



## Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Physique

Date : Lundi 30 Mai 2016      Heure : 8 H      Durée : 4 H      Nb pages : 8  
Barème : **Problème 1** : 11 points      **Problème 2** : 9 points

*L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.*

*L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.*

*Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.*

### Données numériques

- Permittivité électrique du vide :  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$
- Vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
- Constante de Stefan :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$
- Température du soleil :  $T_s = 5770 \text{ K}$
- Distance Terre-Soleil :  $d = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$
- Rayon solaire :  $R_s = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$

### Formulaires

$$(1+\epsilon)^\alpha = 1 + \alpha \epsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \epsilon^2 \text{ pour } \epsilon \ll 1$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} V(r, \theta) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

### Rappel

L'énergie électrostatique  $W_e$  d'un ensemble de  $N$  charges  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , isolées dans le vide et placées en des points

$$M_1, M_2, \dots, M_N \text{ s'écrit : } W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i, \text{ } V_i \text{ est le potentiel créé au point } M_i.$$

## Problème 1

### I-Etude d'un doublet

La **figure 1** représente un doublet formé de deux charges électriques ponctuelles fixes -  $q$  et  $+q$  situées respectivement aux points N et P symétriques par rapport au point O origine des coordonnées et séparées par une distance  $2a$ .

Un point M quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . On se place dans l'approximation dipolaire :  $r = OM \gg a$ .

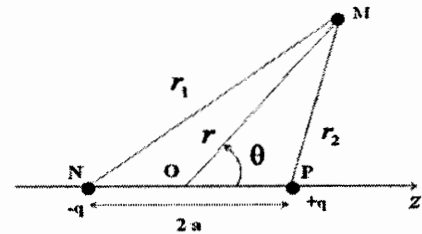


Fig.1

1. Exprimer le vecteur moment dipolaire  $\vec{p}$  de cette distribution. Quelle est son unité dans le système international ?
2. En effectuant un développement limité au premier ordre en  $\frac{a}{r}$ , déterminer en fonction de  $p$ ,  $\theta$ ,  $r$  et  $\epsilon_0$  le potentiel électrostatique  $V(M)$  créé par ce doublet.
- 3- En utilisant les propriétés de symétrie du dipôle, déterminer les composantes et les paramètres dont dépend le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  créé par ce dipôle. En déduire l'expression de  $\vec{E}(M)$  dans la base sphérique.
4. Déterminer les équations des surfaces équipotentielles et des lignes de champ.
5. Déterminer l'énergie électrostatique  $W_e$  de ce doublet.
6. Le dipôle est maintenant soumis à un champ électrique extérieur  $\vec{E}_0$  uniforme faisant un angle  $\psi$  avec l'axe Oz.
  - 6.1 Déterminer la résultante des forces exercées sur le dipôle. Conclure.
  - 6.2 Déterminer, par rapport à l'origine O, le moment  $\vec{\Gamma}$  du couple de ces forces.
  - 6.3 Déterminer l'énergie potentielle  $U_p$  de ce dipôle.
  - 6.4 En déduire ses positions d'équilibre et discuter sa stabilité.

## II- Etude de la molécule de dioxyde de carbone en régime statique.

7. Le dioxyde de carbone (gaz carbonique) est un composé inorganique dont la formule chimique est  $\text{CO}_2$ . Cette molécule est constituée de deux atomes d'oxygènes situés de part et d'autre d'un atome de carbone à la distance  $a = 116,3 \cdot 10^{-12} \text{ m}$  (Fig.2).



Fig. 2

Les liaisons CO sont polarisées de telle manière que les atomes d'oxygène portent chacun une charge  $-q$  alors que l'atome de carbone possède une charge  $+2q$ .

- 7.1 En supposant que ces charges sont ponctuelles, exprimer l'énergie électrostatique  $W_e$  de cette molécule en fonction de  $q$ ,  $\epsilon_0$ , et  $a$ . Conclure.
- 7.2 On pose  $q = \delta e$  où  $e$  est la charge de l'électron et  $\delta$  un coefficient tel que  $0 < \delta < 1$ . Calculer  $W_e$  en eV. On donne :  $\delta = 0,25$  ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ;  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .
8. L'atome de carbone de la molécule  $\text{CO}_2$  est situé au point O origine des coordonnées. Les deux atomes d'oxygène sont situés aux points  $N_1$  et  $N_2$  (Fig. 3). On se propose de calculer le champ électrostatique créé par cette distribution au point M  $(r, \theta, \varphi)$  tel que  $OM = r \gg a$ .
  - 8.1 Sachant que les deux liaisons CO peuvent être assimilées à deux doublets  $(-q, +q)$ , en déduire le moment dipolaire de la molécule  $\text{CO}_2$ .
  - 8.2 Quelles sont parmi les molécules suivantes :  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$  et  $\text{HCl}$ , celles qui possèdent un moment dipolaire non nul ? Justifier.

9. Exprimer le potentiel  $V(M)$  de la molécule  $\text{CO}_2$  en fonction de  $q, r, r_1, r_2$  et  $\epsilon_0$ .

10. En faisant un développement limité au second ordre en  $\frac{a}{r}$ , on montre que ce potentiel s'écrit :

$$V(M) = \frac{q a^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 - 3\cos^2 \theta)$$

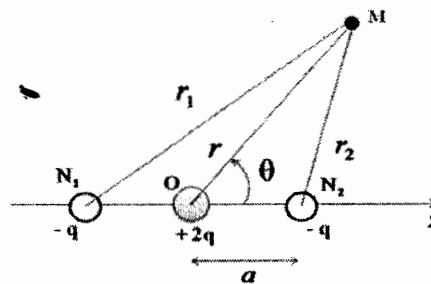


Fig.3

10.1 Déterminer, dans la base sphérique, les composantes du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$ .

10.2 Retrouver l'expression du potentiel pour  $\theta = \pi/2$  à partir de la question 9.

### III Interaction de la molécule $\text{CO}_2$ avec une onde électromagnétique.

En réalité, les atomes de cette molécule sont en mouvement d'oscillation autour de leur position d'équilibre.

On excite le gaz  $\text{CO}_2$  (supposé occuper tout le demi espace  $x > 0$  (Fig.4)) à l'aide d'une onde plane monochromatique dans le vide de pulsation  $\omega$ , caractérisée en notation complexe par un champ électrique :

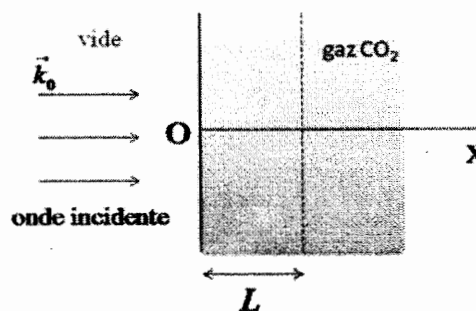


Fig. 4

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - k_0 x)} \vec{u}_z$$

Les grandeurs  $E_0$  et  $k_0$  sont des constantes positives.

On constate une absorption du rayonnement électromagnétique quand la pulsation de l'onde incidente coïncide avec la pulsation propre d'oscillation du gaz. Dans ces conditions le gaz est caractérisé par un indice complexe  $\underline{n}$  et un nombre d'onde  $\underline{k}$  qui sont reliés par :  $\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$  avec  $\underline{n} = n_1 - i n_2$  et  $\underline{k} = k_1 - i k_2$  où  $i$  est le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$  et  $n_1, n_2, k_1$  et  $k_2$  sont des constantes positives.

11. Ecrire en notation complexe l'expression du champ électrique  $\vec{E}(x,t)$  de l'onde pour  $x > 0$ .

12. L'intensité  $I(x)$  de cette onde dans le gaz (exprimée en  $\text{Wm}^{-2}$ ) est proportionnelle au carré de l'amplitude réelle du champ électrique. Elle est régie par la loi :  $I(x) = I_0 e^{-\beta_0 x}$ .

12.1 Quelle est la dimension de  $\beta_0$  ?

12.2 Exprimer le coefficient d'absorption  $\beta_0$  en fonction de  $k_2$ , puis en fonction de  $n_2$ .

12.3 Sachant que pour la longueur d'onde  $\lambda = 4,3 \mu\text{m}$ , l'intensité de l'onde à une profondeur  $L = 10 \text{ km}$  est le dixième de celle à l'entrée de la couche atmosphérique, déterminer la valeur de  $\beta_0$ .

12.4 En déduire les valeurs de  $n_2$  et  $k_2$ .

#### IV L'effet de Serre

La température de la surface de la terre ne cesse d'augmenter en raison de l'accumulation de gaz à effet de serre dans l'atmosphère. C'est dans ce contexte que s'inscrit la présente étude qui consiste à modéliser ce phénomène afin de retrouver tout d'abord la valeur réelle de cette température puis calculer sa variation en fonction de la concentration de  $\text{CO}_2$  dans l'atmosphère.

*Pour toute la suite, le soleil et la terre sont assimilés à des corps noirs de températures respectives  $T_S$  et  $T_T$ .*

##### IV.1 Equilibre radiatif de la Terre sans atmosphère

13. Donner la définition d'un corps noir.

14. Rappeler la loi de Stefan pour ce corps.

15. Dans une première approche, on ne tient pas compte de l'atmosphère.

15.1 Exprimer la puissance  $P_S$  émise par le soleil et calculer sa valeur. En déduire l'expression du *flux surfacique*  $\varphi_0$  reçu sur terre en fonction de  $P_S$  et de la distance  $d$  séparant la terre du soleil.

15.2 On suppose que la puissance du rayonnement solaire reçue par la surface de la terre se réduit à celle reçue par un disque de rayon  $R_T$  (Rayon de la terre). Sachant que cette puissance doit être répartie sur toute la surface de la terre, montrer que le *flux surfacique*

$$\varphi_s \text{ reçu au niveau de celle-ci s'écrit : } \varphi_s = \frac{P_S}{16\pi d^2}$$

Calculer la valeur de  $\varphi_s$ .

15.3 En déduire la température  $T_T$  de la terre. Conclure.

##### IV.2 Modèle parfait de l'effet de serre atmosphérique

16 On tient compte maintenant de l'atmosphère en l'assimilant à une vitre de température  $T_a$  placée au dessus de la surface de la terre. Celle-ci émet le flux surfacique  $\varphi_T$ , l'atmosphère émet le flux surfacique  $\varphi_a$  vers la terre et  $\varphi_a$  vers le ciel. De plus l'atmosphère est totalement transparente au rayonnement solaire, et se comporte comme un corps noir pour le rayonnement infrarouge émis par la terre.

16.1 Dans une première étude, on néglige la réflexion du rayonnement solaire par l'atmosphère. Faire les bilans radiatifs pour la terre et pour l'atmosphère. En déduire les températures  $T_T$  et  $T_a$ . Commenter la valeur de  $T_T$ .

16.2 En réalité 22,5% du flux solaire  $\varphi_s$  est réfléchi par l'atmosphère et le reste atteint la terre. Déterminer le nouveau flux incident  $\varphi_{s_i}$  reçu par la surface de la terre.

16.3 En déduire les nouvelles températures  $T_T$  et  $T_a$ . Commenter la valeur de  $T_T$ .

##### IV.3 Modèle plus réaliste de l'effet de serre atmosphérique

Pour se rapprocher davantage de la réalité, on suppose que :

- L'atmosphère absorbe la fraction  $\alpha$  du flux surfacique  $\varphi_{s_i}$ , tandis que la terre absorbe la fraction  $(1 - \alpha)$  de ce flux (Fig. 5).

L'atmosphère rayonne comme un corps gris. On admet que pour un tel corps, la loi de Stefan s'écrit :  $\varphi_a = \varepsilon \sigma T_a^4$  où  $\varepsilon$  est un coefficient appelé émissivité ( $0 < \varepsilon < 1$ ).

- L'atmosphère absorbe seulement une fraction  $\beta$  du rayonnement émis par la terre ; on choisit  $\beta = \varepsilon = 0,8$ .

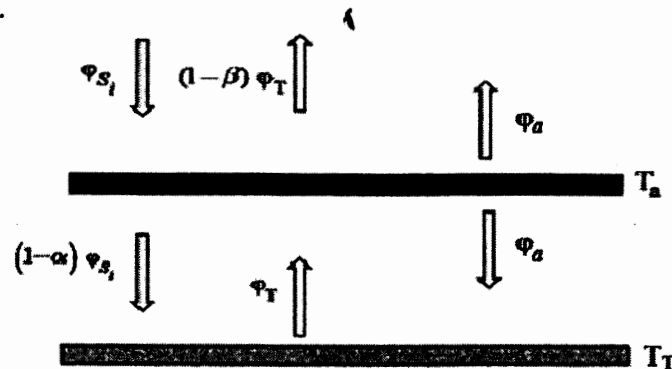


Fig. 5

17. En écrivant les équations traduisant les équilibres radiatifs pour l'atmosphère et la terre, exprimer  $T_T$  et  $T_a$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varphi_{S_i}$  et  $\sigma$ . Calculer  $T_T$  et  $T_a$ . On donne :  $\alpha = 0,25$ .
18. En réalité, la valeur de la température de la terre déduite d'une mesure par satellite vaut  $T_T = 288$  K. Commenter la valeur  $T_T$  calculée à la question précédente. Conclure quant au modèle utilisé. Calculer le flux surfacique  $\varphi_T$  émis par la terre.

#### IV.4 Variation de la température de la terre en fonction de la concentration de $\text{CO}_2$

La terre est toujours considérée comme un corps noir en équilibre thermique à la température  $T_T = 288$  K. L'atmosphère est modélisée par une couche de gaz à effet de serre.

19. Sachant que le rayonnement émis par la terre est situé dans l'infrarouge, expliquer pourquoi appelle-t-on le gaz  $\text{CO}_2$  un gaz à effet de serre.
20. Une variation  $\Delta C$  de la concentration de  $\text{CO}_2$  conduit à une augmentation de la température de la terre de  $\Delta T$  et contribue donc au réchauffement climatique.

On montre que  $\Delta T$  est liée à  $\Delta C$  par la relation :

$$\Delta T = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) A}{4\sigma T_T^3 \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)} \text{Log} \left(1 + \frac{\Delta C}{C_0}\right) \quad \text{avec } A = 5,35 \text{ Wm}^{-2}.$$

$C_0 = 0,0280$  % est la concentration de  $\text{CO}_2$  en pourcent dans l'atmosphère à l'année 1800 prise comme référence.

- 20.1 Sachant que cette concentration vaut  $C = 0,0404$  % au début de l'année 2016, calculer  $\Delta T$  durant la période comprise entre 1800 et 2016.
- 20.2 Recalculer la variation  $\Delta T$  en considérant un triplement de la concentration en  $\text{CO}_2$  depuis l'année 1800.

## Problème 2

### I Préambule

On considère un dipôle électrique oscillant (Fig.1) dont le moment dipolaire en notation complexe s'écrit  $\underline{\vec{p}}(t) = p_0 e^{-i\omega t} \vec{u}_z$  où  $p_0$  est son amplitude.

Ce dipôle crée dans l'espace un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  dont les expressions en un point M quelconque de l'espace, repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  sont les suivantes :

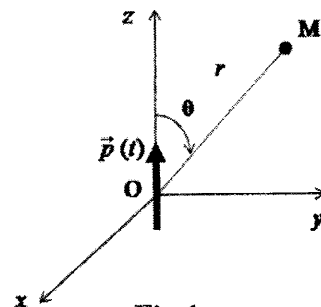


Fig.1

$$\underline{\vec{E}} = \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\underline{p}}{r^3} + \frac{\dot{\underline{p}}}{r^2 c} \right] \vec{u}_r + \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\underline{p}}{r^3} + \frac{\dot{\underline{p}}}{r^2 c} + \frac{\ddot{\underline{p}}}{r c^2} \right] \vec{u}_\theta ; \quad \underline{\vec{B}} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{\dot{\underline{p}}}{r^2} + \frac{\ddot{\underline{p}}}{r c} \right] \vec{u}_\varphi$$

où  $\underline{p}$ ,  $\dot{\underline{p}}$  et  $\ddot{\underline{p}}$  sont respectivement le moment dipolaire, sa dérivée première et sa dérivée seconde par rapport au temps à l'instant  $t - \frac{r}{c}$ .

A cet instant, on peut écrire en notation complexe :  $\underline{p} = p_0 e^{i(kr - \omega t)}$  où  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde de l'onde émise par le dipôle.

1. Montrer que les expressions complexes des champs  $\underline{\vec{E}}$  et  $\underline{\vec{B}}$  peuvent se mettre sous la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \frac{2 p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 - ikr) e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_r + \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 - ikr - k^2 r^2) e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\theta$$

$$\underline{\vec{B}} = -\frac{\mu_0 \omega p_0 \sin \theta}{4\pi r^2} (i + kr) e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\varphi$$

2. En comparant  $r$  à  $\lambda$ , ces expressions peuvent se simplifier.
  - 2.1 Que deviennent les expressions de  $\underline{\vec{E}}$  et  $\underline{\vec{B}}$  pour  $r \ll \lambda$  ? Commenter.
  - 2.2 Dans la région  $r \gg \lambda$ , c'est-à-dire dans la **zone de rayonnement**, exprimer les champs réels  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Montrer que l'onde présente localement la structure d'une onde plane.
3. Calculer le vecteur de Poynting  $\vec{R}$  dans cette zone. En déduire sa valeur moyenne temporelle  $\langle \vec{R} \rangle$ . Déterminer le flux  $P_m$  de  $\langle \vec{R} \rangle$  à travers une sphère de centre O et de rayon  $r$ . Que représente  $P_m$  ? Est-ce que  $P_m$  dépend de  $r$  ? Commenter.

### II- Antenne rectiligne

#### II.1 Etude du cas général

4. La figure 2 représente une antenne rectiligne émettrice d'ondes hertziennes constituée d'une tige métallique de longueur  $2\ell$  alimentée en son milieu par un circuit qui délivre un courant alternatif de haute fréquence.

Chaque élément de longueur  $dz$  de l'antenne peut être considéré comme un dipôle électrique oscillant de moment dipolaire  $\vec{dp}$  tel que  $\vec{dp} = I dz \vec{u}_z$ . Dans cette antenne l'intensité du courant dépend de  $z$  et du temps  $t$  suivant la loi :

$$I(z,t) = I_0 \left(1 - \frac{|z|}{\ell}\right) \cos \omega t$$

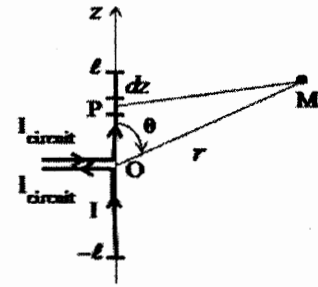


Fig.2

Déterminer à  $t=0$ , les positions des nœuds et de ventres du courant.

5. Exprimer le champ électrique élémentaire  $d\vec{E}$  créé en un point M de la zone de rayonnement par un élément de courant  $I dz$  situé au point P.

6. On admet que le champ électrique total créé par l'antenne au point M peut s'écrire :

$$\vec{E} = - \frac{I_0 \sin \theta \sin^2 \left( \frac{\omega \ell \cos \theta}{2c} \right)}{\pi \epsilon_0 \omega r \ell \cos^2 \theta} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{u}_\theta$$

L'onde rayonnée étant localement plane, en déduire l'expression de son champ magnétique

7. Déterminer la valeur moyenne de son vecteur de Poynting  $\vec{R}$ .

8. Soit  $P_m$  la puissance moyenne temporelle rayonnée par l'antenne à travers une sphère de centre O (origine de l'antenne) et de rayon  $r$ . Exprimer cette puissance sous forme d'une intégrale simple.

9. Sachant que cette puissance peut s'écrire sous la forme  $P_m = \frac{1}{2} R_{ray} I_0^2$  où  $R_{ray}$  représente la résistance de rayonnement de l'antenne, vérifier que :

$$R_{ray} = \frac{2c}{\pi \epsilon_0 \ell^2 \omega^2} \int_0^\pi \frac{\sin^4 \left( \frac{\omega \ell \cos \theta}{2c} \right) \sin^3 \theta}{\cos^4 \theta} d\theta.$$

## II.2 Etude du cas particulier $\ell \ll \lambda$

On se place dans toute la suite du problème dans le cas  $\ell \ll \lambda$ .

10. Donner la nouvelle expression de  $\vec{E}$ .

11. Montrer que  $R_{ray}$  peut se mettre sous la forme  $R_{ray} = \alpha \left( \frac{\ell}{\lambda} \right)^2$  où  $\alpha$  est une constante à exprimer en fonction de  $c$  et  $\epsilon_0$ . Calculer  $R_{ray}$ .

On donne  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$   $\lambda = 300m$  et  $\ell = 10m$ .

12. Calculer la valeur de  $P_m$  pour  $I_0 = 10A$ .

13. Sachant que  $I_0$  est constant, sur quels paramètres doit-on agir pour augmenter la puissance rayonnée par l'antenne ?

14. Dans la suite de cette partie, on se place dans la direction  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,

14.1 L'amplitude  $E_0$  du champ électrique à une distance  $r_0$  dans la zone de rayonnement vaut  $2 \cdot 10^{-2} \text{ Vm}^{-1}$ . En déduire  $r_0$ .

14.2 Sachant que la puissance minimale par unité de surface détectée par une antenne réceptrice vaut  $1,28 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}$ , calculer l'amplitude minimale  $E_0^{\min}$  du champ électrique. En déduire la portée  $r_{\max}$  de l'antenne (distance maximale atteinte par l'onde).

14.3 Comment peut-on augmenter la portée de l'antenne?

### III Antenne circulaire

Une antenne circulaire peut être modélisée par un dipôle magnétique constitué par une spire circulaire de rayon  $a$  et de surface  $S$ , parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité  $I = I_0 \cos(\omega t)$ , et de moment dipolaire magnétique  $\vec{M} = I_0 S \cos(\omega t) \vec{u}_z$  (Fig.3).

On montre que les expressions des champs électrique et magnétique créés par cette antenne dans la zone de rayonnement s'écrivent :

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \ddot{M} \vec{u}_\theta \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c^2} \ddot{M} \vec{u}_\theta$$

$\ddot{M}$  est la dérivée seconde du moment dipolaire magnétique à l'instant  $t - \frac{r}{c}$ .

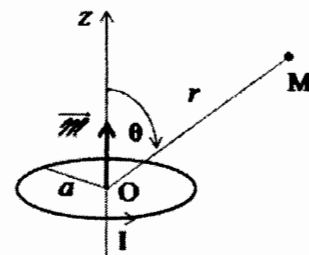


Fig.3

15. Comment peut-on déduire ces expressions à partir de celles obtenues pour un dipôle électrique dans la zone de rayonnement ?

16. Calculer le vecteur de Poynting de cette onde et en déduire sa valeur moyenne temporelle. Montrer que la puissance moyenne  $P_m$  rayonnée par le dipôle est proportionnelle à  $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$ .

17. Déterminer l'expression de la résistance de rayonnement de cette antenne. Calculer pour  $\ell = a$  le rapport  $\beta = \left(\frac{R_{\text{Ray}}^m}{R_{\text{Ray}}^e}\right)$  où  $R_{\text{Ray}}^m$  et  $R_{\text{Ray}}^e$  représentent respectivement les résistances de rayonnement magnétique et électrique des deux antennes. Montrer que  $\beta$  est proportionnel à  $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ .

18. On veut comparer les performances des deux antennes en supposant qu'elles sont parcourues par le même courant  $I_0$ . Pour ce faire, calculer le rapport  $\beta$  pour les longueurs d'onde  $\lambda_1 = 20a$  et  $\lambda_2 = 100a$ , et discuter de la performance des deux antennes.