REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2013

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2013

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Date: 3 Juin 2013	**Heure :** 8 H	**Durée :** 4 heures	**Nb pages :** 5
Barème :			

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge et que la suite $(R_n(x))_{n\geq 0}$ de ses restes vérifie
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |R_n(x)| \leq \tfrac{1}{n+2}.$$
On pose
$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
4. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$,
   $$f'(x) - f(x) = -\frac{1}{1+e^{-x}}.$$
   (c) Déduire alors que, pour tout $x \geq 0$,
   $$f(x) = e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right).$$

Problème

Le but de ce problème est de résoudre l'équation différentielle:

$$(E_\alpha) \quad : \quad x^2 y'' + xy' - \left(x^2 + \alpha^2\right) y = 0,$$

où α est un réel positif ou nul. Dans la première partie, on établit quelques résultats sur les fonctions Γ et β d'Euler utiles pour la suite. Dans la deuxième partie, on fait l'étude de deux solutions I_α et K_α de (E_α) et on prouve que (I_α, K_α) est un système fondamental de solutions de (E_α). On établit, dans la troisième partie, quelques résultats supplémentaires sur la fonction I_α quand l'indice α est un entier naturel.

Première partie : Les fonctions Γ et β d'Euler

On pose, pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

1. Soit $x > 0$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\ln\left(f_{n+1}(x)\right) - \ln\left(f_n(x)\right) = x \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right).$$

   (b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \Big(\ln\left(f_{n+1}(x)\right) - \ln\left(f_n(x)\right)\Big)$ est convergente.

   (c) En déduire que la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 1}$ converge vers une limite $f(x) \in \left]0, +\infty\right[$.

2. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$,

   $$f(x+1) = x f(x).$$

   (b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

   $$f(p+1) = p!.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$, si et seulement si, $x, y > 0$.

   On pose alors, pour tout $x, y > 0$,

   $$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

4. Soient $x, y > 0$.

   (a) Montrer que

   $$\beta(x, y) = \frac{x+y}{y} \beta(x, y+1).$$

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\beta(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} \beta(x, y+n+1).$$

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta(x,y) = \frac{f_n(y)}{f_n(x+y)} \int_0^n u^{x-1} \left(1 - \tfrac{u}{n}\right)^{y+n} du.$$

5. En utilisant le théorème de la convergence dominée, montrer que, pour tout $x, y > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n u^{x-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{y+n} du = \Gamma(x),$$

où

$$\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\, x \mapsto \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du,$$

désigne la fonction **Gamma d'Euler**.

6. Montrer alors que

$$\beta(x,y) = \frac{f(y)}{f(x+y)} \Gamma(x).$$

7. Soient $x, y > 0$.
   (a) Calculer $\beta(x,1)$.
   (b) Montrer que

   (i) $$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

   (ii) $$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

8. (a) En utilisant le changement de variable $t = \sin^2\theta$, calculer $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
   (b) En déduire que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
   (c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma\left(p + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{4^p p!} \sqrt{\pi}.$$

Deuxième partie : Résolution de (E_α)

Dans toute la suite on considère un réel $\alpha \geq 0$ et les équations différentielles,

$$(E_\alpha) \quad : \quad x^2 y'' + x y' - \left(x^2 + \alpha^2\right) y = 0, \text{ et}$$

$$(E'_\alpha) \quad : \quad x y'' + (2\alpha + 1) y' - x y = 0.$$

Question préliminaire

Soit $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On note

$$\psi :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}.$$

Montrer que φ est une solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, ψ est une solution de (E'_α) sur $]0, +\infty[$.

A- Étude de la solution I_α

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. On pose

$$S :]-R, R[\to \mathbb{R}, x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Montrer que S est solution de (E'_α) sur $]-R, R[$ si, et seulement si, $a_1 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+2+2\alpha)}.$$

2. (a) Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4^n n! \Gamma(\alpha+n+1)}$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

(b) Montrer que

$$I_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n! \Gamma(\alpha+n+1)}$$

est une solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que

(a) $$I_\alpha(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha.$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} I_\alpha(x) = +\infty.$$

4. Soit $x > 0$.

(a) Montrer que, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{1} t^{2n} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt = \beta\left(\alpha+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\right).$$

(c) En déduire que

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xt)\, dt.$$

(d) Montrer que

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-xt} dt.$$

B- Étude de la solution K_α

Dans toute la suite, on pose :

$$K_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \int_1^{+\infty} \left(t^2-1\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-xt}dt, \text{ et}$$

$$F_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_1^{+\infty} e^{-xt}\left(t^2-1\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt.$$

1. (a) Montrer que F_α définit une application de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $F'_\alpha(x)$ et $F''_\alpha(x)$ à l'aide d'intégrales.

   (b) En déduire que F_α est solution de l'équation (E'_α) sur $]0,+\infty[$.

2. (a) En remarquant que F_α est décroissante sur $]0,+\infty[$, montrer que $\lim_{x\to 0^+} F_\alpha(x) = +\infty$.

   (b) En déduire que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{K_\alpha(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha} = +\infty$.

3. Montrer que (I_α, K_α) est un système fondamental de solutions de (E_α) sur $]0,+\infty[$. *On pourra utiliser le comportement de I_α et K_α en 0.*

Troisième partie : Une application

Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $H_p(x) = \int_0^\pi e^{x\cos(t)}\cos(pt)\,dt$.

1. Montrer que H_p définit une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'intégrales.

2. Soit $t\in\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $(\cos t)^k = \sum_{j=0}^{k} a_j\cos(jt)$, où $a_0,\dots,a_k\in\mathbb{R}$ avec $a_k = \frac{1}{2^{k-1}}$.

3. (a) Montrer que, pour tout $k\in\{0,\dots,p\}$,
$$H_p^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k<p, \\ \frac{\pi}{2^p} & \text{si } k=p. \end{cases}$$

   (b) En déduire que $H_p(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^p$.

4. Montrer que H_p est solution de l'équation (E_p) sur $]0,+\infty[$.

5. En déduire que, pour tout $x>0$, $I_p(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos(t)}\cos(pt)\,dt$.

6. Montrer que, pour tout $x>0$ et tout $t\in\mathbb{R}$,
$$e^{x\cos t} = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} I_n(x)\cos(nt).$$

7. Montrer que, pour tout $x>0$,
$$I_0(2x) = \left(I_0(x)\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(I_n(x)\right)^2.$$