 k \cos(\omega t - k z) \sin(\omega t - k z) \\ k &= \omega \sqrt{L C} \Rightarrow Z_c k = \sqrt{\frac{L}{C}} \omega \sqrt{L C} = L \omega \\ \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= 2 I_1^2 L \omega \cos(\omega t - k z) \sin(\omega t - k z) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -2 I_1^2 L \omega \cos(\omega t - k z) \sin(\omega t - k z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$	1
	Cette relation illustre la conservation de l'énergie électrique dans la ligne bifilaire.	0,5
12-d)	$\frac{\langle P(z,t) \rangle}{\langle w(z,t) \rangle} = \frac{Z_c I_1^2 / 2}{I_1^2 L / 2} = \frac{\sqrt{L/C}}{L} = \frac{1}{\sqrt{L C}}$	0,5
	Ce rapport représente la vitesse de propagation de l'énergie électrique qui est aussi la vitesse de groupe.	0,5

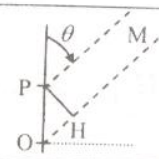
### III- Ligne bifilaire ouverte : onde stationnaire (7/100)

13-a)	En $z=0$ la ligne est ouverte donc $Z = \frac{u(z=0,t)}{i(z=0,t)} \rightarrow \infty \Rightarrow i(z=0,t) = 0$ nœud de courant	0,5
	$I_2 / I_1 = -1$	0,5
13-b)	$i(z,t) = I_1 (e^{-jkz} - e^{+jkz}) e^{j\omega t} = -2j I_1 \sin(kz) e^{j\omega t} = 2I_1 \sin(kz) e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \Rightarrow$ $i(z,t) = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin(\omega t)$ avec $I_0 = 2 A$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .	1
13-c)	Les nœuds de l'onde de courant sont tel que : $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} z_{\text{nœud}} = n\pi \Rightarrow z_{\text{nœud}} = n \frac{\lambda}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}^-$ et $-\ell \leq z_{\text{nœud}} \leq 0$	1
	Les ventres de l'onde de courant sont tel que : $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} z_{\text{ventre}} = (2n-1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_{\text{ventre}} = n \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$ avec $n \in \mathbb{Z}^-$ et $-\ell \leq z_{\text{ventre}} \leq 0$	1
13-d)		1

14-	$u(z,t) = Z_c I_1 (e^{-jkz} + e^{+jkz}) e^{j\omega t} = 2 Z_c I_1 \cos(kz) e^{j\omega t} \Rightarrow u(z,t) = Z_c I_0 \cos(kz) \cos(\omega t)$	1
	$\langle P(z,t) \rangle = 0$	0,5
	En moyenne la puissance électrique ne se propage pas en effet l'onde est stationnaire.	0,5

#### IV- Antenne demi-onde (18,5/100)

15-	$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}$ donc $\frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 99,4 \cdot 10^6} = 1,5 \text{ m}$	1
16-	Les extrémités de l'antenne sont des nœuds de courant : $i\left(z = \frac{\lambda}{4}, t\right) = i\left(z = -\frac{\lambda}{4}, t\right) = 0$	0,5
17-	La taille de l'antenne n'est pas négligeable devant $\lambda$ par contre la taille du dipôle est négligeable devant $\lambda$	0,5
18-a)	$i(z,t) = \frac{\partial q(z,t)}{\partial t} = I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \cos(\omega t) \Rightarrow q(z,t) = \frac{I_0}{\omega} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin(\omega t)$	1
18-b)	Soit un élément $P_1 P_2$ de l'antenne de longueur $dz \ll \lambda$ , le courant circule de $P_1$ vers $P_2$ donc une charge $dq$ est transportée de $P_1$ vers $P_2$ d'où apparition d'une charge $-q(z,t)$ en $P_1$ et une charge $q(z,t)$ en $P_2$ d'où cet élément se comporte comme un dipôle oscillant de moment dipolaire élémentaire	1
	$d\vec{p}(z,t) = q(z,t) \vec{P}_1 \vec{P}_2 = \frac{I_0}{\omega} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin(\omega t) dz \vec{u}_z$	1
19-a)	Tous les rayons PM sont parallèles donc $\theta$ et $\vec{u}_\theta$ sont indépendants de la position du point P sur l'antenne d'où le champ élémentaire créé par un élément de l'antenne est : $d\vec{E}(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{PM} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{I_0}{\omega} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\omega\left(t - \frac{PM}{c}\right)\right) dz \right) \vec{u}_\theta$ Dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda \Rightarrow r \gg z = OP$ donc $\frac{1}{PM} \approx \frac{1}{OM} = \frac{1}{r}$ d'où $d\vec{E}(M,t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} I_0 \omega \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} PM\right) dz \vec{u}_\theta$	1
19-b)	D'après le théorème de Malus $HM = PM$ donc $OM = OH + HM \Rightarrow r = z \cos\theta + PM \Rightarrow PM = r - z \cos\theta$	1
19-c)	$d\vec{E} = -\frac{I_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{2\pi}{\lambda} z \cos\theta\right) dz \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{E} = \int d\vec{E}$ $\vec{E}(M,t) = -\frac{I_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \left[ \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{2\pi}{\lambda} z \cos\theta\right) dz \right] \vec{u}_\theta$ $\vec{E}(M,t) = -\frac{I_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \frac{1}{2} \left[ \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{2\pi}{\lambda} z(1 + \cos\theta)\right) dz + \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{2\pi}{\lambda} z(1 - \cos\theta)\right) dz \right] \vec{u}_\theta$	



	$\vec{E} = \frac{I_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{\pi}{2}(1 + \cos \theta)\right) - \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r - \frac{\pi}{2}(1 + \cos \theta)\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}(1 + \cos \theta)} + \right.$ $\left. \frac{\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{\pi}{2}(1 - \cos \theta)\right) - \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r - \frac{\pi}{2}(1 - \cos \theta)\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}(1 - \cos \theta)} \right] \vec{u}_\theta$ $\vec{E} = -\frac{I_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} \frac{1}{2} 2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r\right) \frac{\lambda}{2\pi} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{(1 + \cos \theta)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{(1 - \cos \theta)} \right] \vec{u}_\theta$ $\vec{E} = -\frac{I_0}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{\sin \theta}{r} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \frac{2}{\sin^2 \theta} \vec{u}_\theta$ $\vec{E} = -\frac{I_0}{2\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r\right) \vec{u}_\theta$	3
20-	<p>M est très éloigné donc l'onde est localement plane <math>\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}</math></p> <hr/> $\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \left\langle \frac{\vec{E}}{\mu_0} \wedge \left( \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c} \right) \right\rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \left\langle (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{u}_r - \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{u}_r) \vec{E}}_{=0} \right\rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 c} \vec{u}_r \Rightarrow$ $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c^3} \frac{1}{r^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \vec{u}_r = \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{1}{r^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \vec{u}_r$	0,5  1
21-a)	$P_m = \left\langle \iint_S \vec{\Pi}_s \cdot d\vec{S} \right\rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_s \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1,22}{4\pi \epsilon_0 c} I_0^2$	1,5
21-b)	$P_m = \frac{R_r I_0^2}{2} \Rightarrow R_r = \frac{1,22}{2\pi \epsilon_0 c} = \frac{1,22}{2 \cdot \pi \cdot 8,84 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8} = 73 \Omega$	1
22-	<p>Pour l'antenne on a :</p> $\ \langle \vec{\Pi} \rangle_{\max}\  = \left\  \left\langle \vec{\Pi}(\theta = \frac{\pi}{2}) \right\rangle \right\  = \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{1}{r^2} \Rightarrow D = \frac{4\pi r^2 I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{1}{1,22 I_0^2} = \frac{2}{1,22} = 1,64$ <hr/> <p>Pour un dipôle oscillant on a : <math>\vec{E} = -\frac{p_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\theta</math> donc</p> $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 c} \vec{u}_r = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{u}_r \Rightarrow \ \langle \vec{\Pi} \rangle_{\max}\  = \left\  \left\langle \vec{\Pi}(\theta = \frac{\pi}{2}) \right\rangle \right\  = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \text{ et}$ $P_m = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \Rightarrow D = \frac{4\pi r^2 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{\omega^4 p_0^2} = \frac{3}{2} = 1,5$ <hr/> <p>1,64 &gt; 1,5 donc l'antenne demi-onde est légèrement plus directive que le dipôle oscillant.</p>	1  3  0,5