REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2016

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2016

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Date: Mercredi 1 Juin 2016	**Heure :** 8 H	**Durée:** 3 heures	**Nb pages:** 4

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Problème

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2 et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie n. On note par :

- $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.
- $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée et à cœfficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = a_0 + a_1X + ...a_pX^p$, on note par :
  - ⋆ id l'application identité de $\mathcal{L}(E)$.
  - ⋆ $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p\ fois}$ et $f^0 = \text{id}$.
  - ⋆ $P(f) = a_0\text{id} + a_1f + ...a_pf^p$.
  - ⋆ $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E); g \circ f = f \circ g\}$.
  - ⋆ $\mathbb{K}[f] = \{P(f);\ \ P \in \mathbb{K}[X]\}$.
  - ⋆ $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.
  - ⋆ Si $P(f) = 0$, on dit que P est un polynôme annulateur de f.
  - ⋆ On dit que f est une homothétie s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $f = \lambda\text{id}$.
  - ⋆ Pour toute partie finie A, $Card(A)$ désigne le nombre d'éléments de A.

Partie I

Dans cette partie, f désigne un élément non nul de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathbf{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1) Soit $\lambda \in Sp(f)$ et x un vecteur propre de f associé à λ.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(x) = \lambda^k x$.

b) En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)(x) = P(\lambda)x$.

c) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de f, alors $P(\lambda) = 0$.

d) En déduire que, si P est un polynôme n annulateur on nul de f, on a $Card(Sp(f)) \leq$ degré(P).

2) a) Vérifier que $\mathbb{K}[f]$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b) Soit P un polynôme annulateur de f de degré p dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}[f] = Vect(\mathrm{id}, f, \dots, f^{p-1})$.

c) Montrer que $\mathbb{K}[f] = Vect(\mathrm{id}, f, \dots, f^{n-1})$.

d) En déduire que $\dim \mathbb{K}[f] \leq n$.

3) a) Vérifier que $\mathcal{C}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$.

4) Soit $x \in E \backslash \{0\}$ et $y \in E$. Montrer que si (x, y) est liée, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$. Ce résultat reste t-il vrai si $x = 0$?

5) On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ liée.

a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

b) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_1 + \cdots + e_n) = \lambda(e_1 + \cdots + e_n)$.

c) En déduire que f est une homothétie.

6) On suppose que f n'est pas une homothétie.

a) Montrer qu'il existe $x_1 \in E$ tel que $(x_1, f(x_1))$ libre. On pose $x_2 = f(x_1)$.

b) Justifier l'existence de $x_3, \dots, x_n \in E$ tel que $(x_1, \dots, x_n)$ soit une base de E.

c) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g(x_1) = x_1$ et $g(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$.

i) Calculer $g \circ f(x_1)$ et $f \circ g(x_1)$.

ii) En déduire que $g \notin \mathcal{C}(f)$.

7) En déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$ si et seulement si f est une homothétie.

Partie II

Dans cette partie, f désigne un élément non nul et **diagonalisable** de $\mathcal{L}(E)$. On pose :

- $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ (les λ_i sont distincts deux à deux).
- Pour tout $1 \leq i \leq k$, $E_{\lambda_i}(f)$ désigne le sous espace propre de f associé à λ_i et n_i sa dimension.
- On rappelle que $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$.

- $\mathbf{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E adaptée à cette décomposition.
- $\mathcal{B} = ((h_{ij})_{1\le i,j\le n})$ la famille de $\mathcal{L}(E)$ définie par :

$$h_{ij}(v_m) = \delta_{jm} v_i, \quad \text{pour tout } 1 \le i, j, m \le n$$

  où δ_{jm} désigne le symbole de Kronecker.
  C'est à dire $\delta_{jm} = 0$ si $j \neq m$ et $\delta_{jm} = 1$ si $j = m$.
- Pour tout $1 \le l \le k$, on pose I_l l'intervalle entier

$$I_l = [\![n_1 + ... + n_{l-1} + 1, n_1 + ... + n_l]\!]$$

  avec la convention $I_1 = [\![1, n_1]\!]$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = ((h_{ij})_{1\le i,j\le n})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

2) a) Vérifier que $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de f.

   b) En déduire que $\dim \mathbb{K}[f] = k$.

3) a) Vérifier que $\displaystyle\bigcup_{l=1}^{k} I_l = [\![1, n]\!]$.

   b) Vérifier que si $1 \le l \neq l' \le k$, on a $I_l \cap I_{l'} = \emptyset$.

   c) Montrer que $Card(\displaystyle\bigcup_{l=1}^{k} I_l^2) = \sum_{l=1}^{k} n_l^2$.

4) Soit $1 \le l \le k$. Montrer que $h_{ij} \in \mathcal{C}(f)$ pour tout $(i, j) \in I_l^2$.

5) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.

   a) Montrer l'existence de $(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{K}^{n^2}$ tel que $g = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} \alpha_{ij} h_{ij}$

   b) Soit $1 \le l \le k$ et $m \in I_l$. Montrer que $\alpha_{im} = 0 \quad \forall i \notin I_l$.

6) En déduire que $Vect\left(h_{ij}\,;\ (i,j) \in \displaystyle\bigcup_{l=1}^{k} I_l^2\right) = \mathcal{C}(f)$.

7) En déduire que $\dim \mathcal{C}(f) = \displaystyle\sum_{l=1}^{k} n_l^2$.

8) On suppose de plus dans cette question que $k = n$. Montrer que $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

9) **Exemple**

   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer $\mathcal{C}(f)$.

Partie III

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathcal{L}(E)$ de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ (les λ_i sont distincts deux à deux). Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{C}(f^p)$.

2) On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et f est diagonalisable.

   a) En utilisant la question 1) a) Partie I, montrer que $\dim \mathcal{C}(f) = \dim \mathcal{C}(f^{2p+1})$.

   b) En déduire que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(f^{2p+1})$.

   c) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

      i) $\mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(f^{2p})$.

      ii) $\mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(f^2)$.

      iii) $\lambda_i \neq -\lambda_j$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq k$.

3) On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et f est diagonalisable. Les résultats de 2)b) et 2)c) restent-ils vraie?

4) On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et f n'est pas diagonalisable. Les résultats de 2)b) et 2)c) restent-ils vraie?

5) On suppose dans cette question que f est diagonalisable.

   a) On suppose que $\dim \mathcal{C}(f) = 3$.

      i) Montrer que $n = k = 3$.

      ii) En déduire $\mathcal{C}(f)$.

   b) Montrer que si $\dim \mathcal{C}(f) \leq 11$, alors $n - k \leq 2$.