Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session: 2013

Concours en Mathématiques Physique

Correction de l'Épreuve de Mathématiques I

Exercice: (21points)

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge et que la suite $(R_n(x))_{n\geq 0}$ de ses restes vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+2}.$$

Pour tout $x \geq 0$, la suite $\left(\frac{e^{-nx}}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers 0, donc d'après le critère des séries alternées, la série converge et son reste d'indice n vérifie l'inégalité demandée. (4)

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On pose $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ puisque la suite $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. Donc, d'après la théorème de continuité de la somme d'une série des fonctions, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$. (3)

3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

On a $\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Donc, en utilisant le théorème de la double limite pour les séries des fonctions, on obtient $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. (2)

4. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

On a (5)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

- La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n'(x)=(-1)^{n+1}\frac{ne^{-nx}}{n+1}$. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$ et $x\in[a,b]$,

$$|f_n'(x)|=\left|\frac{ne^{-nx}}{n+1}\right|\leq\frac{ne^{-na}}{n+1}\leq e^{-na}.$$

Comme $\sum_{n\geq} e^{-na}$ est convergente, donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de dérivation de la somme d'une série des fonctions, la fonction f est de classe C^1 et $\forall x>0$, $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{ne^{-nx}}{n+1}$.

(b) **Montrer que pour tout $x>0$,**

$$f'(x)-f(x)=-\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

(3)

Pour tout $x>0$, on a

$$f'(x)-f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{ne^{-nx}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx}=-\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

(c) **Déduire alors que, pour tout $x\geq 0$,**

$$f(x)=e^x\ln(1+e^{-x}).$$

(4)

Les solutions de l'équation différentielle homogène $y'-y=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme $y_H:\ x\longmapsto\lambda e^x,\quad \lambda\in\mathbb{R}$ et la fonction $x\longmapsto e^x\ln(1+e^{-x})$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'-y=-\frac{1}{1+e^{-x}},\qquad (E)$$

donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme $y(x)=\lambda e^x+e^x\ln(1+e^{-x})$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
Comme f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=0$, donc f correspond à la constante $\lambda=0$. Par continuité en 0, on obtient pour tout $x\geq 0$, $f(x)=e^x\ln(1+e^{-x})$.

Problème:

Partie I: (43 points)

1. (a) **Montrer que, pour tout $x>0$, $n\in\mathbb{N}^*$,**

$$\ln(f_{n+1}(x))-\ln(f_n(x))=x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right).$$

(3)

On a

$$\begin{aligned}
\ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x)) &= \ln\left(\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)!(n+1)^x}{n!n^x}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n+1)}\right) \\
&= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^x + \ln\left(\frac{n+1}{x+n+1}\right) \\
&= x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

(b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}(\ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x)))$ est convergente. (3)

On a $\forall x > 0$,
$x\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) = \frac{x}{n} + O(\frac{1}{n^2}) - \frac{x}{n+1} + O(\frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{x}{n(n+1)} + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$.
Comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{x}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum_{n\geq 1}(\ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x)))$ est convergente.

(c) En déduire que la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers une limite $f(x) \in]0, +\infty[$. (3)

La série $\sum_{n\geq 1}(\ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x)))$ est convergente, donc la suite $\left(S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(f_{k+1}(x) - f_k(x))\right)_n = (\ln f_{n+1}(x) - \ln f_1(x))_n$ est convergente donc la suite $(\ln f_n(x))_n$ est convergente vers une limite ℓ_x et par suite, la suite $(f_n(x))_n$ est convergente vers $e^{\ell_x} > 0$ qu'on note $f(x)$.

2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x+1) = xf(x)$. (2)

On a $f_n(x+1) = \dfrac{n!n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\cdots(x+1+n)} = \dfrac{nx}{n+1+x}f_n(x)$.
Par passage à la limite, on obtient $f(x+1) = xf(x)$.

(b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(p+1) = p!$. (2)

On a $f_n(1) = \dfrac{n!n}{(n+1)!} = \dfrac{n}{n+1}$, donc par passage à la limite, on obtient $f(1) = 1$. D'autre part, en utilisant $f(x+1) = xf(x)$, on aura $f(p+1) = p!f(1) = p!$.

3. Montrer que l'application $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement si, $x, y > 0$. (2)

L'application $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$ et $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$, donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement si, $1-x < 1$ et $1-y < 1$ donc si, et seulement si, $x > 0$ et $y > 0$.

4. (a) Soient $x, y > 0$ Montrer que

$$\beta(x,y) = \frac{x+y}{y}\beta(x,y+1).$$

(3)

Par intégration par parties, on a

$$\beta(x,y+1)=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt=\underbrace{\frac{1}{x}\left[t^x(1-t)^{y-1}\right]_{t\to0^+}^{t\to1^-}}_{=0}+\frac{y}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt=\frac{y}{x}\beta(x+1,y).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\beta(x,y+1) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}dt\\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt-\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt=\beta(x,y)-\beta(x+1,y).\end{aligned}$$

D'où $\beta(x,y+1)=\beta(x,y)-\frac{y}{x}\beta(x+1,y)$, donc $\beta(x,y)=\frac{x+y}{y}\beta(x,y+1)$.

(b) **Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,**

$$\beta(x,y)=\frac{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}\beta(x,y+n+1).$$

(3)

Par récurrence sur n.

La relation demandée est vraie pour $n=0$. Supposons que pour un certain n on a

$$\beta(x,y)=\frac{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}\beta(x,y+n+1).$$

D'après la question précédente, on a

$$\beta(x,y+n+1)=\frac{x+y+n+1}{y+n+1}\beta(x,y+n+2).$$

Ceci prouve que

$$\beta(x,y)=\frac{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+n)(x+y+n+1)}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)}\beta(x,y+n+2).$$

Ainsi, la relation est vérifiée pour $n+1$.

(c) **En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,**

$$\beta(x,y)=\frac{f_n(y)}{f_n(x+y)}\int_0^n u^{x-1}(1-\frac{u}{n})^{y+n}.$$

(3)

D'après la question précédente, on a,

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \frac{f_n(y)}{f_n(x+y)}\frac{n!n^{x+y}}{n!n^y}\beta(x,y+n+1)=\frac{f_n(y)}{f_n(x+y)}n^x\beta(x,y+n+1)\\ &= \frac{f_n(y)}{f_n(x+y)}n^x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y+n}dt \underset{t=\frac{u}{n}}{=} \frac{f_n(y)}{f_n(x+y)}\int_0^n u^{x-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{y+n}du.\end{aligned}$$

---

5. **En utilisant le théorème de la convergence dominée, montrer que pour tout $x,y>0$,**

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n u^{x-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{y+n}du=\Gamma(x)\text{ où }\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(4)

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(u)=\begin{cases}u^{x-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{y+n} & \text{si } u\in]0,n[,\\ 0 & \text{si } u\in[n,+\infty[.\end{cases}$

- L'application f_n est continue sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $u > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u \leq n$, donc $\forall n \geq n_0$, $f_n(u) = u^{x-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{y+n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u^{x-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{y+n} = u^{x-1}e^{-u}$, donc la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction $u \longmapsto u^{x-1}e^{-u}$.
- On a $\forall t \in]0,1[$, $\ln(1-t) \leq -t$, donc $\forall u \in]0,n[$, $\left(1-\frac{u}{n}\right)^{y+n} = e^{(y+n)\ln(1-\frac{u}{n})} \leq e^{n\ln(1-\frac{u}{n})} \leq e^{-u}$.
  Donc, pour tout $u > 0$, $0 \leq f_n(u) \leq \varphi(u) = u^{x-1}e^{-u}$.
  L'application φ est continue sur $]0,+\infty[$, de plus on a, $\varphi(u) \underset{u\to 0^+}{\sim} u^{x-1}$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2\varphi(u) = 0$, donc elle est intégrable sur $]0,+\infty[$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination et donc l'application du T.C.D aboutit au résultat.

---

6. Montrer alors que

$$\beta(x,y) = \frac{f(y)}{f(x+y)}\Gamma(x).$$

3

En faisant tendre n vers l'infini dans la question 4.(c) et en utilisant la question précédente, on obtient la relation demandée.

---

7. (a) Calculer $\beta(x,1)$. 2

Pour tout $x > 0$, $\beta(x,1) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}$.

(b) Montrer que

$$\text{(i) } \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \quad \text{(ii) } \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

4

(i) En appliquant la question 6. pour $y = 1$, et en utilisant les relations $f(1) = 1$, $f(x+1) = xf(x)$ et $\beta(x,1) = \frac{1}{x}$, on obtient $f(x) = \Gamma(x)$.

(ii) La relation demandée découle directement de la question 6. en remplaçant f par Γ.

(a) En utilisant le changement de variable $t = \sin^2\theta$, calculer $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 2

On a $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{(1-t)}}\,dt \underset{t=\sin^2\theta}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,d\theta = \pi$.

(b) En déduire que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

2

On a $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \dfrac{\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2}{\Gamma(1)} = \left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \pi$. Comme $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$, alors $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2p)!}{4^p p!}\sqrt{\pi}$.

2

Par récurrence sur p. Pour $p = 0$, la relation demandée est vérifiée d'après la question précédente.

Supposons que $\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2p)!}{4^p p!}\sqrt{\pi}$ pour un certain p dans $\mathbb{N}$.

$\Gamma(p+1+\frac{1}{2}) = (p+\frac{1}{2})\Gamma(p+\frac{1}{2}) = (p+\frac{1}{2})\dfrac{(2p)!}{4^p p!}\sqrt{\pi} = \dfrac{(2(p+1))!}{4^{p+1}(p+1)!}\sqrt{\pi}$.

Donc la relation est vraie pour l'ordre $p+1$.

Partie II: (23 points)

Question préliminaire

Montrer que φ est une solution de (E_α) sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, ψ est une solution de (E'_α).

On a ψ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\psi'(x) = \frac{x\varphi'(x) - \alpha\varphi(x)}{x^{\alpha+1}} \quad \text{et} \quad \psi''(x) = \frac{x^2\varphi''(x) - 2\alpha x\varphi'(x) + \alpha(\alpha+1)\varphi(x)}{x^{\alpha+2}}.$$

On a

$$x\psi''(x) + (2\alpha+1)\psi'(x) - x\psi(x) = x^{-\alpha-1}\Big(x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x) - (x^2+\alpha^2)\varphi(x)\Big).$$

Donc φ est une solution de (E_α) si, et seulement si, ψ est une solution de (E'_α) sur $]0,+\infty[$. (2)

Partie A

1. ~~Montrer que S est solution de~~ (E'_α) sur $]-R,R[$ si, et seulement si, $a_1 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+2+2\alpha)}.$$

(1)

L'application S est de classe C^2 sur $]-R,R[$ et on a,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
xS''(x) + (2\alpha+1)S'(x) - xS(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + (2\alpha+1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + (2\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \\
&= (2\alpha+1)a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+1)(n+1+2\alpha)a_{n+1} - a_{n-1}\Big]x^n.
\end{aligned}$$

Donc S est solution de (E'_α) sur $]-R,R[$ si, et seulement si, $a_1 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+1+2\alpha)}$ si, et seulement si, $a_1 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+2+2\alpha)}$.

2. (a) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4^n n!\Gamma(\alpha+n+1)}$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$. (1)

Soit $U_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{4^n n!\Gamma(\alpha+n+1)}$.

Pour $x \neq 0$, $\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \dfrac{x^2\Gamma(\alpha+n+1)}{4(n+1)\Gamma(\alpha+n+2)} = \dfrac{x^2}{4(n+1)(\alpha+n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc, $R = +\infty$.

(b) Montrer que

$$I_\alpha :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n!\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

est une solution de (E_α) sur $]0,+\infty[$. ②

On pose $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n!\Gamma(\alpha+n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $b_n = \begin{cases} \frac{1}{4^p p!\Gamma(\alpha+p+1)} & \text{si} \quad n=2p \\ 0 & \text{si} \quad n=2p+1. \end{cases}$

On a $b_1 = 0$ et

$$
\begin{aligned}
b_{n+2} &= \begin{cases} \frac{1}{4^{p+1}(p+1)!\Gamma(\alpha+p+2)} & \text{si} \quad n=2p \\ 0 & \text{si} \quad n=2p+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{(2p+2)(2\alpha+2p+2)} \frac{1}{4^p p!\Gamma(\alpha+p+1)} & \text{si} \quad n=2p \\ 0 & \text{si} \quad n=2p+1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+2+2\alpha)} b_n
\end{aligned}
$$

Donc, d'après la question (1) de cette partie, la fonction B est solution de (E'_α) sur $\mathbb{R}$ et par suite la fonction $x \longmapsto x^\alpha B(x)$ est solution de (E_α) sur $]0,+\infty[$ donc $x \longmapsto \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha B(x)$ est solution de (E_α) sur $]0,+\infty[$.

---

3. Montrer que

$$\text{(a) } I_\alpha(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \quad \text{et} \quad \text{(b) } \lim_{x\to+\infty} I_\alpha(x) = +\infty.$$

②

(a) Pour $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n!\Gamma(\alpha+n+1)}$, on a $B(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$ donc, $I_\alpha(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha$.

(b) Puisque $\forall n \geq 0$, $\frac{1}{4^n n!\Gamma(\alpha+n+1)} > 0$, donc

$I_\alpha(x) > \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^2}{4\Gamma(\alpha+2)}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. D'où $\lim_{x\to+\infty} I_\alpha(x) = +\infty$.

---

4. (a) Montrer que pour tout $t \in]-1,1[$,

$$(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} t^{2n}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

①

On sait que $\forall u \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!}$. Donc $\forall t \in]-1,1[, x \in \mathbb{R}_+^*$.

$(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(xt) = (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} t^{2n}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$.

(b) Montrer que, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\int_{-1}^{1} t^{2n}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt = \beta(\alpha+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}).$$

②

La fonction $t \longmapsto t^{2n}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ est paire sur $]-1,1[$. Donc

$\int_{-1}^{1} t^{2n}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \underset{\text{parité}}{=} 2\int_0^1 t^{2n}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt \underset{u=t^2}{=} \int_0^1 u^{n-\frac{1}{2}}(1-u)^{\alpha-\frac{1}{2}} dt = \beta\left(\alpha+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)$.

(c) En déduire que

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xt) dt.$$

(3)

Pour tout $x > 0$, $\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(xt)dt = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}dt = \int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)dt$

avec $f_n(t) = \frac{(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}(xt)^{2n}}{(2n)!}$, $t \in]-1,1[$.

- La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ et de somme $f(t) = (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(xt)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, \forall t \in]-1,1[, f_n(t) \geq 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]-1,1[$ car elle est continue sur $]-1,1[$.

  $f_n(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{x^{2n}2^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(2n)!(1-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}}$: intégrable sur $]-1,0[$ puisque $\frac{1}{2}-\alpha < 1$ et de même,

  $f_n(t) \underset{t\to -1^+}{\sim} \frac{x^{2n}2^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(2n)!(1+t)^{\frac{1}{2}-\alpha}}$.
- La fonction f est intégrable sur $]-1,1[$ car elle est continue sur $]-1,1[$ et

  $f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{2^{\alpha-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(x)}{(1-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}}$ et $f(t) \underset{t\to -1^+}{\sim} \frac{2^{\alpha-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(-x)}{(1+t)^{\frac{1}{2}-\alpha}}$.

Donc, en permutant somme et intégrale, on obtient la relation demandée.

---

5. **Montrer que**

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-xt}dt.$$

(1)

On a,

$$\begin{aligned}
I_\alpha(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(xt)dt\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\left(\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-xt}dt + \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{xt}dt\right)\\
&\underset{u=-t}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\left(\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-xt}dt + \int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-xu}du\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-xt}dt.
\end{aligned}$$

Partie B

1. (a) **Montrer que F_α définit une application de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $F_\alpha'(x)$ et $F_\alpha''(x)$ à l'aide des intégrales.**

(2)

On pose $G_\alpha : A =]0,+\infty[\times]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \longmapsto e^{-xt}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}$. On a

- L'application G_α est continue sur A et les fonctions $\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur A et on a

$$\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}(x,t) = -tG_\alpha(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x^2}(x,t) = t^2G_\alpha(x,t).$$

- Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]0,+\infty[$, $x \in [a,b]$ et $t \geq 1$, on a

  $|G_\alpha(x,t)| \leq \varphi_0(t) = e^{-at}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}$, $\left|\frac{\partial G_\alpha}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_1(t) = t\varphi_0(t)$

  et $\left|\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \varphi_2(t) = t^2\varphi_0(t)$.

– Les fonctions φ_0, φ_1 et φ_2 sont continues sur $]1,+\infty[$ et intégrables sur $]1,+\infty[$ car on a,

$$\varphi_k(t) \underset{t\mapsto 1^+}{\sim} \frac{e^{-a}2^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(t-1)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \quad \text{et} \quad \lim_{t\mapsto+\infty} t^2\varphi_k(t) = \lim_{t\mapsto+\infty} t^{2\alpha+1+k}e^{-at} = 0, \quad k = 0,1,2.$$

Donc la fonction F_α est de classe C^2 sur $]1,-\infty[$ et on a

$$F'_\alpha(x) = -\int_1^{+\infty} te^{-xt}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt \text{ et } F''_\alpha(x) = \int_1^{+\infty} t^2e^{-xt}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt.$$

(b) **En déduire que F_α est solution de l'équation (E'_α) sur $]0,+\infty[$.** ②

On a $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}
F'_\alpha(x) &= -\int_1^{+\infty} e^{-xt}t(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt \\
&\underset{\text{I.P.P.}}{=} \underbrace{\frac{-1}{2\alpha+1}\left[(t^2-1)^{\alpha+\frac{1}{2}}e^{-xt}\right]_{t\mapsto 1^-}^{+\infty}}_{=0} - \frac{x}{2\alpha+1}\int_1^{+\infty} e^{-xt}t(t^2-1)^{\alpha+\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{-x}{2\alpha+1}\int_1^{+\infty}(t^2-1)e^{-xt}t(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{-x}{2\alpha+1}\left(\int_1^{+\infty} t^2e^{-xt}t(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt - \int_1^{+\infty} -te^{-xt}t(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt\right) \\
&= \frac{x}{2\alpha+1}\left(F_\alpha(x) - F''(x)\right).
\end{aligned}$$

Donc F_α est solution de l'équation (E'_α) sur $]0,+\infty[$.

2. (a) **En remarquant que F_α est décroissante sur $]0,+\infty[$, montrer que $\lim_{x\mapsto 0^+} F_\alpha(x) = +\infty$.** ②

On a $\forall x > 0$, $F'_\alpha(x) = -\int_1^{+\infty} te^{-xt}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt < 0$, donc F_α est décroissante, donc elle admet une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$.
Soit $X > 2$. Pour tout $x > 0$,

$$F_\alpha(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt \geq \int_2^X e^{-xt}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt.$$

L'application $x \longmapsto \int_2^X e^{-xt}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt$ est continue sur $[0,+\infty[$ puisque l'application $(x,t) \longmapsto e^{-xt}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ l'est sur $[0,+\infty[\times[2,X]$.
En passant à la limite quand $x \mapsto 0^+$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\ell \geq \lim_{x\mapsto 0^+}\int_2^X e^{-xt}(t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt = \int_2^X (t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

puisque l'application
$t \longmapsto (t^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ est non intégrable sur $[2,+\infty[$. D'où $\ell = +\infty$

(b) **En déduire que $\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{K_\alpha(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha} = +\infty$.** ①

On a $\lim_{x\mapsto 0^+} F_\alpha(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{K_\alpha(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha} = \lim_{x\mapsto 0^+} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}F_\alpha(x) = +\infty.$

3. **Montrer que (I_α, K_α) est un système fondamental des solutions de (E_α) sur $]0,+\infty[$. (On pourra utiliser le comportement de I_α et de K_α en 0).** ①

- Puisque F_α est solution de l'équation (E'_α) sur $]0,+\infty[$, alors K_α est une solution (E_α) sur $]0,+\infty[$.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que $\lambda I_\alpha + \mu K_\alpha = 0$, alors $\forall x > 0$, $\lambda \dfrac{I_\alpha(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha} = -\mu \dfrac{K_\alpha(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha}$.

  En faisant tendre x vers 0 par valeurs supérieures et en utilisant les questions 3.(a) de la partie A et 2.(b) de la partie B, on obtient μ, et donc λ, égale à 0.
- Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation (E_α) est équivalente à l'équation $y'' + \frac{1}{x}y' - (1 + \frac{\alpha^2}{x^2}) = 0$ dont l'ensemble des solutions sur $]0,+\infty[$ est un espace vectoriel de dimension 2.

On conclut que (I_α, K_α) est un système fondamental des solutions de (E_α) sur $]0,+\infty[$.

Partie III:

1. **Montrer H_p définit une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.** ②

Soit $L_p : \mathbb{R} \times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \longmapsto e^{x\cos(t)}\cos(pt)$.
L'application L_p est continue sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$ et admet des dérivées partielles à tout ordre par rapport à x, continues sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$ et on a, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k L_p}{\partial x^k}(x,t) = (\cos(t))^k L_p(x,t).$$

Donc H_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$H_p^{(k)}(x) = \int_0^\pi (\cos t)^k e^{x\cos t}\cos(pt)dt.$$

2. **Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(\cos t)^k = \sum_{j=0}^{k} a_j \cos(jt)$, où $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ avec $a_k = \frac{1}{2^{k-1}}$.** ②

Par récurrence sur k.
Pour $k = 1$, on prend $a_0 = 0$ et $a_1 = 1 = \dfrac{1}{2^{1-1}}$.
Pour $k = 2$, $\cos^2(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos(2t)}{2}$, on prend $a_0 = \dfrac{1}{2}$, $a_1 = 0$ et $a_2 = \dfrac{1}{2}$.
Supposons que la relation est vraie pour un certain ordre $k \geq 2$,

$$(\cos t)^k = \sum_{j=0}^{k} a_j \cos(jt), \text{ avec } a_k = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

$$\begin{aligned}
(\cos t)^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k} a_j \cos(jt)\cos t \\
&= a_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} a_j \left(\cos((j+1)t) + \cos((j-1)t)\right) \\
&= a_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k+1} a_{j-1}\cos(jt) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1} a_{j+1}\cos(jt) \\
&= a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2\cos(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k-1}(a_{j-1}+a_{j+1})\cos(jt) + \frac{1}{2}a_{k-1}\cos(kt) + \frac{1}{2}a_k\cos((k+1)t) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} b_j \cos(jt),
\end{aligned}$$

avec $b_0 = a_0 + \frac{1}{2}a_1$, $b_1 = \frac{1}{2}a_2$, $b_j = \frac{1}{2}(a_{j-1}+a_{j+1})$ pour $2 \le j \le k-1$, $b_k = \frac{1}{2}a_{k-1}$ et $b_{k+1} = \frac{1}{2}a_k = \frac{1}{2^k}$.

Donc la relation est vérifiée pour $k+1$.

3. (a) Montrer que pour tout $k \in \{0,\dots,p\}$, $H_p^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < p \\ \frac{\pi}{p!} & \text{si } k = p \end{cases}$ (2)

Pour $p = 0$, on a $H_0(0) = \pi$.

On suppose que $p \neq 0$. Soit $k \in \{0,\dots p\}$. D'après le deux questions précédentes,

$$H_p^{(k)}(0) = \int_0^{\pi} (\cos t)^k \cos(pt)dt = \int_0^{\pi} \sum_{j=0}^{k} a_j \cos(jt)\cos(pt)dt = \sum_{j=0}^{k} a_j \int_0^{\pi} \cos(jt)\cos(pt)dt.$$

Or $\int_0^{\pi} \cos(jt)\cos(pt)dt = \int_0^{\pi} (\cos(j+p)t) + \cos((p-j)t))\,dt = 0$ si $j \neq p$

et $\int_0^{\pi} \cos^2(pt)dt = \frac{\pi}{2}$.

Donc, $H_p^{(k)}(0) = 0$ si $p < k$ et $H_p^{(p)}(0) = a_p \int_0^{\pi} \cos^2(pt)dt = \frac{1}{2^{p-1}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^p}$.

(b) En déduire que $H_p(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^p$. (2)

L'application est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On écrit la formule de Taylor-Young à H_p à l'ordre p au point 0.

$$H_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{H_p^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^p) = \frac{H_p^{(p)}(0)}{p!}x^p + o(x^p) = \frac{\pi}{p!2^p}x^p + o(x^p) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^p.$$

4. Montrer que H_p est solution de l'équation (E_p) sur $]0,+\infty[$. (2)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x^2 H_p''(x) &= x^2 \int_0^\pi \cos^2 t \, e^{x\cos t} \cos(pt)dt \\
&= x^2 \int_0^\pi e^{x\cos t}\cos(pt)dt - x^2 \int_0^\pi \sin^2 t \, e^{x\cos t}\cos(pt)\,dt \\
&\underset{\text{I.P.P.}}{=} x^2 H_p(x) - x\int_0^\pi (x\sin t\, e^{x\cos t})\,(\sin t\,\cos(pt))dt \\
&= x^2 H_p(x) - \underbrace{x\left[-e^{x\cos t}\sin t\,\cos(pt)\right]_0^\pi}_{=0} - x\int_0^\pi e^{x\cos t}\,(\cos t\cos(pt) - p\sin t\sin pt)\,dt \\
&= x^2 H_p(x) - xH_p'(x) + p\int_0^\pi (x\sin t\, e^{x\cos t})\,(\sin(pt))\,dt \\
&\underset{\text{I.P.P.}}{=} x^2 H_p(x) - xH_p'(x) + \underbrace{p\left[-e^{x\cos t}\sin(pt)\right]_0^\pi}_{=0} + p^2\int_0^\pi e^{x\cos t}\cos(pt)dt \\
&= (x^2+p^2)H_p(x) - xH_p'(x)
\end{aligned}$$

Donc, H_p est une solution de (E_p) sur $]0, +\infty[$.

---

5. **En déduire que, pour tout $x > 0$, $I_p(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{x\cos t}\cos(pt)dt$.** (1)

L'application H_p est une solution de (E_p) sur $]0, +\infty[$, donc, d'après la question 3-Partie II-B, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $H_p(x) = aI_p(x) + bK_p(x)$.
Donc, en divisant par $\left(\dfrac{x}{2}\right)^p$ et en utilisant les questions 2.(b)-Partie I, 3.(a)-Partie II-A, 2.(b)-Partie II-B et 3.(b)-Partie III. on obtient. $a = \dfrac{1}{\pi}$ et $b = 0$. D'où $I_p = \dfrac{1}{\pi}H_p$ sur $]0, +\infty[$.

---

6. **Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$,**

$$e^{x\cos t} = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} I_n(x)\cos(nt)dt.$$

(1)

Soit $x > 0$, on pose $g(t) = e^{x\cos t}$, l'application g est continue 2π-périodique et paire sur $\mathbb{R}$. donc les coefficients de Fourier trigonométriques de g sont donnés par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n(g) = 0 \text{ et } a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos t}\cos(nt)\,dt = 2I_n(x).$$

Comme g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sa série de Fourier converge vers g sur $\mathbb{R}$. donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = e^{x\cos t} = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\cos nt = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} I_n(x)\cos nt.$$

---

7. **Montrer que, pour tout $x > 0$,**

$$I_0(2x) = (I_0(x))^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(I_n(x))^2.$$

(1)

Soit $x > 0$. On applique la formule de Parseval à l'application $g : t \mapsto e^{x\cos t}$, on obtient,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^2(t)dt &= \frac{(a_0(g))^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(g))^2 \\
&= (I_0(x))^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(I_n(x))^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g^2(t)dt \underset{\text{parité}}{=} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g^2(t)dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{2x\cos t}\,dt = I_0(2x)$.
Donc, on obtient,

$$\forall x > 0, \quad I_0(2x) = (I_0(x))^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(I_n(x))^2.$$