REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2013

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2013

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Date: Samedi 8 Juin 2013	Heure : 8 H	Durée: 3 heures	Nb pages: 5
Barème:			

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Problème

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{C}$−espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E et f est un élément de $\mathcal{L}(E)$.

Notations et Définitions

On note par:

- E^* l'espace dual de E.
- id_E l'endomorphisme identité de E.
- $f^0 = id_E$ et $f^{k+1} = f \circ f^k$.
- $\mathbb{C}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- $\deg(P)$ le degré d'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$.
- $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre p (où $p \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- $J_p(\lambda)$ l'élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ défini par:

$$J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où $(\lambda, p) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on note par:
  - ⋆ $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(u)$ (resp. $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(M)$) l'ensemble des valeurs propres de u (resp. M) dans $\mathbb{C}$.
  - ⋆ $E_\lambda(u)$ le sous espace propre de u associé à la valeur propre $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(u)$.
  - ⋆ P_u le polynôme caractéristique de u défini par $P_u(X) = \det(u - Xid_E)$.
  - ⋆ Un endomorphisme u (resp. une matrice M) est dit nilpotent (resp. dite nilpotente) s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (resp. $M^p = 0$).
  - ⋆ L'entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^r = 0$ (resp. $M^r = 0$) et $u^{r-1} \neq 0$ (resp. $M^{r-1} \neq 0$) est appelé indice de nilpotence de u (resp. de M).
  - ⋆ Si u est un endomorphisme et P_u son polynôme caractéristique, alors $P_u(u) = 0$ (Théorème de Cayley-Hamilton).
  - ⋆ Si u est un endomorphisme nilpotent de E, alors $P_u(X) = (-X)^n$.

I- Polynôme minimal d'un endomorphisme

Posons

$$A = \{P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\} \text{ tel que } P(f) = 0\},$$

$$\mathcal{I} = \{\deg(P) \text{ tel que } P \in A\}.$$

1. Vérifier que l'ensemble A est non vide.
2. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{I}$ admet un plus petit élément appartenant à $\mathbb{N}^*$. Dans la suite de cette partie, on note $r = \min(\mathcal{I})$.
3. Soit $Q \in A$ de degré r. Posons $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_rX^r$ où $(a_r \neq 0)$ et $\Pi_f(X) = \dfrac{1}{a_r}Q(X)$.
   (a) Vérifier que $\Pi_f \in A$ et que $\deg(\Pi_f) = r$.
   (b) Soit $S \in A$. Montrer que Π_f divise S.
   (c) En déduire que Π_f est l'unique polynôme unitaire de A de degré r. (Π_f est appelé le polynôme minimal de f).
   (d) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si Π_f est scindé à racines simples.
   (e) Soit λ est une valeur propre de f et u un vecteur propre de f associé à λ.
      i. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(u) = \lambda^k u$.
      ii. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a:
      $$P(f)(u) = P(\lambda)u.$$
   (f) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que λ est une valeur propre de f si et seulement si $\Pi_f(\lambda) = 0$.
   (g) <u>Exemple:</u> Dans cet exemple, on prend $E = \mathbb{C}^3$ et f l'élément de $\mathcal{L}(E)$ canoniquement associé à
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3-\beta & 4 & \beta \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ où β est un nombre complexe quelconque.
      i. Déterminer P_f.
      ii. Déterminer Π_f (on pourra discuter selon la valeur de β).

II- Décomposition de E en somme directe

Dans cette partie on suppose que f est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence r $(0 < r \leqslant n)$. Soit $a \in E$ tel que $f^{r-1}(a) \neq 0$.

1. Montrer que $\Pi_f(X) = X^r$.
2. Montrer que la famille $\big(a, f(a), \dots, f^{r-1}(a)\big)$ est libre de E.
3. Soit H un hyperplan de E ne contenant pas $f^{r-1}(a)$ et $\varphi \in E^*$ tel que $H = \ker\varphi$.

   Posons $L = \bigcap_{k=0}^{r-1} \ker(\varphi \circ f^k)$ et $K = \mathrm{Vect}\big(a, f(a), \dots, f^{r-1}(a)\big)$ le sous espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $a, f(a), \dots$ et $f^{r-1}(a)$.

   (a) Montrer que $\varphi\big(f^{r-1}(a)\big) \neq 0$.

   (b) Posons $\varphi_k = \varphi \circ f^k$. Calculer $\varphi_k\big(f^{r-k-1}(a)\big)$, pour tout $0 \leqslant k \leqslant r-1$.

   (c) En déduire que $\ker(\varphi_k)$ est un hyperplan de E.

   (d) Montrer que L est un sous espace vectoriel de E de dimension supérieure ou égale à $n - r$.

   (e) Montrer que $K \cap L = \{0\}$.

   (f) En déduire de ce qui précède que $E = K \bigoplus L$.

   (g) Montrer que K et L sont stables par f.

III- Réduction de Jordan

Définition: Pour tout $\mathbb{C}$−espace vectoriel V de dimension finie $l \in \mathbb{N}^*$ et pour tout endomorphisme $g \in \mathcal{L}(V)$, un sous espace vectoriel W de V est dit g-**indécomposable** si et seulement si:

- W stable par g.
- Il n'existe pas de décomposition $W = W_1 \bigoplus W_2$ avec W_1 , W_2 stables par g et $W_1 \neq \{0\}$, $W_2 \neq \{0\}$.

A- Préliminaire

Soit F un sous espace vectoriel de E stable par f. On note par $\widetilde{f}$ l'induit par f sur F.

1. Soit G est un sous espace vectoriel de F. Montrer G est $\widetilde{f}$-indécomposable si et seulement si G est f-indécomposable.
2. On suppose que f est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence n. Montrer que E est f-indécomposable.

B- Étude du cas d'un sous espace f-indécomposable

Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$ qui est f-indécomposable. On note par $\widetilde{f}$ l'induit par f sur F.

1. On suppose que $\Pi_{\widetilde{f}} = A \cdot B$ avec A et B sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux. Montrer que A ou B est un polynôme constant.

2. (a) Montrer qu'ils existent $\lambda \in \mathbb{C}$ et $0 < r \leqslant m$ tels que $\Pi_{\widetilde{f}}(X) = (X - \lambda)^r$.
   (b) Soit $h = \widetilde{f} - \lambda id_F$. Montrer que $h^r = 0$.
   (c) En utilisant la question **II−3**, montrer que $r = m$.
   (d) En déduire l'existence de $a \in F$ tel que $\mathcal{B} = \left(h^{m-1}(a), h^{m-2}(a), \ldots, a\right)$ soit une base de F.
   (e) Montrer que la matrice de $\widetilde{f}$ dans $\mathcal{B}$ est égale à $J_m(\lambda)$.

C- Décomposition de E en somme directe de sous espaces f-indécomposables

Dans cette partie on suppose que $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\}$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, m_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i de f (c'est à dire $P_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{q}(X - \lambda_i)^{m_i}$). On note par $F_i = \ker(f - \lambda_i id_E)^{m_i}$, f_i **l'induit** par f sur F_i et $h_i = f_i - \lambda_i id_{F_i}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$.

1. (a) Montrer, pour tout $1 \leq i \leq q$, que F_i est stable par f.
   (b) Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$.

2. Soit $1 \leq i \leq q$.
   (a) Montrer que h_i est nilpotent.
   (b) En déduire que $P_{f_i}(X) = (\lambda_i - X)^{\dim F_i}$.
   (c) Montrer que $\dim F_i = m_i$.

3. (a) On suppose dans cette question que l'indice de nilpotence de h_1 est égal à m_1.
      i. Montrer que F_1 est h_1-indécomposable.
      ii. En déduire que F_1 est f-indécomposable.
   (b) Dans cette question on suppose que l'indice de nilpotence de h_1 est inférieur strictement à m_1. Montrer que $F_1 = K_1 \bigoplus L_1$ avec K_1 f-indécomposable et L_1 est un sous espace vectoriel de E stable par f.

4. Montrer par récurrence sur n que $E = \bigoplus_{i=1}^{s} H_i$, avec H_i f-indécomposable, pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$.

5. En déduire l'existence d'une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale par blocs de la forme

$$J = \begin{pmatrix} J_{\alpha_1}(\beta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{\alpha_s}(\beta_s) \end{pmatrix}.$$

6. Vérifier, pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$, que β_i est une valeur propre de f.

IV- Application

Dans cette partie, on prend $E = \mathbb{C}^n$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.

1. Supposons que M et $2M$ soient semblables.
   (a) Montrer que si $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(M)$ alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $2^p\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(M)$.
   (b) En déduire que M est nilpotente.
2. Supposons que M est nilpotente.
   (a) Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de f dans cette base est :
   $$\begin{pmatrix} 0 & v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & v_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & v_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
   où $v_i \in \{0, 1\}$, pour tout $1 \leq i \leq n-1$.
   (b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, 2e_2, \dots, 2^{n-2}e_{n-1}, 2^{n-1}e_n)$.
3. En déduire de ce qui précède que M et $2M$ sont semblables si et seulement si M est nilpotente.