Problème

I- Polynôme minimal d'un endomorphisme

Dans cette partie, f désigne un élément quelconque de $\mathcal{L}(E)$ et $A = \{P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} : \ P(f) = 0\}$.

1) $A \neq \emptyset$ car $P_f \in A$ et $\deg(P_f) = n$; $\mathcal{I} \neq \emptyset$ car $n \in \mathcal{I}$; $\mathcal{I}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide minorée par zéro donc amet un plus petit élément noté $r \in \mathbb{N}$; si $r = 0$ alors il existe $P = c$ polynome constante non identiquement nulle vérifiant $P(f) = 0$ soit $ci_E = 0$ donc $c = 0$ impossible d'où $r \in \mathbb{N}^*$.

2) a) $\Pi_f(f) = \frac{1}{a_r}Q(f) = 0$; $\deg(\Pi_f) = \deg(Q) = r$.

b) $S \in A$; la division euclidienne de S par Π_f donne $S = Q_1\Pi_f + R$ avec $\deg(R) < \deg(\Pi_f)$ or $S(f) = Q_1(f)\Pi_f(f) + R(f) = 0$ donc $R(f) = 0$ Comme $\deg(R) < r$ par minimalité de r $R \neq A$ donc $R = 0$ ce qui donne $S = Q_1\Pi_f$ ou encore Π_f divise S.

c) Existence Π_f de assurée; l'unicité de Π_f; soit $S \in A$; de $\deg(S) = r$ et Sunitaire d'après b) S divise Π_f et comme ils ont meme degré et sont unitaire on a $S = \Pi_f$.

d) "$\Rightarrow$" f diagonalisable donc f est annulé par un polynome scindé à racines simples Q or π_f divise Q donc Π_f est scindé à racines simples.
"$\Leftarrow$" si Π_f scindé à racines simples; comme $\Pi_f(f) = 0$ alors f est diagonalisable.

e) i) par recurrence sur k.
ii) évident.

f) "$\Rightarrow$" λ vp de $f \Rightarrow$ il existe $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u \Rightarrow \pi_f(u) = \pi_f(\lambda)u \Rightarrow 0 = \pi_f(\lambda)u \Rightarrow \pi_f(\lambda) = 0$
"$\Leftarrow$" $\pi_f(\lambda) = 0$ et $\pi_f | P_f \Rightarrow P_f(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ valeur propre.

g) <u>Exemple:</u>

i) $P_f = P_A = (1 - X)(2 - X)^2$.

ii) On a Π_f unitaire, divise P_f et {racines de Π_f} $= \{1, 2\}$, donc $\Pi_f(X) = (X-1)(X-2)$ ou $\Pi_f(X) = (X-1)(X-2)^2$; on a $\Pi_f(X) = (X-1)(X-2)$ si et seulement si f est diagonalisable. En conclusion si $\beta = -1$ alors $\Pi_f(X) = (X-1)(X-2)$ et si $\beta \neq -1$ alors $\Pi_f(X) = (X-1)(X-2)^2$

II- Décomposition de E en somme directe

1) $P_f(X) = (-X)^n$ comme Π_f divise P_f et Π_f est unitaire alors $\Pi_f(X) = X^\beta$ avec $0 < \beta \leq n$ et comme $f^r = 0$ et $f^{r-1} \neq 0$ donc $\Pi_f(X) = X^r$.

2) Classique.

3) a) si $\varphi(f^{r-1}(a)) = 0$ alors $\varphi = 0 \Rightarrow H = E$ impossible.

b) $\varphi_k(f^{r-k-1}(a)) = \varphi(f^{r-1}(a)) \neq 0$.

c) φ_k est unev forme linéaire non nulle donc $\ker\varphi_k$ est un hyperplan.

d) L est l'intersection des hyperplans donc $\dim L \geq n - r$.

Maths II

e) Soit $x \in K \bigcap L$ on a $x = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_i f^k(a)$ (*)

$x \in L \Rightarrow \varphi \circ f^{r-1}(x) = 0 \Rightarrow \alpha_0 \varphi(f^{r-1}(a)) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$ et (*) devient $x = \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_i f^k(a)$ comme

$x \in L \Rightarrow \varphi \circ f^{r-2}(x) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ par itération, on aurra $x = 0$.

f) $\dim(K + L) = \dim(K) + \dim(L) \quad (K \bigcap L = \{0\}) \geq r + n - r$ d'où le résultat.

g)

h) K stable par f (évident).

i) Soit $x \in L$ et $0 \leq k \leq r-1$ on a $\varphi \circ f^k(f(x)) = \varphi \circ f^{k+1}(x) = \begin{cases} \varphi(0) = 0, & \text{si } k = r-1 \\ \varphi \circ f^{k+1}(x) = 0, & \text{si } k \leq r-2 \end{cases}$

III- Réduction de Jordan

A- Préliminaire

1) " $\Rightarrow$ " G est $\widetilde{f}$-indécomposable $\Rightarrow$ G stable par *widetildef* et donc G stable par f.
Soit $G = G_1 \bigoplus G_2$ avec G_1 et G_2 stables par f, comme G_1, G_2 sont inclus dans F alors G_1 et G_2 stables par *widetildef* or G est $\widetilde{f}$-indécomposable $\Rightarrow G_1 = \{0\}$ ou $G_2 = \{0\}$.
" $\Leftarrow$ " G est f- indécomposable, G est stable par f et $G \subset F \Rightarrow G$ est stable par *widetildef*.
si $G = G_1 \bigoplus G_2$ avec G_1 , G_2 sont stable par *widetildef* alors G_1 , G_2 sont stable par f et donc $G_1 = \{0\}$ ou $G_2 = \{0\}$.

2)
- E stable par f
- $E = E_1 \bigoplus E_2$

Soit f_1 (resp f_2) l'induit par f sur F_1 (resp. F_2) f_1 (resp. f_2) nilpotent donc $f_1^{\dim F_1} = 0$ (resp. $f_2^{\dim F_2} = 0) \Rightarrow f^{\max(\dim F_1, \dim F_2)} = 0 \Rightarrow n \leq \max(\dim F_1, \dim F_2) \leq n \Rightarrow \dim F_1 = n$ ou $\dim F_2 = n$ $\Rightarrow F_1 = \{0\}$ ou $F_2 = \{0\}$.

B- Etude du cas d'un sous espace f- indécomposable

1) $\Pi_{\widetilde{f}} = AB$, d'après le lemme de décomposition de noyeaux on a $\ker A(\widetilde{f}) \bigoplus \ker B(\widetilde{f}) = F$, comme $\ker A(\widetilde{f})$ et $\ker B(\widetilde{f})$ sont stable par *widetildef* et que F est *widetildef*- indécomposable donc *widetildef*- indécomposable alors $\ker A(\widetilde{f}) = \{0\}$ ou $\ker B(\widetilde{f}) = \{0\}$ soit $\ker A(\widetilde{f}) = F$ ou $\ker B(\widetilde{f}) = F$ par suite $A(\widetilde{f}) = 0$ ou $B(\widetilde{f}) = 0$ ce qui donne A est constant ou B est constant.

2) a) $\Pi_{\widetilde{f}}$ unitaire admettant une seule racine de degré inférieur ou égal à m donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $0 < r \leq m$ tels que $\Pi_{\widetilde{f}}(X) = (X - \lambda)^r$.

b) Soit $h = \widetilde{f} - \lambda id_F$, $h \in \mathcal{L}(F)$ pour tout $x \in F$ on a $h^r(x) = (\widetilde{f} - \lambda id_F)^r(x) = \Pi_{\widetilde{f}}(\widetilde{f})(x) = 0$.

c) On a $h \in \mathcal{L}(F)$, $h^r = 0$ et $\dim F = m$ avec $1 \leq r \leq m$ si $r < m$ d'après la question II)3), $F = F_1 \bigoplus G_1$ avec F_1 et G_1 sont stable par h (donc stable par $\widetilde{f}$) et $F_1 \neq \{0\}$, $G_1 \neq \{0\}$ ce qui contredit le faite que F est $\widetilde{f}$-indécomposable d'où $r = m$.

Maths II

d) Comme $h^m = 0$, il existe $a \in F$ tel que $\left(a, h(a), \dots, h^{m-1}(a)\right)$ libre de F et comme $\dim F = m$ donc $\left(a, h(a), \dots, h^{m-1}(a)\right)$ est une base de F. Soit $\mathcal{B} = \left(h^{m-1}(a), h^{m-2}(a), \dots, a\right)$ une base de F.

e) La matrice de $\widetilde{f}$ dans $\mathcal{B}$ est égale à $J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

C- Décomposition de E en somme directe de sous espaces f- indécomposables

1) a) On a $F_i = \ker(f - \lambda_i id_E)^{m_i} = \ker\left((X-\lambda_i)^{m_i}(f)\right)$ donc stable par f pour tout $1 \le i \le q$.

b) Le lemme de décomposition des noyaux donne $E = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$.

2) Soit $1 \le i \le q$.

a) Pour tout $x \in F_i$ on a $h_i^{m_i}(x) = (f_i - \lambda_i id_{F_i})^{m_i}(x) = 0$ donc $h_i^{m_i} = 0$ d'où h_i est nilpotent.

b) On a $h_i \in \mathcal{L}(F_i)$ nilpotent donc $P_{h_i}(X) = (-X)^{\dim F_i} = \det(f_i - \lambda_i id_{F_i} - X id_{F_i}) = \det(f_i - (\lambda_i + X) id_{F_i})$ soit $P_{f_i}(\lambda_i + X) = (-X)^{\dim F_i}$ d'où $P_{f_i}(X) = (\lambda_i - X)^{\dim F_i}$.

c) On a P_{f_i} divise P_f c'est à dire $(\lambda_i - X)^{\dim F_i}$ divise $\prod_{j=1}^{q} (\lambda_i - X)^{m_i}$ donc $\dim F_i \le m_i$ pour tout $1 \le i \le q$ or $\sum_{i=1}^{q} \dim F_i = \sum_{i=1}^{q} m_i = n$ ce qui donne $\dim F_i = m_i$ pour tout $1 \le i \le q$.

3) a) i) $h_1 \in \mathcal{L}(F_1)$, $\dim F_1 = m_1$ et h_1 nilpotent d'indice de nilpotence m_1 donc d'après III)A)2) donc F_1 est h_1- indécomposable.

ii) d'après III)A)1) il suffit de montrer que F_1 stable par f_1- indécomposable en effet F_1 stable par h_1 donc F_1 stable par f_1.
si $F_1 = G_1 \bigoplus G_2$ avec G_1, G_2 stables par f_1 alors G_1, G_2 stables par h_1, comme F_1 est h_1 -indécomposable alors $G_1 = \{0\}$ ou $G_2 = \{0\}$.

b) $h_1 \in \mathcal{L}(F_1)$, $\dim F_1 = m_1$ h_1 nilpotent d'indice de nilpotence $r_1 < m_1$. D'après III)3) $F_1 = K_1 \bigoplus L_1$ avec $K_1 \neq \{0\}$ et $L_1 \neq \{0\}$ L_1 stable par h_1 donc par f_1 et par suite stable par F. Maintenant $K_1 = vect(a, \dots, f^{r_1 - 1}(a))$, $a \in F_1$.

Soit $\widetilde{h_1}$ l'induit par h_1 sur K_1. on a $\widetilde{h_1} \in \mathcal{L}(K_1)$, $\widetilde{h_1}$ nilpotent d'indice $r_1 = \dim K_1$ d'après III)A)2) K_1 est $\widetilde{h_1}$- indécomposable et donc d'après III)A)1) K_1 est h_1- indécomposable.
K_1 stable par h_1 donc K_1 stable par f_1.
si $K_1 = K_1' \bigoplus K_2''$ avec K_1' , K_2'' stables par f_1 alors K_1', K_2'' stables par h_1 et donc $K_1' = \{0\}$ ou $K_2'' = \{0\}$ ce qui donne K_1 est f_1- indécomposable et par suite (d'après III)A)1)) K_1 est f- indécomposable.

Maths II

4) d'après 3) $F_1 = H_1 \bigoplus H_1'$ avec H_1 - f-indécomposable et H_1' stable par f.
D'autre part d'après c)1)b) $E = F_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{q} F_i = H_1 \bigoplus H_1''$ avec H_1 f-indécomposable et H_1'' stable par f.

1) cas si $H_1'' = \{0\}$, $E = H_1$ indécomposable et donc $s = 1$.

2) cas si $H_1'' \neq \{0\}$ soit $\tilde{f}$ l'induit par f sur H_1'' on a $\dim H_1'' \leq n-1$ en utilisant l'hypothèse de recurrence on a $H_1'' = \bigoplus_{i=2}^{s} H_i$ avec H_i est $\tilde{f}$- indécomposable et donc d'après A)1) f-indécomposable d'où $E = \bigoplus_{i=2}^{s} H_i$ avec H_i qui répond à la question.

5) il suffit de prendre une base $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{B}_i$ adoptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=2}^{s} H_i$ (avec $\mathcal{B}_i$ choisie comme dans III)B)d)) d'après III)B)e) $mat_{\mathcal{B}_i}(f_i) = J_{\alpha_i}(\beta_i)$ avec $\alpha_i = \dim H_i$.

6) $P_f(X) = \prod_{i=1}^{s} \det(J_{\alpha_i}(\beta_i) - Xid_{\dim H_i}) = \prod_{i=1}^{s}(\beta_i - X)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{s}(\beta_i - X)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{q}(\lambda_i - X)^{m_i}$
d'où $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$

IV- Applications

A- Condition nécessaire et suffisante pour que M et $2M$ soient semblables.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) supposons que M et $2M$ soient semblables
   a) Soit $\lambda \in \mathbf{sp_C}(M)$ donc $MX = \lambda X$ donc $(2M)X = 2\lambda X$ soit $2\lambda \in \mathbf{sp_C}(2M) = \mathbf{sp_C}(M)$ par recurrence on prouve pour tout $p \in \mathbb{N}$, $2^p\lambda \in \mathrm{sp_C}(M)$.
   b) Soit $\lambda \in \mathbf{sp_C}(M)$ d'après a) $\{2^p\lambda, p \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{sp_C}(M)$ qui est fini donc $\lambda = 0$ et par suite $\mathbf{sp_C}(M) = \{0\}$ ou encore M est nilpotente.

2) supposons que M est nilpotente.
   a) Conséquence immédiate de II)C)5).
   b) $f(e_1) = 0$.
   pour $2 \leq j \leq n$ on a $f(2^{j-1}e_j) = 2^{j-1}f(e_j) = 2^{j-1}v_{j-1}e_{j-1} = (2v_{j-1})(2^{j-2}e_{j-1})$ d'où
   $mat_{\mathcal{B}'}(f) = 2mat_{\mathcal{B}}(f)$

3) " $\Rightarrow$ " conséquence de IV)1)b).
" $\Leftarrow$ " $mat_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}MP \quad mat_{\mathcal{B}'}(f) = Q^{-1}MQ = P^{-1}(2M)P$ d'où $M = QP^{-1}(2M)PQ^{-1}$ c'est à dire M et $2M$ sont semblables.

Maths II