Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session 2016

Concours en Mathématiques Physique

Correction de l'Épreuve de Mathématiques I

Problème I:

Partie I:

---

1. (a) **Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.** ②

La fonction $g : x \longmapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1,+\infty[$ (deux fois dérivable et à dérivée seconde négative), donc la courbe de g est au dessous de sa tangente à l'origine qui est d'équation $y = x$. Ainsi, $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

(b) **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(|p_n|) \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.** ②

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(|p_n|) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} |1+a_k|\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln|1+a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(1+|a_k|) \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

---

2. (a) **Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.** ②

La série $\sum_n |a_n|$ est convergente, donc la suite de ses sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ est convergente donc bornée.
Il existe $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq M$, donc, d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|p_n| \leq e^M$. Ainsi, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

(b) **Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} |p_n - p_{n-1}|$ est convergente.** ②

Pour tout $n \geq 2$, $p_n - p_{n-1} = p_{n-1}a_n \implies |p_n - p_{n-1}| \leq e^M |a_n|$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ est convergente donc la série $\sum_{n\geq 2} |p_n - p_{n-1}|$ est convergente.

(c) **En déduire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.** ②

La convergence de la série $\sum_{n\geq 2} |p_n - p_{n-1}|$ entraîne la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} (p_n - p_{n-1})$ et par suite la suite $\left(\sum_{k=2}^{n}(p_k - p_{k-1})\right)_n$ est convergente. D'où la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

(2)

(d) **On pose $b_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge absolument.**

(2)

La série $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ est convergente, donc la suite $(a_n)_n$ converge vers 0 et par suite $|b_n| \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} |a_n|$.
La convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ en découle.

(2)

(e) **En déduire que la suite $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.**

(2)

Remarquons que pour tout entier non nul n, $b_n \neq -1$. La série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge absolument, donc d'après les questions précédentes la suite $q_n = \prod_{k=1}^{n}(1+b_k)$ converge. Or on a

$$q_n = \prod_{k=1}^{n}(1+b_k) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_k}{1+a_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} = \frac{1}{p_n}.$$

La suite $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)_n$ est alors convergente.

(f) **Montrer alors que le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ converge.**

(2)

Les suites $(p_n)_n$ et $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)_n$ sont convergentes, donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} p_n \neq 0$, et par suite le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ est convergent.

Partie II

---

1. **Vérifier que pour tout entier n,**
$$u_{n+1}(a) = (a+n)u_n(a) = au_n(a+1).$$

(2)

On a $u_0(a) = u_0(a+1) = 1$ et $u_1(a) = a$.
Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(a) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n) &= [a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)]\,(a+n) = (a+n)u_n(a) \\ &= a\,[(a+1)(a+2)\cdots(a+1+n-1)] = au_n(a+1). \end{aligned}$$

---

2. (a) **Montrer que f_a est une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynômiaux.**

(2)

La fonction f_a est définie et est dérivable sur $]-\infty,1[$ et $f_a'(x) = a(1-x)^{-a-1}$.
Donc $(1-x)f_a'(x) = af_a(x)$. Ainsi, f_a est solution, sur $]-\infty,1[$, de l'équation différentielle

$$(1-x)y' - ay = 0. \qquad (E)$$

(b) **Montrer que S est bien définie sur $]-1,1[$ et qu'elle y vérifie l'équation différentielle de la question précédente.**

(3)

En remarquant que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(a)n!x^{n+1}}{u_n(a)(n+1)!x^n}\right| = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left|\dfrac{n+a}{n+1}x\right| = |x|$, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{u_n(a)}{n!}x^n$ est $R=1$.

La somme S de cette série est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et on a:

$$\begin{aligned}(1-x)S_a'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(a)}{(n-1)!}x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(a)}{(n-1)!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}(a)}{n!}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(a)}{(n-1)!}x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+a)u_n(a)}{n!}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(a)}{(n-1)!}x^n = a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(a)}{n!}x^n = aS_a(x).\end{aligned}$$

Donc S_a est une solution de l'équation (E) sur $]-1,1[$.

(c) **En déduire que**

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f_a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(a)}{n!}x^n.$$

(1)

Les fonctions S et f_a sont solutions de l'équation (E) sur $]-1,1[$ et $S(0)=f_a(0)=1$, donc $S=f_a$ sur $]-1,1[$.

---

3. (a) **Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n\geq1}(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{x}{n})^{-1}$ est convergent.**

(2)

On a pour tout réel $x\notin\mathbb{Z}_-$,

$$(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{x}{n})^{-1}=\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x(x-1)}{2n^2}\right)\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}\right)+o(\frac{1}{n^2})=1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}).$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{x(x-1)}{2n^2}$ est absolument convergente, donc d'après la Partie I, le produit infini $\prod\limits_{n\geq1}(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{x}{n})^{-1}$ converge.

(b) **En déduire que la suite $(G_n)_{n\geq1}$ converge simplement sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ vers une fonction G et que**

$$G(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{x}{n})^{-1}.$$

(3)

Pour tout réel $x\notin\mathbb{Z}_-$ et $n\geq2$,

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^x(1+\frac{x}{k})^{-1}=\prod_{k=1}^{n-1}(\frac{k+1}{k})^x(\frac{k+x}{k})^{-1}=\frac{(n-1)!\,n^x}{(1+x)\cdots(x+n-1)}=xG_n(x).$$

Comme le produit infini $\prod\limits_{n\geq1}(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{x}{n})^{-1}$ converge, donc la suite $\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^x(1+\frac{x}{k})^{-1}\right)_{n\geq2}$ converge vers une limite non nulle. La suite $(G_n(x))_n$ converge alors vers une limite $G(x)\neq0$. De plus, on a

$$xG(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{x}{n})^{-1}.$$

(c) **Montrer que**

$$u_n(x) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{n!\, n^{x-1}}{G(x)}.$$ ①

On a $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{n!\, n^{x-1}}{u_n(x)} = G(x)$ et $G(x) \neq 0$, donc $\dfrac{n!\, n^{x-1}}{u_n(x)} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} G(x)$.
L'équivalence demandée en découle.

(d) **Montrer que $G(1) = 1$.** ②

Pour tout entier non nul n, $G_n(1) = \dfrac{n!}{u_n(1)} = 1$, donc $G(1) = 1$.

(e) **Montrer que $G(x+1) = xG(x)$ et que plus généralement,**

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad u_k(x) = \frac{G(x+k)}{G(x)}.$$ ③

Pour tout entier non nul n et pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}$,

$$G_n(x+1) = \frac{n!\, n^x}{u_n(x+1)} = \frac{n!\, nn^{x-1}x}{(x+n)u_n(x)} = x\frac{n}{x+n}G_n(x).$$

En passant à la limite, on obtient $G(x+1) = xG(x)$.
Pour prouver la seconde relation, on procède par récurrence. La relation est vraie pour $k = 0$. Supposons qu'elle est vraie pour un certain ordre k. D'après la relation $G(x+1) = xG(x)$, qui est valable pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}$, on aura:

$$G(x+k+1) = (x+k)G(x+k) = (x+k)u_k(x)G(x) = u_{k+1}(x)G(x).$$

Ce qui prouve la relation demandée.

Partie III:

L'objectif de cette partie est de prouver la formule de réprésentation intégrale [Euler, 1748] (Formule 0.0.1) ainsi que la formule de reduction [Gauss, 1812] (Formule 0.0.2) pour la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$.

---

1. **Pour quelles valeurs des réels α et β la fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est elle intégrable sur $]0,1[$?** ②

La fonction $H:\ t \longmapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$. De plus,

$$H(t) \underset{t\mapsto0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}} \quad \text{et} \quad H(t) \underset{t\mapsto1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-\beta}}.$$

Donc la fonction H est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement, si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

---

2. **Soient $a,b,c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq0} \dfrac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!}x^n$.** ②

On a, d'après la Partie II, Question 3-(c),

$$\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{G(c)}{G(a)G(b)}\frac{n!\,n^{a-1}\,n!\,n^{b-1}}{n!\,n^{c-1}\,n!} = \frac{G(c)}{G(a)G(b)}n^{a+b-c-1}.$$

Donc le rayon de convergence est $R = 1$.

---

3. (a) **Montrer que pour tout entier n,** $\displaystyle\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}dt = \frac{G(b)G(c-b)}{G(c)}\frac{u_n(b)}{u_n(c)}$. ②

D'après, Partie III, Question 1 et Partie II, Question 3-(e) et puisque $b+n>0$, $c-b>0$,

$$\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}dt = \frac{G(b+n)G(c-b)}{G(c+n)} = \frac{u_n(b)G(b)G(c-b)}{u_n(c)G(c)}.$$

(b) **Montrer que** $\forall x \in]-1,1[$,

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}dt = \frac{G(b)G(c-b)}{G(c)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!}x^n.$$

③

D'après Partie II, Question 2-(a), on a pour tout $x\in]-1,1[, t\in]0,1[$,

$$(1-tx)^{-a} = f_a(xt) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(a)}{n!}x^n t^n.$$

Donc $t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(a)}{n!}x^n t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}$.

Soit $g_n(t) = \dfrac{u_n(a)}{n!}x^n t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}$, $t\in]0,1[$.

La fonction g_n est intégrable sur $]0,1[$ et la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge simplement sur $]0,1[$.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|dt = \frac{G(c)G(c-b)}{G(b)}\frac{|u_n(a)|u_n(b)}{u_n(c)n!}|x|^n$: terme général d'une série convergente.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^1 |g_n(t)|dt$ converge. Ainsi, on peut intervertir $\sum$ et $\int$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}dt &= \int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(a)}{n!}x^n t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}dt\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(a)}{n!}x^n\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}dt\\
&= \frac{G(b)G(c-b)}{G(c)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!}x^n. \qquad (0.0.1)
\end{aligned}$$

---

4. (a) **Montrer que** $h:\ x\longmapsto \displaystyle\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}dt$ **est continue sur** $[0,1]$. ③

La fonction $(x,t)\longmapsto t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}$ est continue sur $[0,1]\times]0,1[$ et on a

$$|t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}| \leq \varphi(t) = \begin{cases} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} & \text{si } a<0,\\ t^{b-1}(1-t)^{c-b-a-1} & \text{si } a>0.\end{cases}$$

La fonction φ est intégrable sur $]0,1[$ car $b>0$, $c-b-a>0$ et $c-b>0$.
Donc d'après le théorème de continuité des fonctions définies par intégrale, h est continue sur $[0,1]$.

(b) **On suppose que $a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-$, $c>b>0$ et $c-a-b>0$. Montrer que la série** $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!}$ **est absolument convergente et que**

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!} = \frac{G(c)G(c-a-b)}{G(c-a)G(c-b)}.$$

③

D'après l'équivalence

$$\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{G(c)}{G(a)G(b)}\frac{1}{n^{c-a-b+1}},$$

et la condition $c-a-b>0$, on conclut que la série donnée est absolument convergente.

La série $\sum_{n\geq 0}\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!}x^n$ converge normalement sur [0,1] car

$$\left|\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!}x^n\right| \leq \left|\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!}\right|.$$

Donc, d'après le Théorème de la double limite,

$$\lim_{x\mapsto 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!}.$$

On en déduit, en faisant tendre x vers 1^- dans l'égalité de la question 3-(b) et en utilisant la continuité de la fonction h,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n(a)\,u_n(b)}{u_n(c)\,n!} = \frac{G(c)G(c-a-b)}{G(c-a)G(c-b)}. \qquad (0.0.2)$$

Problème II

Partie I

1. (a) **Montrer que, $\forall z\in D_{|z_1|}$, $\frac{1}{z-z_1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z_1)^n}{z^{n+1}}$.** ②

Soit $z\in D_{|z_1|}$. Donc $\left|\frac{z_1}{z}\right|<1$. Par suite la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(z_1)^n}{z^{n+1}}=\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z_1}{z}\right)^n$ converge absolument et

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{z_1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z_1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z_1)^n}{z^{n+1}}.$$

(b) **En déduire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes telle que pour tout $z\in D_{|z_1|}$, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{z^{n+k}}$ converge absolument et**

$$\frac{1}{(z-z_1)^k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{z^{n+k}}.$$

③

On raisonne par récurrence sur k.
D'après la question précédente le résultat est vrai pour $k=1$.
Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et supposons que le résultat est vrai pour k : il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes telle que $\forall z\in D_{|z_1|}$, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{z^{n+k}}$ converge absolument et

$$\frac{1}{(z-z_1)^k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{z^{n+k}}.$$

Soit $z \in D_{|z_1|}$. Comme les séries $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(z_1)^n}{z^{n+1}}$ et $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{a_n}{z^{n+k}}$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy $\sum u_n$ converge absolument et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z_1)^n}{z^{n+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{z^{n+k}}\right) = \frac{1}{(z-z_1)^{k+1}}. \qquad (1)$$

D'autre part

$$u_n = \sum_{i=0}^{n}\frac{(z_1)^i}{z^{i+1}}\frac{a_{n-i}}{z^{n-i+k}} = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n}(z_1)^i a_{n-i}\right)}_{=b_n}\frac{1}{z^{n+1+k}} = \frac{b_n}{z^{n+(k+1)}}$$

où b_n est un nombre complexe qui ne dépend pas de z. En remplaçant u_n dans (1) il vient que $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{b_n}{z^{n+(k+1)}}$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{z^{n+(k+1)}} = \frac{1}{(z-z_1)^{k+1}}.$$

Cela signifie que le résultat est vrai pour $k+1$.
D'après le principe de récurrence le résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

---

2. **Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes tels que**

$$\forall z \in D_R,\ f(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

③

Si f est un polynôme on prend $P = f$ et $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si f n'est pas un polynôme. Soient $z_1,\dots,z_q \in \mathbb{C}$ les pôles de f et $m_1,\dots,m_q \in \mathbb{N}$ leurs multiplicités respectives. D'après le théorème de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ et $(\alpha_{i1})_{1\leq i\leq m_1}\mathbb{C}^{m_1},\dots,(\alpha_{iq})_{1\leq i\leq m_q} \in \mathbb{C}^{m_q}$ tels que pour tout $z \in D_f$ (le domaine de f)

$$f(z) = P(z) + \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_j}\frac{\alpha_{ij}}{(z-z_j)^i}$$

D'après la question précédente, pour tout $j \in \langle 1,q\rangle$ et tout $i \in \langle 1,m_j\rangle$ il existe une suite $(a_{n,i,j})_{n\geq 0}$ de nombre complexes

$$\forall z \in D_{|z_j|} : \frac{1}{(z-z_j)^i} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n,i,j}}{z^{n+i}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a'_{n,i,j}}{z^{n+1}},\ \text{où } a'_{n,i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < i-1 \\ a_{n-i+1,i,j} & \text{si } n \geq i-1 \end{cases}$$

Donc pour tout $z \in D_R$

$$f(z) = P(z) + \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_j}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a'_{n,i,j}}{z^{n+1}} = P(z) + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_j}a'_{n,i,j}\right)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Posons $a_n = \sum\limits_{j=1}^{q}\sum\limits_{i=1}^{m_j}a'_{n,i,j}$ et observons que $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes indépendants de z telle que

$$\forall z \in D_R : f(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

---

3. (a) **Montrer que f est continue sur D_R.** ②

La fonction $z \to P(z)$ est continue car polynômiale.

D'autre part la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$ converge pour tout z tel que $|z| > R$ donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge pour tout z tel que $|z| < \frac{1}{R}$. Par suite le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est supérieur où égal à $\frac{1}{R}$. Il s'ensuit que la somme S de cette série entière est continue sur le disque ouvert $D_o\left(0,\frac{1}{R}\right)$.

Comme de plus l'application $I : D_R \to D_o\left(0,\frac{1}{R}\right), z \to \frac{1}{z}$ est continue alors $g = S \circ I$ est continue sur D_R. Donc $f = P + g$ est continue sur D_R.

(b) **Soit $r > R$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,**

$$a_k = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{i(k+1)\theta} d\theta.$$

③

On utilise les notations de la question précédente. Soient $r > R$ et $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$

$$r^{k+1} f\left(re^{i\theta}\right) e^{i(k+1)\theta} = r^{k+1} P\left(re^{i\theta}\right) e^{i(k+1)\theta} + r^{k+1} g\left(re^{i\theta}\right) e^{i(k+1)\theta}$$

avec P et g continues. Donc

$$r^{k+1} \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{i(k+1)\theta} d\theta = r^{k+1} \int_0^{2\pi} P\left(re^{i\theta}\right) e^{i(k+1)\theta} d\theta + r^{k+1} \int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right) e^{i(k+1)\theta} d\theta$$

- Posons $P = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j X^j$ alors

$$\begin{aligned}
r^{k+1} \int_0^{2\pi} P\left(re^{i\theta}\right) e^{i(k+1)\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{m} \alpha_j r^j e^{ij\theta} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} d\theta \\
&= \sum_{j=0}^{m} \alpha_j r^{j+k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+j+1)\theta} d\theta \\
&= \sum_{j=0}^{m} \alpha_j r^{j+k+1} \underbrace{\left[\frac{e^{i(k+j+1)\theta}}{i(k+j+1)}\right]_0^{2\pi}}_{=0} = 0.
\end{aligned}$$

- D'autre part, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$

$$r^{k+1} g\left(re^{i\theta}\right) e^{i(k+1)\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{r^{n-k}} e^{i(k-n)\theta}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ on pose

$$g_n : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ \theta \to \frac{a_n}{r^{n-k}} e^{i(k-n)\theta}.$$

Alors :

(i) les g_n sont continues sur le segment $[0,2\pi]$.

(ii) $\forall \theta \in [0,2\pi]$

$$|g_n(\theta)| = \left|\frac{a_n}{r^{n-k}} e^{i(k-n)\theta}\right| = \left|\frac{a_n}{r^{n-k}}\right| = r^{k+1} \left|\frac{a_n}{r^{n+1}}\right|.$$

Comme $r \in D_R$ alors la série $\sum_{n\geq 0}\left|\frac{a_n}{r^{n+1}}\right|$ converge donc $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0,2\pi]$.
(i) et (ii) permettent alors de conclure que

$$r^{k+1}\int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right)e^{i(k+1)\theta}d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(\theta)\right)d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} g_n(\theta)\,d\theta.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} g_n(\theta)\,d\theta = \frac{a_n}{r^{n-k}}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ 2\pi a_k & \text{si} \quad n = k \end{cases}$$

donc

$$r^{k+1}\int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right)e^{i(k+1)\theta}d\theta = 2\pi a_k,$$

puis

$$a_k = \frac{r^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right)e^{i(k+1)\theta}d\theta = \frac{r^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{i(k+1)\theta}d\theta.$$

---

4. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$ et que $P = Q$.** 2

D'après la question précédente si $r \in D_{\max(R_1,R_2)}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = b_n = \frac{r^{n+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{i(n+1)\theta}d\theta.$$

Donc $\forall z \in D_{\max(R_1,R_2)}$

$$f(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}} = Q(z) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

Il s'ensuit que $\forall z \in D_{\max(R_1,R_2)}$: $P(z) = Q(z)$ puis que $P = Q$.

Partie II

1. **Montrer que $M \longmapsto |||M|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.** 2

i) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $|||M||| = 0$. Donc $0 \leq \|MX\| \leq |||M||| = 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^p$ tel que $\|X\| = 1$. Donc $\|MX\| = 0$ puis $MX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^p$ tel que $\|X\| = 1$. Soit $X \in \mathbb{C}^p$. Si $X = 0$ alors $MX = 0$. Si $X \neq 0$ alors $\left\|\frac{X}{\|X\|}\right\| = 1$ donc $M\left(\frac{X}{\|X\|}\right) = 0$. On en déduit que $\frac{1}{\|X\|}M(X) = 0$ puis que $MX = 0$. Maintenant on a $MX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^p$, donc $M = 0$.
ii) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors

$$|||\alpha M||| = \sup_{\|X\|=1}\|\alpha MX\| = \sup_{\|X\|=1}|\alpha|\,\|MX\| = |\alpha|\sup_{\|X\|=1}\|MX\| = |\alpha|\,|||M|||.$$

iii) Soient $M,N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Pour tout $X \in \mathbb{C}^p$ tel que $\|X\| = 1$ on a

$$\|(M+N)X\| = \|MX + NX\| \leq \|MX\| + \|NX\| \leq |||M||| + |||N|||.$$

Donc $|||M+N||| \leq |||M||| + |||N|||$.
i), ii) et iii) prouvent que $M \to |||M|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

---

2. **Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $X \in \mathbb{C}^p$,**

$$\|MX\| \leq |||M|||\, \|X\|.$$

— — — — — — — — — — — — —

Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. D'après la définition, pour tout $X \in \mathbb{C}^p$ tel que $\|X\| = 1$, on a $\|MX\| \leq |||M|||$.
Soit $X \in \mathbb{C}^p$. Si $X = 0$ alors $\|X\| = 0$ et donc $\|MX\| = 0 \leq |||M|||\, \|X\| = 0$.
Si $X \neq 0$ alors $\left\| \dfrac{X}{\|X\|} \right\| = 1$, donc $\left\| M \dfrac{X}{\|X\|} \right\| \leq |||M|||$ puis $\|MX\| \leq |||M|||\, \|X\|$.
Donc pour tout $X \in \mathbb{C}^p$ $\|MX\| \leq |||M|||\, \|X\|$.

(2)

---

3. **Montrer que, pour tout $M,N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$,**

$$|||MN||| \leq |||M|||\, |||N|||.$$

— — — — — — — — — — — — —

Soit $M,N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. En utilisant la question précédente, pour tout $X \in \mathbb{C}^p$ tel que $\|X\| = 1$

$$\|MNX\| \leq |||M|||\, \|NX\| \leq |||M|||\,|||N|||\, \|X\| = |||M|||\,|||N|||$$

donc

$$|||MN||| = \sup_{\|X\|=1} \|MNX\| \leq |||M|||\, |||N|||.$$

(2)

---

4. (a) **Montrer que, pour tout $\lambda \in Sp(M)$, $|\lambda| \leq |||M|||$.**

— — — — — — — — — — — — —

Soit $\lambda \in Sp(M)$ et $V \in \mathbb{C}^p$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ. Donc

$$|\lambda|\, \|V\| = \|\lambda V\| = \|MV\| \leq |||M|||\, \|V\|.$$

Comme $V \neq 0$ alors $\|V\| \neq 0$ et donc $|\lambda| \leq |||M|||$.

(2)

(b) **En déduire que**

$$r(M) \leq |||M|||.$$

— — — — — — — — — — — — —

On a $|\lambda| \leq |||M|||$ pour tout $\lambda \in Sp(M)$, donc $r(M) = \max\limits_{\lambda \in Sp(M)} |\lambda| \leq |||M|||$.

(1)

---

5. (a) **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Sp(A^n) = \{\lambda^n,\ \lambda \in Sp(A)\}$.**

— — — — — — — — — — — — —

On a A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Donc A est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. En particulier $Sp(A) = Sp(T)$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est semblable à T^n et en particulier $Sp(A^n) = Sp(T^n)$. D'autre part

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \text{ et } T^n = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & (\lambda_p)^n \end{pmatrix}.$$

avec $\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\} = Sp(T) = Sp(A)$. Donc

$$Sp(A^n) = Sp(T^n) = \{(\lambda_1)^n, \dots, (\lambda_p)^n\} = \{\lambda^n : \lambda \in Sp(A)\}.$$

(3)

(b) **En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r(A^n) = (r(A))^n$.** ②

On a

$$\begin{aligned} r(A^n) &= \max\{|\mu| : \mu \in Sp(A^n)\} \\ &= \max\{|\lambda^n| : \lambda \in Sp(A)\} \\ &= \max\{|\lambda|^n : \lambda \in Sp(A)\} \\ &= (\max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\})^n = r(A)^n. \end{aligned}$$

(c) **Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,**

$$r(A) \leq |||A^n|||^{\frac{1}{n}}.$$

①

En appliquant la question **4-b** à $M = A^n$ on obtient $r(A)^n = r(A^n) \leq \|A^n\|$.
Donc $r(A) \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Partie III

1. **Montrer que, pour tout $z \in D_{r(A)}$, la matrice $zI - A$ est inversible.** ②

Soit $z \in D_{r(A)}$. Donc z n'est pas une valeur propre de A. Par suite la matrice $zI - A$ est inversible.

---

2. (a) **Soit $z \in D_{r(A)}$. Montrer que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, la fonction f_{ij} est une fraction rationnelle en z.** ③

On sait que

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(zI - A)}\ {}^t(\mathrm{Com}(zI - A)),$$

et que $\det(zI - A) = (-1)^p \chi_A(z)$ est un polynôme en z qui ne s'annulle pas sur $D_{r(A)}$. De plus les coefficients de la comatrice d'une matrice s'expriment comme sommes et produits de coefficients de cette matrice donc les coefficients de la matrice ${}^t(\mathrm{Com}(zI - A))$ sont des polynômes en z. On peut alors conclure que les coefficients de $(zI - A)^{-1}$ sont des fractions rationnelles en z qui n'ont pas de pôles dans $D_{r(A)}$. Donc, pour tout $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, f_{ij} est une fraction rationnelle en z qui n'a pas de pôles dans $D_{r(A)}$.

(b) **En déduire que, pour tout $i,j \in \{1, \ldots, p\}$, il existe un polynôme $P_{ij} \in \mathbb{C}[X]$ et une suite $(\alpha_{ij}(n))_n$ de nombres complexes tels que**

$$\forall z \in D_{r(A)},\quad f_{ij}(z) = P_{ij}(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{ij}(n)}{z^{n+1}}.$$

②

Soit $i,j \in \{1,\ldots,p\}$. Comme f_{ij} est une fraction rationnelle sans pôle dans $D_{r(A)}$, la question **2** de la **Partie I** permet de conclure qu'il existe un polynôme $P_{ij} \in \mathbb{C}[X]$ et une suite $(\alpha_{ij}(n))_n$ de nombres complexes tels que

$$\forall z \in D_{r(A)} : f(z) = P_{ij}(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{ij}(n)}{z^{n+1}}.$$

---

3. **Montrer que, pour tout $z \in D_{|||A|||}$, la série matricielle $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{z^{n+1}}$, est convergente et que**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}} = (zI - A)^{-1}.$$

Soit $z \in D_{|||A|||}$. Donc $|||\frac{A}{z}||| = \frac{|||A|||}{|z|} < 1$. Donc $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{z^n}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^n} = \frac{1}{z}\left(I - \frac{A}{z}\right)^{-1} = (zI - A)^{-1}.$$

2

---

4. **En déduire que, pour tout $z \in D_{|||A|||}$,**

$$f_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A^n)_{ij}}{z^{n+1}} \quad \textbf{où } A^n = ((A^n)_{ij})_{1\leq i,j\leq n}.$$

Soit $z \in D_{\|A\|}$. Comme la série matricielle $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{z^{n+1}}$ converge alors, pour tout $i,j \in \{1,...,p\}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A^n)_{ij}}{z^{n+1}}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A^n)_{ij}}{z^{n+1}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}}\right)_{ij} = \left((zI - A)^{-1}\right)_{ij} = f_{ij}(z).$$

2

---

5. **Montrer que, pour tout $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $P_{ij} = 0$ et $\alpha_{ij}(n) = (A^n)_{ij}$.**

Soient $i,j \in \{1,...,p\}$. On a

$$\forall z \in D_{r(A)} : f_{ij}(z) = P_{ij}(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{ij}(n)}{z^{n+1}} \quad \text{et} \quad \forall z \in D_{\|A\|} : f_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A^n)_{ij}}{z^{n+1}}.$$

En utilisant la question **4** de la **Partie I,** il vient que $P_{ij} = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{ij}(n) = (A^n)_{ij}$.

2

---

6. **En déduire que, pour tout $z \in D_{r(A)}$, la série matricielle $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{z^{n+1}}$ est convergente et que**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}} = (zI - A)^{-1}.$$

Soient $i,j \in \{1,...,p\}$. D'après les questions **2-b** et **5** de cette partie, $\forall z \in D_{r(A)}$

$$f_{ij}(z) = P_{ij}(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{ij}(n)}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A^n)_{ij}}{z^{n+1}}.$$

Donc les matrices $(zI - A)^{-1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}}$ ont les mêmes coefficients, par suite elles sont égales:
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}} = (zI - A)^{-1}$.

3

---

7. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) **Montrer que la suite** $\left(\frac{A^n}{(r(A)+\varepsilon)^n}\right)_n$ **converge vers 0.**

Comme $r(A)+\varepsilon \in D_{r(A)}$ alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{(r(A)+\varepsilon)^n}$ est convergente.

Donc la suite $\left(\frac{A^n}{(r(A)+\varepsilon)^n}\right)_n$ converge vers 0.

(2)

(b) **En déduire qu'il existe** n_0 **tel que, pour tout** $n \geq n_0$, $|||A^n|||^{\frac{1}{n}} \leq (r(A)+\varepsilon)$.

La suite $\left(\frac{A^n}{(r(A)+\varepsilon)^n}\right)_n$ converge vers 0 donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$|||\frac{A^n}{(r(A)+\varepsilon)^n}||| \leq 1.$$

Donc pour tout $n \geq n_0$: $|||A^n||| \leq (r(A)+\varepsilon)^n$ ou encore

$$|||A^n|||^{\frac{1}{n}} \leq r(A)+\varepsilon.$$

(1)

---

8. **Montrer que**

$$r(A) = \lim_{n\to+\infty} |||A^n|||^{\frac{1}{n}}.$$

(1)

Les questions **5-c** de la **Parie II** et **7-b** de cette partie montrent que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ r(A) \leq |||A^n|||^{\frac{1}{n}} \leq r(A)+\varepsilon.$$

Donc

$$r(A) = \lim_{n\to+\infty} |||A^n|||^{\frac{1}{n}}$$
