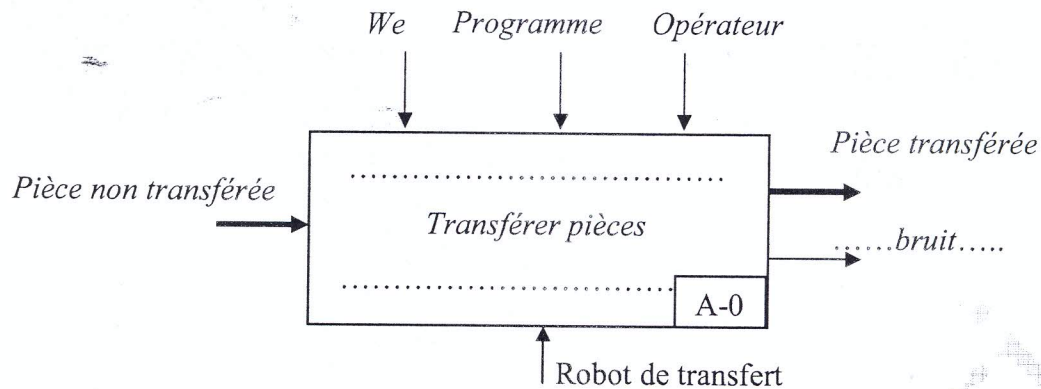


PARTIE A : TECHNOLOGIE DE CONCEPTION**A.1- ANALYSE FONCTIONNELLE****A.1.1-** Compléter l'actigramme A-0 suivant.**A.1.2-** En vous référant au schéma (figure 1), classer les composants du système en complétant le tableau ci-dessous par des croix dans la case correspondante :

| | Pré-actionneur | Actionneur | Effecteur | Capteur |
|-------------------------------|----------------|-------------|-------------|-------------|
| Vérin V1 | |X..... | | |
| Résistance électrique du Four | |X..... | | |
| Pince du robot | | |X..... | |
| Poinçon de la presse | | |X..... | |
| Pyromètre | | | |X..... |
| Distributeur de V1 |X..... | | | |

A.1.3 – Compléter le tableau suivant en indiquant le **nom de chaque capteur** puis **représenter le signal pouvant être délivré** à la sortie de celui ci.

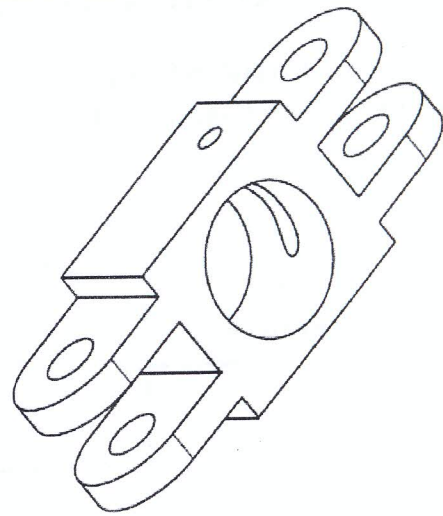
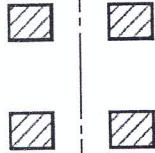
| Nom du capteur | Fonction | Signal d'entrée en fonction du temps | Signal à la sortie du capteur en fonction du temps |
|--------------------|--|--------------------------------------|--|
| Capteur logique | Délivrer une information binaire. | | |
| Capteur numérique | Convertir l'entrée en une suite d'impulsions. | | |
| Capteur analogique | Délivrer une grandeur physique proportionnelle à l'entrée. | | |

A.2- PROJECTION ORTHOGONALE, COUPE ET SECTIONS

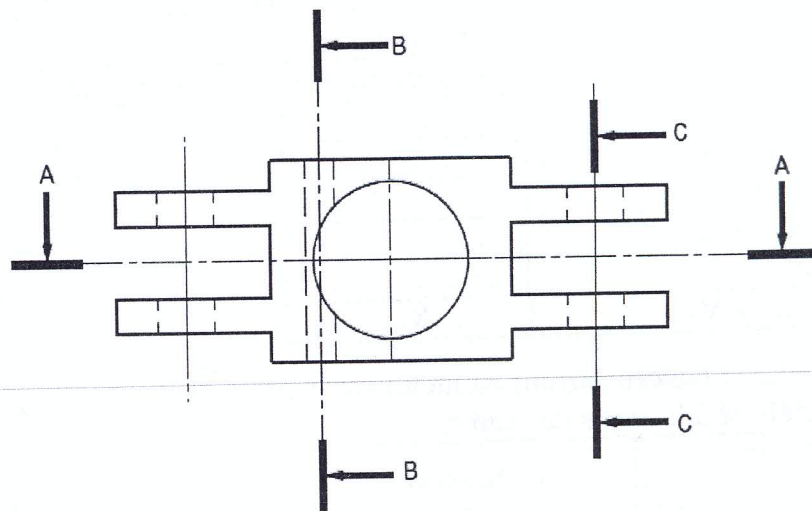
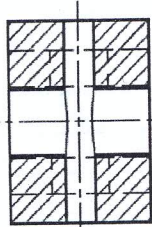
Compléter le dessin de la chape (page 2/16, Document réponses) par :

1. La vue de face ;
2. La vue de dessus en coupe A-A ;
3. La vue de droite en coupe B-B ;
4. La section sortie c-c

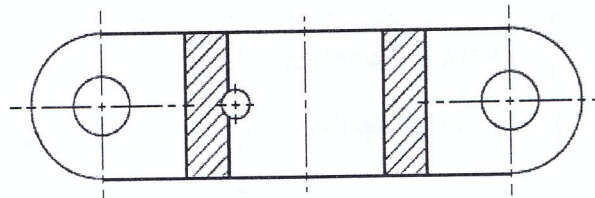
Section C-C



B-B



A-A



Echelle 1:1

Chape

Session 2016

Format A4

Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs

Atelier de Fabrication

Pièce d'un robot

Cor

PARTIE B : MECANIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES

Partie B.1 : Etude cinématique

L'objectif de cette partie est de justifier l'utilisation d'un seul actionneur pour entraîner les deux coulisseaux.

B.1.1. Déterminer, dans la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le torseur cinématique du vilebrequin (1) dans son mouvement par rapport au bâti (0) aux points A et C :

$$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 ;$$

$$\vec{V}(A \in 1/0) = \vec{V}(O \in 1/0) + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = \vec{0} - R \vec{x}_1 \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 = R \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 ;$$

$$\vec{V}(A \in 1/0) = R \dot{\theta}_1 \left(\cos(\theta_1) \vec{y}_0 - \sin(\theta_1) \vec{x}_0 \right) ;$$

$$\vec{V}(C \in 1/0) = \vec{V}(O \in 1/0) + \vec{CO} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = \vec{0} - R \vec{v} \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 = -R \dot{\theta}_1 \vec{u} ;$$

$$\vec{V}(C \in 1/0) = -R \dot{\theta}_1 \left(\cos(\theta_1 + \pi/6) \vec{x}_0 + \sin(\theta_1 + \pi/6) \vec{y}_0 \right) ;$$

| | | |
|---|--|--|
| $\{\mathcal{V}(1/0)\}_A = \left\{ \begin{array}{c c} \dots\dots 0 \dots\dots & \dots\dots -R \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \dots\dots \\ \dots\dots 0 \dots\dots & \dots\dots R \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \dots\dots \\ \dots\dots \dot{\theta}_1 \dots\dots & \dots\dots 0 \dots\dots \end{array} \right\}$ | | $\left. \begin{array}{l} B_0 \\ \\ A \end{array} \right\}$ |
| $\{\mathcal{V}(1/0)\}_C = \left\{ \begin{array}{c c} \dots\dots 0 \dots\dots & \dots\dots -R \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 + \pi/6) \dots\dots \\ \dots\dots 0 \dots\dots & \dots\dots -R \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 + \pi/6) \dots\dots \\ \dots\dots \dot{\theta}_1 \dots\dots & \dots\dots 0 \dots\dots \end{array} \right\}$ | | $\left. \begin{array}{l} B_0 \\ \\ C \end{array} \right\}$ |

B.1.2. Déterminer, dans la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, en fonction de θ_1 , θ_2 et de leurs dérivées, le torseur cinématique de la bielle (2) dans son mouvement par rapport au bâti (0) au point B :

$$\vec{\Omega}(2/0) = -\dot{\theta}_2 \vec{z}_0 ;$$

$$\vec{V}(B \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(2/0) ; \text{ avec : } \vec{V}(A \in 2/0) = \vec{V}(A \in 1/0)$$

$$\vec{V}(B \in 2/0) = R \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 - L_2 \vec{x}_2 \wedge -\dot{\theta}_2 \vec{z}_0 = R \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 ;$$

$$\vec{V}(B \in 2/0) = R \dot{\theta}_1 \left(\cos(\theta_1) \vec{y}_0 - \sin(\theta_1) \vec{x}_0 \right) - L_2 \dot{\theta}_2 \left(\cos(\theta_2) \vec{y}_0 + \sin(\theta_2) \vec{x}_0 \right) ;$$

| | | |
|---|--|--|
| $\{\mathcal{V}(2/0)\}_B = \left\{ \begin{array}{c c} \dots\dots 0 \dots\dots & \dots\dots -R \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - L_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \dots\dots \\ \dots\dots 0 \dots\dots & \dots\dots R \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) - L_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \dots\dots \\ \dots\dots -\dot{\theta}_2 \dots\dots & \dots\dots 0 \dots\dots \end{array} \right\}$ | | $\left. \begin{array}{l} B_0 \\ \\ B \end{array} \right\}$ |
|---|--|--|

B.1.3. Déterminer, dans la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, en fonction de $\dot{\lambda}$, le torseur cinématique du coulisseau (3) dans son mouvement par rapport au bâti (0) au point B.

$$\vec{\Omega}(3/0) = \vec{0} ;$$

$$\vec{V}(B \in 3/0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OB} \right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda} \vec{x}_0 ;$$

$$\{\mathfrak{V}(3/0)\}_B = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \dots\dots 0 \dots\dots \\ \dots\dots 0 \dots\dots \\ \dots\dots 0 \dots\dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots\dots \dot{\lambda} \dots\dots \\ \dots\dots 0 \dots\dots \\ \dots\dots 0 \dots\dots \end{matrix} \end{array} \right\} \begin{matrix} B_0 \\ \\ B \end{matrix}$$

B.1.4. En se basant sur la composition du vecteur vitesse au point B, déduire les relations scalaires entre $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\lambda}$.

$$\vec{V}(B \in 3/2) = \vec{0} ; \text{ Liaison pivot de (3) par rapport à (2) d'axe } (B, \vec{z}_0) ;$$

$$\Rightarrow \vec{V}(B \in 2/0) = \vec{V}(B \in 3/0) ;$$

$$\begin{cases} \dots\dots -R \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - L_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) = \dot{\lambda} \dots\dots\dots (1) \\ \dots\dots R \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) - L_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Pour la suite, on donne les torseurs cinématiques suivants :

$$\{\mathfrak{V}(4/0)\}_C = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5 \end{matrix} & \begin{matrix} -L_4 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5 \end{pmatrix} \cos(\theta_4 - \theta_5) - L_{51} \dot{\theta}_5 \sin(\theta_5) \\ -L_4 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5 \end{pmatrix} \sin(\theta_4 - \theta_5) - L_{51} \dot{\theta}_5 \cos(\theta_5) \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\} \begin{matrix} B_0 \\ \\ C \end{matrix} ;$$

$$\{\mathfrak{V}(6/0)\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_6 \end{matrix} & \begin{matrix} -(L_{51} + L_{52}) \dot{\theta}_5 \sin(\theta_5) - L_6 \dot{\theta}_6 \sin(\theta_6) \\ -(L_{51} + L_{52}) \dot{\theta}_5 \cos(\theta_5) + L_6 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_6) \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\} \begin{matrix} B_0 \\ \\ G \end{matrix} ;$$

$$\{\mathfrak{V}(7/0)\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\} \begin{matrix} B_0 \\ \\ G \end{matrix} .$$

B.1.5. En se basant sur la composition du vecteur vitesse au point C, déduire les relations scalaires entre

$$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_4 \text{ et } \dot{\theta}_5.$$

$\vec{V}(C \in 4/1) = \vec{0}$; Liaison pivot de (4) par rapport à (1) d'axe (C, \vec{z}_0) ;

$$\Rightarrow \vec{V}(C \in 4/0) = \vec{V}(C \in 1/0) ;$$

$$\begin{cases} \dots R \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 + \pi/6) = L_4 (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) \cos(\theta_4 - \theta_5) + L_{51} \dot{\theta}_5 \sin(\theta_5) \dots \dots \dots (3) \\ \dots R \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 + \pi/6) = L_4 (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) \sin(\theta_4 - \theta_5) + L_{51} \dot{\theta}_5 \cos(\theta_5) \dots \dots \dots (4) \end{cases}$$

B.1.6. En se basant sur la composition du vecteur vitesse au point G, déduire les relations scalaires entre

$$\dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6 \text{ et } \dot{\mu}.$$

$\vec{V}(G \in 6/7) = \vec{0}$; Liaison pivot de (6) par rapport à (7) d'axe (G, \vec{z}_0) ;

$$\Rightarrow \vec{V}(G \in 6/0) = \vec{V}(G \in 7/0) ;$$

$$\begin{cases} \dots - (L_{51} + L_{52}) \dot{\theta}_5 \sin(\theta_5) - L_6 \dot{\theta}_6 \sin(\theta_6) = \dot{\mu} \dots \dots \dots (5) \\ \dots - (L_{51} + L_{52}) \dot{\theta}_5 \cos(\theta_5) + L_6 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_6) = 0 \dots \dots \dots (6) \end{cases}$$

B.1.7. A partir du nombre de paramètres cinématiques du mécanisme et des équations scalaires cinématiques indépendantes, justifier le nombre d'actionneurs utilisés pour entraîner les deux coulisseaux.

On a 7 paramètres cinématiques et 6 équations scalaires indépendantes entre ces paramètres donc ce mécanisme est à 1 degré de mobilité et par suite il suffit d'un seul actionneur pour commander les deux coulisseaux.

L'objectif de la suite de cette étude mécanique est de valider le choix du moteur.

Nous adaptons les hypothèses suivantes :

- Le vilebrequin (1) est entraîné avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ constante ;
- On désigne par Σ le système regroupant les solides suivants : $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
- On rappelle que le mouvement est plan sur plan (de normal \vec{z}_0) par rapport au bâti (0).

Partie B.2 : Etude cinétique

B.2.1. Déterminer, dans la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ les torseurs cinétiques des solides (1), (3) et (7) du système Σ , au cours de leurs mouvements par rapport au bâti (0) :

$$\vec{R}_C(1/0) = m_1 \vec{V}(O \in 1/0) = \vec{0} ;$$

$$\vec{\sigma}_O(1/0) = I_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 ; \text{ car la liaison 1/0 est pivot d'axe } (O, \vec{z}_0) \text{ principal d'inertie pour (1)}$$

$$\{ \mathcal{C}(1/0) \}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ I_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O ;$$

$$\vec{R}_C(3/0) = m_3 \vec{V}(G_3 \in 3/0) = m_3 \dot{\lambda} \vec{x}_0 ;$$

$$\vec{\sigma}_{G_3}(3/0) = \vec{0} ; \text{ car 3 est en liaison glissière / à 0 et son centre d'inertie est sur l'axe } (O, \vec{x}_0)$$

$$\{ \mathcal{C}(3/0) \}_B = \left\{ \begin{array}{c} m_3 \dot{\lambda} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B ;$$

$$\vec{R}_C(7/0) = m_7 \vec{V}(G \in 7/0) = m_7 \dot{\mu} \vec{x}_0 ;$$

$$\vec{\sigma}_{G_3}(7/0) = \vec{0} ; \text{ car 7 est en liaison glissière / à 0 et son centre d'inertie est sur l'axe } (O, \vec{x}_0)$$

$$\{ \mathcal{C}(7/0) \}_G = \left\{ \begin{array}{c} m_7 \dot{\mu} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G .$$

B.2.2. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du système Σ au cours de son mouvement par rapport au bâti (0) :

$$Ec(\Sigma/0) = \sum_{i=1}^7 Ec(\Sigma_i/0) ;$$

$$Ec(2/0) = Ec(4/0) = Ec(5/0) = Ec(6/0) = 0 ; \text{ La masse des solides 2, 4, 5 et 6 est négligée ;}$$

$$Ec(1/0) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 ; \text{ mouvement de 1/0 est une rotation ;}$$

$$Ec(3/0) = \frac{1}{2} m_3 \dot{\lambda}^2 ; \text{ mouvement de 3/0 est une translation ;}$$

$$Ec(7/0) = \frac{1}{2} m_7 \dot{\mu}^2 ; \text{ mouvement de 7/0 est une translation ;}$$

$$Ec(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \left(I_1 \dot{\theta}_1^2 + m_3 \dot{\lambda}^2 + m_7 \dot{\mu}^2 \right) \dots\dots\dots$$

B.3.3. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures au système Σ au cours de son mouvement par rapport au bâti (0) :

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / 0) = P(0 \rightarrow 1/0) + P(0 \rightarrow 5/0) + P(0 \rightarrow 7/0) + P(\text{Motoréducteur} \rightarrow 1/0) + P(\text{Pièce} \rightarrow 3/0) + P(\text{Pièce} \rightarrow 7/0) + P(g \rightarrow 1/0) + P(g \rightarrow 3/0) + P(g \rightarrow 7/0) ;$$

$$P(0 \rightarrow 1/0) = P(0 \rightarrow 5/0) = 0 ; \text{ Liaisons parfaites}$$

$$P(0 \rightarrow 7/0) = \{\tau(0 \rightarrow 7)\}_G \cdot \{\vartheta(7/0)\}_G = \vec{R}(0 \rightarrow 7) \cdot \vec{V}(G \in 7/0) = -f Y_{07} \dot{\mu} ;$$

$$P(\text{Motoréducteur} \rightarrow 1/0) = C_e \dot{\theta}_1 ;$$

$$P(\text{pièce} \rightarrow 3/0) = -F_3 \vec{x}_0 \cdot \vec{V}(B \in 3/0) = -F_3 \dot{\lambda} ;$$

$$P(\text{pièce} \rightarrow 7/0) = -F_7 \vec{x}_0 \cdot \vec{V}(G \in 7/0) = -F_7 \dot{\mu} ;$$

$$P(g \rightarrow 1/0) = m_1 g \vec{x}_0 \cdot \vec{V}(O \in 1/0) = 0 ;$$

$$P(g \rightarrow 3/0) = m_3 g \vec{x}_0 \cdot \vec{V}(G_3 \in 3/0) = m_3 g \dot{\lambda} ;$$

$$P(g \rightarrow 7/0) = m_7 g \vec{x}_0 \cdot \vec{V}(G \in 7/0) = m_7 g \dot{\mu} ;$$

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / 0) = C_e \dot{\theta}_1 + (m_3 g - F_3) \dot{\lambda} + (m_7 g - F_7 - f Y_{07}) \dot{\mu}$$

B.3.4. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques intérieures au système Σ :

$$P_{\text{int}}(\Sigma) = P(1 \leftrightarrow 2) + P(2 \leftrightarrow 3) + P(1 \leftrightarrow 4) + P(4 \leftrightarrow 5) + P(5 \leftrightarrow 6) + P(6 \leftrightarrow 7) + P(3 \leftrightarrow 7) ;$$

$$P(1 \leftrightarrow 2) = P(2 \leftrightarrow 3) = P(1 \leftrightarrow 4) = P(4 \leftrightarrow 5) = P(5 \leftrightarrow 6) = P(6 \leftrightarrow 7) = 0 ; \text{ Liaisons parfaits}$$

$$P(3 \leftrightarrow 7) = P(3 \rightarrow 7/3) = \{\tau(3 \rightarrow 7)\}_B \cdot \{\vartheta(7/3)\}_B$$

$$P(3 \leftrightarrow 7) = \left\{ \begin{array}{c|c} -f Y_{37} & - \\ Y_{37} & - \\ - & N_{37} \end{array} \right\}_B \cdot \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \left(\begin{array}{c} \dot{\mu} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right) \\ - & 0 \\ - & - \end{array} \right\}_B = -f Y_{37} \left(\begin{array}{c} \dot{\mu} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right) ;$$

$$P_{\text{int}}(\Sigma) = -f Y_{37} \left(\begin{array}{c} \dot{\mu} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right)$$

B.3.5. En appliquant le Théorème de l'Energie Cinétique au système Σ au cours de son mouvement par rapport au bâti (0), donner l'expression reliant la puissance délivrée par le motoréducteur et les

deux forces F_3 et F_7 en fonction des dérivées premières et secondes des paramètres de mouvement μ et λ ainsi que d'autres paramètres et des données du problème.

$$\frac{d}{dt} E_C(\Sigma/0) = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0) + P_{\text{int}}(\Sigma) ;$$

$$m_3 \dot{\lambda} \ddot{\lambda} + m_7 \dot{\mu} \ddot{\mu} = C_e \dot{\theta}_1 + (m_3 g - F_3 - f Y_{37}) \dot{\lambda} + (m_7 g - F_7 - f (Y_{07} + Y_{37})) \dot{\mu} ;$$

$$P(\text{Motoréducteur} \rightarrow \Sigma/0) = \left[m_3 (\ddot{\lambda} - g) + F_3 + f Y_{37} \right] \dot{\lambda} + \left[m_7 (\ddot{\mu} - g) + F_7 + f (Y_{07} + Y_{37}) \right] \dot{\mu}$$

B.3.6. En supposant que les frottements au niveau des deux liaisons glissières sont négligeables et que : $\mu(t) = 5,45 \lambda^2(t)$. Donner l'expression simplifiée de la puissance délivrée par le motoréducteur en fonction du paramètre de mouvement λ et ses dérivées.

$$\mu(t) = 5,45 \lambda^2(t) \Rightarrow \dot{\mu}(t) = 10,9 \lambda(t) \dot{\lambda}(t) \quad \text{et} \quad \ddot{\mu}(t) = 10,9 \left(\dot{\lambda}^2(t) + \lambda(t) \ddot{\lambda}(t) \right) ; \quad f = 0.$$

$$P(\text{Motoréducteur} \rightarrow \Sigma/0) = \dot{\lambda} \left[m_3 (\ddot{\lambda} - g) + F_3 + \left(m_7 \left(10,9 (\dot{\lambda}^2 + \lambda \ddot{\lambda}) - g \right) + F_7 \right) 10,9 \lambda \right]$$

Partie B.4 : Validation du choix du moteur

Consulter le tableau B.1 et les figures B3 et B.4 du dossier présentation.

Au moment de la mise en forme de la pièce, la puissance délivrée par le motoréducteur, déterminée à la question (B.3.6), est maximale.

Cette puissance est atteinte pour la position basse du coulisseau (3) caractérisée par une valeur de $\lambda(t)$ proche de 0, une vitesse $\dot{\lambda}(t) = 0,018 \text{ m.s}^{-1}$ et une décélération $\ddot{\lambda}(t) = -5 \text{ m.s}^{-2}$.

On donne les masses des coulisseaux (3) et (7) : $m_3 = m_7 = 50 \text{ kg}$;

On prend l'accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$;

B.4.1. Donner l'expression simplifiée de la puissance maximale que peut délivrer le motoréducteur.

La puissance maximale est atteinte à la position $\lambda(t) = 0 \text{ m}$;

$$P(\text{Motoréducteur} \rightarrow \Sigma/0)_{\text{Max}} = \dot{\lambda} \left[m_3 \left(\ddot{\lambda} - g \right) + F_3 \right]$$

B.4.2. Vu les approximations faites on multipliera cette puissance par un coefficient $k = 1,2$. Calculer la valeur numérique de cette puissance maximale.

D'après le tableau B.1, $F_3 = 2.10^6 \text{ N}$;

$$P(\text{Motoréducteur} \rightarrow \Sigma/0)_{\text{Max}} = 18 \times 10^{-3} \times [50 \times (-5 - 10) + 2 \times 10^6] \times 1,2 = 43\,184 \text{ W}$$

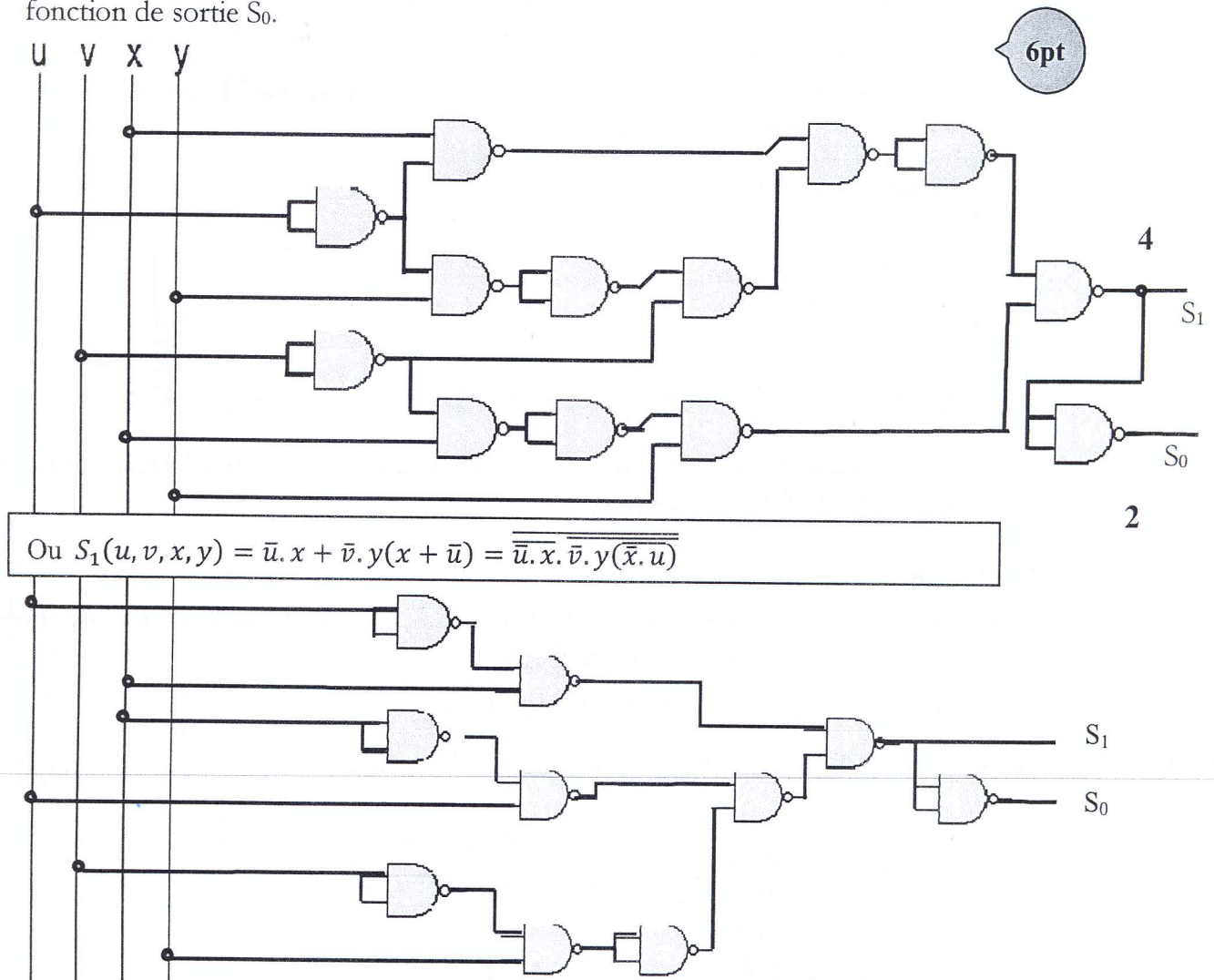
B.4.3. Comparer la valeur de cette puissance maximale à celle donnée par le tableau B.1 et valider le choix du constructeur.

$$P(\text{Motoréducteur} \rightarrow \Sigma/0)_{\text{Max}} = 43\,184 \text{ W} < \text{Puissance maximale : } P_{\text{mot}} = 45 \text{ kW} ;$$

Donc le choix du constructeur est validé.

C.1.2.3. Etablir le logigramme de S_1 simplifiée précédemment avec uniquement des portes NAND à deux entrées.

Sur la base du résultat de la question C.1.1, compléter ce même logigramme pour faire apparaître la fonction de sortie S_0 .



C.2. SYSTEME DE REGULATION DE LA TEMPERATURE DU FOUR

C.2.1. Analyse du comportement en boucle ouverte du modèle du four.

On considère que le four est soumis à un échelon de puissance de chauffe $q(t) = Q_0 \Gamma(t)$ où $\Gamma(t)$ représente l'échelon unité, avec $Q_0 = 2 \text{ KW}$. On rappelle que le modèle proposé pour approcher le comportement du

four est : $H(p) = \frac{T(p)}{Q(p)} = \frac{K_f}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ avec : $K_f = 0.4^\circ\text{C/W}$; $\tau_1 = 20\text{s}$; $\tau_2 = 300\text{s}$.

C.2.1.1. Calculer la valeur initiale $T(0)$ et la valeur finale $T(\infty)$ de la température du four T (sans tenir compte de $T_a(t)$)

..... $T(0) = \lim_{t \rightarrow 0} T(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pT(p)$... avec $T(p) = H(p).Q(p)$... et $Q(p) = \frac{Q_0}{p}$

..... $T(0) = 0$

..... $T(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pT(p)$; $T(\infty) = Q_0 K_f$

2

2

4pt

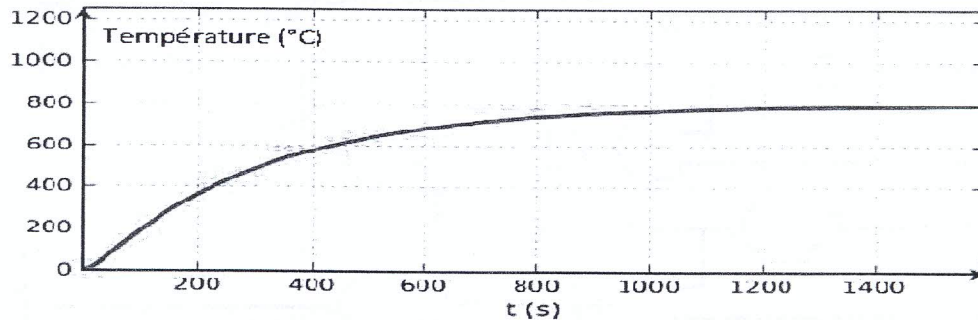
..... $T(\infty) = 2000 \times 0.4 = 800^\circ\text{C}$

$T(0) = \dots 0^\circ\text{C} \dots$

$T(\infty) = \dots 800^\circ\text{C}$

C.2.1.2. Tracer l'allure de cette réponse indicielle en température tout en précisant ses éléments caractéristiques et la nature de la réponse obtenue.

- Eléments Caractéristiques (tangente à l'origine, valeur en régime permanente: $T(\infty) = 800^\circ\text{C}, \dots$),
- Nature de la réponse obtenue : réponse apériodique



4pt

2

Dans la suite une étude de la régulation de température est présentée en adoptant plusieurs choix de correcteurs $C(p)$ afin de satisfaire les performances souhaitées.

C2.2. Régulation de la température dans le four

A partir du schéma bloc du système présenté sur la figure C.3 du dossier présentation, données et hypothèses. L'expression de $T(p)$ peut se mettre sous la forme :

$$T(p) = H_1(p) \cdot T_c(p) - H_2(p) \cdot T_a(p)$$

C2.2.1. Déterminer les expressions de $H_1(p)$ et $H_2(p)$ en fonction de $C(p)$, $H(p)$, A et k_c .

4pt

$$H_1(p) = \left[\frac{T(p)}{T_c(p)} \right]_{T_a=0} = k_c \frac{C(p) \cdot A \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot A \cdot H(p) \cdot k_c}$$

$$H_2(p) = \left[\frac{T(p)}{T_a(p)} \right]_{T_c=0} = \frac{1}{1 + C(p) \cdot A \cdot H(p) \cdot k_c}$$

2

2

$$H_1(p) = \dots k_c \frac{C(p) \cdot A \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot A \cdot H(p) \cdot k_c} \dots$$

$$H_2(p) = \dots \frac{1}{1 + C(p) \cdot A \cdot H(p) \cdot k_c} \dots$$

Correcteur à action proportionnelle : $C(p) = K$.

On ne tient pas compte de l'entrée $T_a(t)$ ($T_a(t)=0$) (pour les Questions C2.2.2 à C2.2.4)

C2.2.2. Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{v_m(p)}{e(p)}$ en fonction de $C(p)$.

$$H_{BO}(p) = C(p) \cdot A \cdot H(p) \cdot k_c$$

2pt

$$H_{BO}(p) = \dots C(p) \cdot A \cdot H(p) \cdot k_c \dots$$

C.2.2.3. Déterminer la valeur du gain K pour avoir un coefficient d'amortissement ξ en boucle fermée égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les valeurs du gain statique K_s , de la pulsation propre non amortie ω_0 du système en boucle fermée ;

8pt

$$\begin{aligned} FTBF = H_1(p) &= \left[\frac{T(p)}{T_c(p)} \right]_{T_a=0} = k_c \frac{C(p).A.H(p)}{1 + C(p).A.H(p).k_c} \\ &= \frac{k_c.K.A.K_f}{\tau_1.\tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2)p + 1 + k_c.K.A.K_f} = \frac{K_s}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1} \end{aligned}$$

$$\dots \text{ Avec } K_s = \frac{k_c.K.A.K_f}{1+k_c.K.A.K_f} ; \omega_0 = \sqrt{\frac{1+k_c.K.A.K_f}{\tau_1.\tau_2}} ; \xi = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1.\tau_2(1+k_c.K.A.K_f)}}$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies K = \frac{1}{k_c.A.K_f} \left[\frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2.\tau_1.\tau_2} - 1 \right]$$

3

3

2

$$K = \frac{1}{k_c.A.K_f} \left[\frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{2.\tau_1.\tau_2} - 1 \right] = 9.41$$

$$K_s = \frac{k_c.K.A.K_f}{1+k_c.K.A.K_f} = 0.88$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1+k_c.K.A.K_f}{\tau_1.\tau_2}} = 37.10^{-3} \text{ rd/s}$$

C.2.2.4. En se référant à la figure C.6 du dossier «Présentation, données et hypothèses», déterminer le temps de réponse ($t_{5\%}$).

2pt

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7 \implies t_{5\%} \times \omega_0 \approx 3 \implies t_{5\%} = \frac{3}{\omega_0}$$

$$t_{5\%} = \dots 81.08 \text{ s}$$

C2.2.5. Calculer l'erreur statique de position pour une consigne en température $T_c(t)=500^\circ\text{C}$ et une perturbation de $T_a(t)=30^\circ\text{C}$ pour la valeur du gain K trouvée en C2.2.3.

$$\dots \varepsilon(p) = k_c(T_c(p) - T(p)) \dots \text{ avec } T(p) = H_1(p)T_c(p) - H_2(p)T_a(p) ; T_c(p) = \frac{500}{p} ; T_a(p) = \frac{30}{p}$$

$$\dots \varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) ; \varepsilon(\infty) = \frac{500k_c}{1+A.K.K_f.k_c} + \frac{30k_c}{1+A.K.K_f.k_c}$$

2pt

$$\varepsilon(\infty) = \dots 0,62 \text{ V } (62^\circ\text{C})$$

C2.2.6. Conclure quant à la satisfaction des performances imposées en termes de précision avec ce type de correcteur.

2pt

Le critère de précision imposé (erreur statique nulle avec rejet de perturbation) n'est pas respecté.

Correcteur à action proportionnelle et intégrale (PI) : $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right) = K \left(\frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}\right)$

avec $K > 0$ et $\tau_i > 0$

Afin d'améliorer les performances du système de régulation, nous allons considérer une nouvelle correction de type PI.

C2.2.7. Sans faire de calcul et en justifiant votre réponse, quelle est l'erreur statique de position pour une consigne $T_c(t)$ d'amplitude 500°C et une perturbation $T_a(t)$ d'amplitude 30°C ?

..... $\varepsilon(\infty) = 0$, car le système corrigé devient de classe 1 et l'intégration apportée par le correcteur est placée en amont de la perturbation.

2pt

 $\varepsilon(\infty) = \dots 0 \dots$

La réponse indicielle en boucle fermée du système est représentée par la figure C.4 du dossier présentation, données et hypothèses.

C2.2.8. Déterminer graphiquement le temps de réponse $t_{5\%}$, le dépassement $D(\%)$ et le temps de pic (t_p).

... $t_{5\%} = 2010\text{s} = 33,5\text{ mn}$

... $D(\%) = 100 \cdot \frac{T_{\max} - T_\infty}{T_\infty} = 23\%$

6pt

... $t_p = 971\text{s} (930\text{s}-996\text{s})$

2

2

2

 $t_{5\%} = 2010\text{s} = 33,5\text{ mn} (> 2000\text{s})$
 $D(\%) = \dots 23\% \dots$
 $t_p = \dots 971\text{s} (930\text{s}-996\text{s})$

C2.2.9. Conclure quant à la satisfaction de performances souhaitées en termes de rapidité avec ce type de correcteur PI.

..... $t_{5\%} = 2010\text{s} = 33,5\text{ mn} > 16\text{ mn}$: temps de réponse exigé,

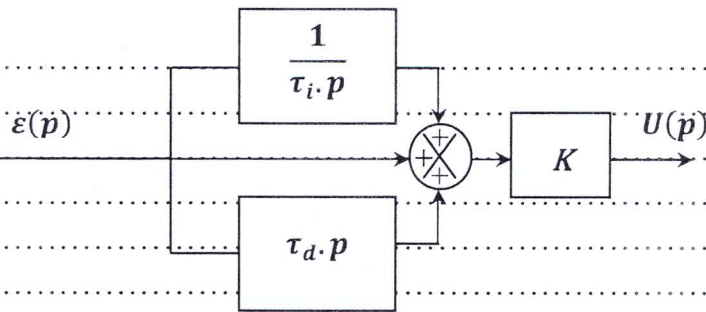
2pt

Le critère de rapidité avec ce type de correcteur n'est pas satisfait.

Correcteur de type (PID) : $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p \right)$

Pour améliorer la rapidité du système en boucle fermée, nous allons considérer un régulateur de type PID.

C2.2.10. Donner le schéma bloc faisant apparaître les blocs élémentaires de ce correcteur d'entrée $\varepsilon(p)$ et de sortie $U(p)$.



2pt

C2.2.11. Les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec ($K = 0.996$, $\tau_i = 83s$, $\tau_d = 12s$) sont donnés sur la figure C.5 du dossier « présentation, données et hypothèses ». Donner à partir de ces diagrammes la marge de phase et la marge de gain.

Marge de phase ($M\phi$)=.....

4pt

2

$M\phi = \dots 50^\circ \dots$

Marge de gain (MG)=

2

$MG = \dots \infty \dots$

C2.2.12. La réponse indicielle en boucle fermée du système, à un échelon de température de valeur $T(t) = 500\Gamma(t)$ et à $T_a(t) = 0$, est représentée par la figure C.4 du dossier présentation, données et hypothèses, déterminer le temps de réponse $t_{5\%}$ et l'erreur statique.

..... $t_{5\%} = 875s = 14,58 mn$

4pt

..... $\varepsilon(\infty) = 0$

2

2

$t_{5\%} = \dots 875s$

$\varepsilon(\infty) = \dots 0$

C2.2.13. Les critères de performances (stabilité, précision, rapidité) imposés sont-ils vérifiés par ce correcteur PID ?

Les critères de performances imposés sont tous satisfaits :

2pt

..... $\varepsilon(\infty) = 0$

..... $M\phi = 50^\circ > M\phi_{imposée} 45^\circ$; $MG = \infty > MG_{imposée} 8dB$

..... $t_{5\%} = 14,58 mn < t_{5\% imposée} 16mn$