REPUBLIQUE TUNISIENNE

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2016

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2016

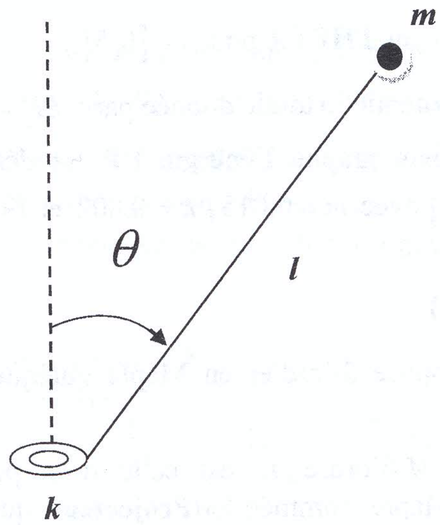
Concours Mathématique et Physique, Physique et Chimie et Technologie
Epreuve d'Informatique

Date : Vendredi 27 Mai 2016 Heure : 14 H		**Durée : 2 H**	**Nombre de pages : 5**
Barème :	**EXERCICE 1 (MAPLE) : 4 points** **EXERCICE 2 (MAPLE) : 6 points** **PROBLEME (ALGORITHMIQUE) : 10 points**		

DOCUMENTS NON AUTORISES
L'USAGE DES CALCULATRICES EST INTERDIT

EXERCICE 1 (MAPLE)

Le schéma suivant représente un métronome :



où :

- m : masse du point matériel de rayon négligeable
- l : longueur de la tige de masse négligeable
- k : constante de raideur du ressort spirale
- θ : angle entre la tige et la verticale

L'énergie cinétique **ECS** et l'énergie potentielle **EPS** de la sphère sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$ECS(t) = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2$$

$$EPS(t) = mgl\cos(\theta(t))$$

où t représente le temps et g la constante universelle de gravitation.

L'énergie potentielle **EPR** du ressort est donnée par :

$$EPR(t) = \frac{1}{2} k \theta^2(t)$$

L'énergie du métronome **EM** est donnée par :

$$EM = ECS + EPS + EPR \quad \textbf{(1)}$$

Le comportement du métronome est défini par l'équation différentielle ci-dessous :

$$\frac{\partial(EM)}{\partial t} = 0 \quad \textbf{(2)} \quad \text{avec les conditions initiales : } \begin{cases} \theta(0) = a \\ \theta'(0) = b \end{cases} \quad \textbf{(3)}$$

Les équations **(2)** et **(3)** constituent le modèle du mouvement du métronome.

Donner les instructions MAPLE permettant de :

1. définir les fonctions **ECS, EPS, EPR** et **EM** dépendantes de t ;
2. définir **Eq**, la fonction dérivée de **EM** ;
3. définir **Eqd**, l'équation différentielle donnée par **(2)** ;
4. affecter dans **ci1** et **ci2**, respectivement les conditions initiales données par **(3)** ;
5. résoudre formellement l'équation **Eqd** avec les conditions **ci1** et **ci2** ;
6. récupérer dans **THETA** la résolution numérique de l'équation **Eqd** avec les conditions **ci1** et **ci2** pour les valeurs $a = \frac{\pi}{6}$ et $b = 0$ en prenant $g = 9.81$, $m = 0.2$, $k = 0.3$ et $l = 0.15$;
7. représenter graphiquement **THETA** pour $t \in [0,5]$;
8. définir **EP**, l'énergie potentielle totale donnée par : $EP = EPS + EPR$;
9. représenter sur le même graphe l'énergie **EP**, sa dérivée première et sa dérivée seconde, pour $t \in [0,5]$ avec $m = 0.015$, $k = 0.002$ et $l = 0.15$.

EXERCICE 2 (MAPLE)

Dans cet exercice, on se propose d'étudier en Maple quelques propriétés associées à des matrices carrées particulières.

1. Une matrice carrée M d'ordre n est celle d'un projecteur si on a $M^2 = M$. Ecrire une procédure Maple, nommée **EstProjecteur**, qui prend comme paramètre une matrice carrée **M** et retourne *true* si **M** est la matrice d'un projecteur et *false* sinon.

   La procédure a pour entête : **EstProjecteur :=proc(M :: matrix)**

2. On dit qu'une matrice carrée M d'ordre n est nilpotente s'il existe un entier naturel k, appelé indice de nilpotence, tel que M^k est égale à la matrice nulle d'ordre n avec $k \leq n$. L'indice de nilpotence est le plus petit $k \leq n$.

   Ecrire une procédure Maple, nommée **IndNilpotence**, qui prend comme paramètre une matrice carrée **M**, supposée non nulle, et retourne l'indice de nilpotence s'il existe et 0 sinon.

   La procédure a pour entête : **IndNilpotence :=proc(M :: matrix)**

3. On dit qu'une matrice carrée M d'ordre n est circulante si chaque ligne d'indice i (avec $2 \le i \le n$) est la permutation circulaire vers la droite de la ligne d'indice $i-1$.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ c & 1 & a & b \\ b & c & 1 & a \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix}$ est circulante.

Ecrire une procédure Maple, nommée **EstCirculante**, qui prend comme paramètre une matrice carrée **M** et retourne *true* si **M** est circulante et *false* sinon.

La procédure a pour entête : **EstCirculante:=proc(M :: matrix)**

4. Sachant que le produit de deux matrices circulantes est une matrice circulante. Ecrire une procédure Maple, nommée **ProduitCirculant**, qui prend comme paramètre deux matrices carrées **A** et **B** de même ordre, supposées circulantes, et retourne leur produit matriciel **C** <u>en exploitant la propriété des matrices circulantes</u>.

La procédure a pour entête : **ProduitCirculant:=proc(A :: matrix , B :: matrix)**

PROBLEME (ALGORITHMIQUE)

La notion de permutation formalise la notion intuitive de réarrangement d'objets.

Soient n un entier naturel non nul et E_n la suite d'entiers distincts $x_1, x_2, \cdots, x_n$ où chaque x_i appartient à l'intervalle $[1, n]$.

On définit une permutation comme un réarrangement des éléments de E_n dans E_n en appliquant, à chacun des éléments de E_n, une fonction f bijective.

Une permutation est donc une fonction bijective de l'intervalle $[1, n]$ dans l'intervalle $[1, n]$.

Chaque permutation sera représentée par un tableau d'entiers T à une dimension dont la case d'indice 0 stocke n et les différentes cases $T[i]$ (c'est-à-dire les $f(i)$) stockent les x_i, avec $1 \le x_i \le n$ et $1 \le i \le n$.

Exemple : **T** est une permutation pour $n = 8$

f	T	**8**	3	5	1	8	4	7	6	2	…	
	E_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8		NMAX

Travail demandé

Dans ce qui suit, on suppose avoir déjà effectué les déclarations suivantes :

CONSTANTE **NMAX** = 1000
TYPE **PERMUTATION** = tableau [0 .. NMAX] de entier

On désigne par <u>**E**</u> les paramètres passés par valeur et par <u>**S**</u> les paramètres passés par variable dans les entêtes des procédures et des fonctions.

Question 1

Ecrire une fonction algorithmique, nommée **estPermutation**, qui prend en entrée un tableau **T** et qui retourne *vrai* si **T** représente une permutation et *faux* sinon. La fonction a pour entête :

Fonction estPermutation(<u>E</u> T : PERMUTATION) : booleen

Question 2

Ecrire une fonction algorithmique, nommée **estIdentite**, qui prend en entrée une permutation **T** et qui retourne *vrai* si **T** est une permutation identité et *faux* sinon.

<u>*Exemple :*</u> **T** est une permutation identité pour n=8

T	**8**	1	2	3	4	5	6	7	8	...	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8		NMAX

La fonction a pour entête :

Fonction estIdentite(<u>E</u> T : PERMUTATION) : booleen

Question 3

Une transposition est une permutation qui, à partir d'une permutation identité, échange uniquement deux éléments et laisse les autres inchangés.
Ecrire une fonction algorithmique, nommée **estTransposition**, qui prend en entrée une permutation représentée par un tableau **T** et retourne *vrai* si **T** est une transposition et *faux* sinon.
<u>*Exemple :*</u> **T** est une transposition associée à une permutation pour n=8

T	**8**	1	2	7	4	5	6	3	8	...	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8		NMAX

La fonction a pour entête :

Fonction estTransposition(<u>E</u> T : PERMUTATION) : booleen

Question 4

Ecrire une procédure algorithmique, nommée **saisiePermutation**, qui saisit la taille **n** de la permutation, avec $1 < n \leq NMAX$, puis saisit dans un tableau **T** une permutation quelconque de taille **n** (qui n'est pas forcément une identité). La procédure a pour entête :

Procedure saisiePermutation(<u>S</u> n : entier, <u>S</u> T : PERMUTATION)

Question 5

On rappelle que la composée $f \circ g$ de deux fonctions est donnée par $f(g(x))$.
Ecrire une procédure algorithmique, nommée **composer**, qui prend en entrée deux permutations **T1** et **T2**, supposées de même taille, et renvoie dans un tableau **T3** la permutation composée de **T1** par **T2**. La procédure a pour entête :

Procedure composer(<u>E</u> T1, T2 : PERMUTATION, <u>S</u> T3 : PERMUTATION)

Question 6

On rappelle que la fonction réciproque f^{-1} d'une bijection f est définie comme associant x à $f(x)$.
Ecrire une procédure algorithmique, nommée **reciproque**, qui prend en entrée une permutation **T** et renvoie dans un tableau **T1** sa permutation réciproque.

Exemple : **T1** est la permutation réciproque de la permutation **T** pour n=8

T	**8**	3	5	1	8	4	7	6	2	...	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8		NMAX

T1	**8**	3	8	1	5	2	7	6	4	...	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8		NMAX

La procédure a pour entête :

Procedure reciproque(E T : PERMUTATION, S T1 : PERMUTATION)

Question 7

On définit l'ordre d'une permutation **T** comme étant le plus petit entier naturel **k** non nul telle que la composée de **T** avec lui-même **k** fois est la permutation identité.
En utilisant impérativement la fonction **estIdentite** et la procédure **composer**, écrire une fonction algorithmique, nommée **ordre**, qui prend en entrée une permutation **T** et retourne son ordre **k**. La fonction a pour entête :

Fonction ordre(E T : PERMUTATION) : entier

Question 8

La période d'un indice **i** pour une permutation **T** est définie comme le plus petit entier naturel **k** non nul telle que la composée, **k** fois, de **T[i]** donne **i**.

Ecrire une fonction algorithmique, nommée **periode**, qui prend en entrée une permutation **T** et un indice **i** et retourne la période de **i** pour **T**. La fonction a pour entête :

Fonction periode(E T : PERMUTATION , E i : entier) : entier

Question 9

L'orbite d'un indice **i** pour une permutation **T** est l'ensemble des indices **j** tel qu'il existe **k** (**k** ne dépasse jamais la période de **i**), avec la composée, **k** fois, de **T[i]** donne **j**.

Ecrire une fonction algorithmique, nommée **estDansOrbite**, qui prend en entrée une permutation **T** ainsi que deux indices **i** et **j** et retourne *vrai* si l'indice **j** est dans l'orbite de l'indice **i** et *faux* sinon. La fonction a pour entête :

Fonction estDansOrbite(E T : PERMUTATION, E i, j : entier) : booleen

Question 10

Un cycle est une permutation dont exactement une des orbites est de taille strictement supérieure à un.

Ecrire une fonction algorithmique, nommée **estCycle**, qui prend en entrée une permutation **T** et retourne *vrai* si **T** est un cycle et *faux* sinon. La fonction a pour entête :

Fonction estCycle(E T : PERMUTATION) : booleen