Tunisie juin 2016

Correction

MP

Algebre

DUREE 3H

Partie I

(1) $f(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$.

(a) Par recurence.

(b) Consequence immediate de a).

(c) $P(f) = 0$, donc $P(\lambda)x = 0$, comme $x \neq 0$, alors $P(\lambda) = 0$.

(d) Soit P un polynome annulateur de f et $\lambda \in sp(f)$. D'apres b), on a λ est une racine de P. Donc $sp(f) \subset \{\text{zeros de } P\}$ et par suite $Card(sp(f)) \leq Card(\{\text{zeros de} P\}) = \deg(P)$.

(2) (a) evident.

(b) La deuxième inclusion est évidente. Réciproquement, Soit $Q(f) \in \mathbb{K}[f]$, alors $Q(f) = P(f) \circ S(f) + R(f)$, avec $deg(R) \leq p-1$. d'ou $Q(f) = R(f)$ d'ou la démonstration.

(c) Il suffit de remarquer que le polynome caractéristique, qui est de degré n est un polynome annulateur de f puis on applique 1)c).

(d) $\dim \mathbb{K}[f] \leq Card(id, f, ..., f^{n-1}) = n$.

(3) (a) Evident.

(b) Evident.

(4) Soit $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $ax + by = 0$. Si $b = 0$, alors $ax = 0$, comme $x \neq 0$, alors $a = 0$ contraduction. Donc $y = -\frac{a}{b}x$. Ce résultat n'est plus valable si $x = 0$, en effet $\dim E \geq 2$, soit alors $y \neq 0$, alors (x, y) liée mais l'écriture $y = \lambda x = 0$ est impossible.

(5) Soit $(x, f(x))$ liée.

(a) $e_i \neq 0$, et $(e_i, f(e_i)$ liée, donc on applique 4).

(b) $(e_1, ..., e_n)$ base donc $e_1 + ... + e_n \neq 0$, on applique 4).

(c) En utilisant a) et b), on trouve $\lambda = \lambda_i$, pour tout i. Donc pour tout i, $f(e_i) = \lambda e_i$ pour tout i par suite f est l'homothétie de rapport λ.

(6) On suppose que f n'est pas une homothétie.

(a) Conséquence de 5)c).

(b) Théorème de la base incomplète.

(c) (i) $g \circ f(x_1) = 0$ et $f \circ g(x_1) = x_2 \neq 0$.

(ii) Consequence de $c)i)$.

(7) Si f est une homothétie, il est clair qu' on a égalité. Reciproquement, Supposons que f n'st pas une homothétie, alors d'aprés 6) g n'est pas dans $C(f) = \mathcal{L}(E)$ ce qui est impossible.

Partie II

(1) Comme le cardinal de cette famille est égale à $\dim \mathcal{L}(E)$, alors il suffit de montrer q'elle est libre. En effet supposons que $\sum \alpha_{ij} h_{ij} = 0$, on applique cette égalité a e_k, on trouve $\sum \alpha_{ik} e_i = 0$ et par suite $\alpha_{ik} = 0$ pour tout i. ceci étant pour tout k, donc $\alpha_{ik} = 0$ pour tout i, k.

(2) (a) Il suffit d'appliquer le lemme de décomposition de noyau.

(b) Comme $\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$ est un polynome annulateur, alors d'aprés $I)2)b)$, $\mathbb{K}[f] = Vect(id, f, ..., f^{k-1})$. Pour terminer il suffit de vérifier que cette derenière famille est libre. En effet si non on aura un polynome non nul de degré strictement inferieur a k qui annule f donc d'aprés $I)1)d)$, $k = Card(sp(f)) \leq \deg(P) < k$. Ce qui est impossible.

(3) (a) Il suffit de remarquer que $n_1 + ... + n_k = n$.

(b) Supposons que $l < l'$, alors pour tout $a \in I_l$, on a $a \leq n_1 + ... + n_l < n_1 + ... + n_l + ... + n_{l'-1} + 1$ et par suite $a \notin I_{l'}$.

(c) pour tout $l \neq l'$, on a $I_l^2 \cap I_{l'}^2 = \emptyset$ et donc $Card(\cup I_l^2) = \sum Card(I_l^2) = \sum n_l^2$.

(4) Soit $1 \leq l \leq k$ et $(i,j) \in I_l^2$ donc $n_1 + ... + n_{l-1} + 1 \leq i, j \leq n_1 + ... + n_l$. Pour tout $1 \leq m \leq n$, il existe l' tel que $m \in I_{l'}$. On a $(h_{ij} \circ f - f \circ h_{ij})(v_m) = \delta_{jm}(\lambda_l - \lambda_{l'})v_i$. Si $\lambda_l = \lambda_{l'}$, alors c'est bon. Si non $m \notin I_l$ et dans ce cas $m \neq j$ et par suite $\delta_{jm} = 0$. dans les deux cas $(h_{ij} \circ f - f \circ h_{ij})(v_m) = 0$.

(5) (a) Evident.

(b) Soit $1 \leq l \leq k$ et $m \in I_l$. comme $g^i n C(f)$, alors $g(f(v_m)) = g(f(e_m))$. Donc $\lambda_l g(v_m) = \sum \alpha_{ij} \delta_{jm} f(v_i)$ et par suite $\lambda_l \sum \alpha_{ij} \delta_{jm} v_i = \sum \alpha_{ij} \delta_{jm} f(v_i)$, d'ou $\lambda_l \sum \alpha_{im} v_i = \sum \alpha_{im} f(v_i)$.

Si $i \notin I_l$, alors $f(v_i) = \lambda_{l'_i} v_i$ pour un certain $l' \neq l$. dans ce cas on aura:

$$\lambda_l \sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} v_i = \sum \alpha_{im} f(v_i) = \sum_{i \in I_l} \alpha_{im} \lambda_l v_i + \sum_{i \notin I_l} \alpha_{im} \lambda_{l'_i} v_i.$$

ce qui donne $\sum_{1 \leq i \leq n, i \notin I_l} (\lambda_l - \lambda_{l'}) \alpha_{im} v_i = 0$ comme cette famille est libre, on a $\alpha_{im} = 0$, pour tout $i \notin I_l$.

(6) Une inclusion est donnée par 4).

La deuxième inclusion est déduite de 5). En effet, Soit $g = \sum \alpha_{ij} h_{ij} \in C(f)$.

On a $g = \sum_{1\leq l\leq k} (\sum_{m\in I_l} (\sum \alpha_{im} h_{im})) = \sum_{1\leq l\leq k} (\sum_{m\in I_l} (\sum_{i\in I_l} \alpha_{im} h_{im})) = \sum_{1\leq l\leq k} (\sum_{(m,i)\in I_l^2} \alpha_{im} h_{i}$

(7) Consequence immediate de $II)6)$ et $I)3)c)$.

(8) d'aprés $I)3)b)$, on a $\mathbb{K}(f) \subset C(f)$.

Si $k = n$, alors $n_l = 1$, pour tout $1 \leq l \leq n$ et donc $\dim C(f) = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n = k = \dim \mathbb{K}(f)$ (d'aprés $II)2)b)$).

(9) Exemple

$Sp(f) = \{0, -1, 1\}$, donc $k = n = 3$, donc $C(f) = Vect(id, f, f^2)$.

Partie III

(1) Evident.

(2) (a) Si $sp(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$, alors $sp(f^{2p+1}) = \{\lambda_1^{2p+1}, ..., \lambda_k^{2p+1}\}$. comme l'application dans $\mathbb{R}$ qui a tout x associe x^{2p+1} est bijective, alors $\dim E_{\lambda_i}(f) = \dim E_{\lambda_i^{2p+1}}(f^{2p+1})$ et par suite $\dim C(f) = \dim C(f^{2p+1})$, d'ou l'égalité.

(b) Consequence immediate de ce qui precède.

(c)
- $[(i) \Longrightarrow (ii)]$ Evident.
- $[(ii) \Longrightarrow (iii)]$ Si $sp(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$, alors $sp(f^2) = \{\lambda_1^2, ..., \lambda_k^2\}$. $\dim C(f^2) = \sum_{\{i:\lambda_i=0,\text{ou}-\lambda_i\notin sp(f)\}} (\dim E_{\lambda_i}(f))^2 + \sum_{\{i:-\lambda_i\in sp(f)-\{0\}\}} (\dim E_{\lambda_i}(f) + \dim E_{-\lambda_i}(f))^2 = \sum_{1\leq i\leq k} (\dim E_{\lambda_i}(f))^2 + 2 \sum_{\{i:-\lambda_i\in sp(f)-\{0\}\}} (\dim E_{\lambda_i}(f))(\dim E$
  par suite $\dim C(f^2) = \dim C(f)$ si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq k$, $-\lambda_i \notin sp(f)$, c'est a dire $-\lambda_j \neq \lambda_i$.
- $[(iii) \Longrightarrow (i)]$ meme raisonnement que dans $2)b)$ si on remarque que $a^2 = b^2$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

(3) Il suffit de prendre l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique $diag(1, 1, j)$.

$\dim C(f) = 2^2 + 1 = 5$, d'autre part $f^3 = id$ donc $C(f^3) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$.

Il suffit de prendre l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base canonique $diag(1, 1, i, i)$.

$\dim C(f) = 2^2 + 2^2 = 8$, d'autre part $f^4 = id$ donc $C(f^4) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$.

(4) Il suffit de prendre f nilpotent d'indice 2. $C(f^2) = C(f^3) = \mathcal{L}(E)$. Or $C(f) \neq \mathcal{L}(E)$ car f n'est pas une homothetie.

(5) (a) On a $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, donc $n = k = 3$.

(b) $C(f) = \mathbb{K}(f) = Vect(id, f, f^2)$.

(c) Si $\dim C(f) \leq 11$, alors $n - k \leq 2$. ce résultat n'est plus valable a partir de 12. En effet, remarquons que $11 \leq 4^2$, donc, pour tout $1 \leq i \leq k$, on a $n_i \leq 3$. De plus, s'il existe i tel que $n_i = 3$, alors il est unique et les autres n_j sont tous egaux a 1.

Si pour tout i, $n_i < 3$, alors f possede au plus 2 valeurs propres d'ordre 2, car $2^2 + 2^2 + 2^2 = 12 > 11$.

Finalement $n - k = \sum\limits_{1 \leq i \leq k} (n_i - 1) \in \{0, 1, 2\}$.

Si $\dim C(f) = 12$, alors on peut ecrire $2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$, et dans ce cas $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ et par suite $n = 6$ ce qui donne $n - k = 3$.