REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2016

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2016

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Date: Jeudi 26 Mai 2016	**Heure :** 8 H	**Durée :** 4 heures	**Nb pages :** 5

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

N.B. Le sujet comporte deux problèmes, totalement indépendants.

Problème I

Partie I

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que $a_n \neq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. On pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$.

On dit que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ converge si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite non nulle. Cette limite se note $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

1. (a) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(|p_n|) \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.
2. On suppose la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ est absolument convergente.

   On veut prouver que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ converge.

   (a) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(p_n - p_{n-1})$ est absolument convergente.
   (c) En déduire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   (d) On pose $b_n = -\dfrac{a_n}{1+a_n}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$ est absolument convergente.
   (e) En déduire que la suite $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   (f) Montrer alors que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ converge.

Dans la suite de ce problème, on pose pour $a \in \mathbb{C}$,

$$u_n(a) = \begin{cases} a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) & \text{si} \quad n \geq 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

Partie II

1. Vérifier que, pour tout entier n,

$$u_{n+1}(a) = (a+n)u_n(a) = a u_n(a+1).$$

2. On suppose que $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$. On pose $f_a(x) = (1-x)^{-a}, \quad x < 1$.
   (a) Montrer que f_a est une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynômiaux.
   (b) En déduire que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(a)}{n!} x^n.$$

3. Soit $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$. On pose pour $G_n(x) = \dfrac{n!\, n^{x-1}}{u_n(x)}$, $n \geq 1$.
   (a) Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 1} (1+\frac{1}{n})^x (1+\frac{x}{n})^{-1}$ est convergent.
   (b) En déduire que la suite $(G_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ vers une fonction G et que

$$G(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^x (1+\frac{x}{n})^{-1}.$$

   (c) Montrer que

$$u_n(x) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{n!\, n^{x-1}}{G(x)}.$$

   (d) Montrer que $G(1) = 1$.
   (e) Montrer que $G(x+1) = xG(x)$ et que plus généralement, $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u_k(x) = \dfrac{G(x+k)}{G(x)}$.

Partie III

1. Pour quelles valeurs des réels α et β la fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est elle intégrable sur $]0,1[$?
Dans ces conditions, on admet que

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{G(\alpha)G(\beta)}{G(\alpha+\beta)}.$$

2. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n(a)\, u_n(b)}{u_n(c)\, n!} x^n$.

3. On suppose que $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$ et $c > b > 0$.
   (a) Montrer que, pour tout entier n,

$$\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1} dt = \frac{G(b)G(c-b)}{G(c)} \frac{u_n(b)}{u_n(c)}.$$

   (b) Montrer que, $\forall\, x \in]-1,1[$,

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a} dt = \frac{G(b)G(c-b)}{G(c)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n(a)\, u_n(b)}{u_n(c)\, n!} x^n.$$

4. On suppose que $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$, $c > b > 0$ et $c - a - b > 0$.

   (a) Montrer que $h : x \longmapsto \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}dt$ est continue sur $[0,1]$.

   (b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!}$ est absolument convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!} = \frac{G(c)G(c-a-b)}{G(c-a)G(c-b)}.$$

Problème II

Pour tout $r \in [0, +\infty[$, on pose $D_r = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| > r\}$.

Partie I

1. Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que $\forall z \in D_{|z_1|}$, $\quad \frac{1}{z - z_1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1)^n}{z^{n+1}}$.

   (b) En déduire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes telle que

$$\forall z \in D_{|z_1|}, \quad \frac{1}{(z-z_1)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n+k+1}}.$$

2. Soient f une fonction rationnelle et $R = \max\{|z| : z \in \mathbb{C} \text{ est un pôle de } f\}$.
   Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes tels que

$$\forall z \in D_R, \ f(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

3. Soient $R \in [0, +\infty[$ et $f : D_R \to \mathbb{C}$ une fonction.
   On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes tels que

$$\forall z \in D_R, \ f(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

   (a) Montrer que f est continue sur D_R.

   (b) Soit $r > R$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{i(k+1)\theta} d\theta.$$

4. Soient $R_1 \geq R_2 \geq 0$ et $f : D_{R_2} \to \mathbb{C}$ une fonction. On suppose qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et deux suites complexes $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ tels que

$$\forall z \in D_{R_1}, \ f(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad \text{et} \quad \forall z \in D_{R_2}, \ f(z) = Q(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{z^{n+1}}.$$

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$ et que $P = Q$.

Partie II

Dans la suite de ce problème p désigne un entier non nul et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^p$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note $Sp(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M, $r(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(M)\}$ et

$$|||M||| = \sup_{\|X\|=1} \|MX\|.$$

1. Montrer que $M \longmapsto |||M|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
2. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $X \in \mathbb{C}^p$, $\|MX\| \leq |||M||| \, \|X\|$.
3. Montrer que, pour tout $M,N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$,

$$|||MN||| \leq |||M||| \, |||N|||.$$

4. Soient $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\lambda \in Sp(M)$. Montrer que $|\lambda| \leq |||M|||$.
   En déduire que

$$r(M) \leq |||M|||.$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Sp(A^n) = \{\lambda^n, \lambda \in Sp(A)\}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r(A^n) = (r(A))^n$.
   (c) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$r(A) \leq |||A^n|||^{\frac{1}{n}}.$$

Partie III

Dans cette partie, on fixe $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et on note I la matrice identité d'ordre p.

1. Montrer que, pour tout $z \in D_{r(A)}$, la matrice $zI - A$ est inversible. On note alors

$$(zI - A)^{-1} = (f_{ij}(z))_{1 \leq i,j \leq p}.$$

2. (a) Soit $z \in D_{r(A)}$. Montrer que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, la fonction f_{ij} est une fraction rationnelle en z.
   (b) En déduire que, pour tout $i,j \in \{1, \ldots, p\}$, il existe un polynôme $P_{ij} \in \mathbb{C}[X]$ et une suite $(\alpha_{ij}(n))_n$ de nombres complexes tels que

$$\forall z \in D_{r(A)}, \; f_{ij}(z) = P_{ij}(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{ij}(n)}{z^{n+1}}.$$

3. Montrer que, pour tout $z \in D_{|||A|||}$, la série matricielle $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{z^{n+1}}$, est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}} = (zI - A)^{-1}.$$

4. En déduire que, pour tout $z \in D_{|||A|||}$,

$$f_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A^n)_{ij}}{z^{n+1}} \quad \text{où } A^n = ((A^n)_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

5. Montrer que, pour tout $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $P_{ij} = 0$ et $\alpha_{ij}(n) = (A^n)_{ij}$.

6. En déduire que, pour tout $z \in D_{r(A)}$, la série matricielle $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{A^n}{z^{n+1}}$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}} = (zI - A)^{-1}.$$

7. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{A^n}{(r(A)+\varepsilon)^n}\right)_n$ converge vers 0.

   (b) En déduire qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\quad |||A^n|||^{\frac{1}{n}} \leq (r(A)+\varepsilon)$.

8. Montrer que

$$r(A) = \lim_{n\to+\infty} |||A^n|||^{\frac{1}{n}}.$$