République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles
de Formation d'Ingénieurs
Session 2017

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2017

CORRIGÉ CONCOURS MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Session 2017	Date: 25 Mai 2017	Heure: 8H	Durée : 4 heures

Exercice 1 (15 Points)

1. **Justifier que**

$$X \sim \mathcal{B}(n,p),\ Y \sim \mathcal{B}(n,q) \text{ et } Z \sim \mathcal{B}(n,pq).$$

- Au cours de chaque trajet, Ahmed peut " être contrôlé " (succès) avec la probabilité p ou " être non contrôlé" (échec) avec la probababilité $1-p$. Comme les contrôles sont supposés indépendants les uns des autres alors la v.a.d. X représente le nombre de succès au cours de n expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes et toutes de paramètre p. Donc $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

- Au cours de chaque trajet, Ahmed peut "frauder" (succès) avec la probabilité q ou "ne pas frauder" (échec) avec la probabilité $1-q$. Comme les fraudes sont supposées indépendantes les unes des autres alors la v.a.d. Y représente le nombre de succès au cours de n expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes et toutes de paramètre q. Donc $Y \sim \mathcal{B}(n,q)$.

- Au cours de chaque trajet, Ahmed peut "être contrôlé alors qu'il n'a pas de ticket" (succès) avec une probabilité (à déterminer) r ou " ne pas être contrôlé alors qu'il n'a pas de ticket " (échec) avec la probabilité $1-r$. Comme les fraudes sont supposées indépendants les unes des autres et ne dépendent pas non plus des éventuels contrôles qu'Ahmed aurait eu, alors la v.a.d. Z représente le nombre de succès au cours de n expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes et toutes de paramètre r. Notons A l'événement " Ahmed est contrôlé ", B l'événement "Ahmed fraude" et $C = A \cap B$ l'événement "Ahmed se fait contrôler alors qu'il n'a pas de ticket ". Comme A et B sont indépendants alors

$$r = P(C) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = pq.$$

Donc $Z \sim \mathcal{B}(n,pq)$.

2. **Donner (sans calculs) les espérances** $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ **et** $\mathrm{E}(Z)$.

Comme $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}(n,q)$ et $Z \sim \mathcal{B}(n,pq)$ alors

$$E(X) = np,\ E(Y) = nq \text{ et } E(Z) = npq.$$

3. **En considérant les événements $(X=0)$ et $(Z=1)$, montrer que les variables aléatoires X et Z ne sont pas indépendantes.**

$$P(X=0)=C_n^0 p^0(1-p)^n=(1-p)^n,$$
$$P(Z=1)=C_n^1(pq)^1(1-pq)^{n-1}=npq(1-pq)^{n-1}, \quad \text{et}$$
$$P((X=0)\cap(Z=1))=P(\emptyset)=0.$$

Donc $P((X=0)\cap(Z=1))\neq P(X=0)P(Z=1)$. Par suite les variables aléatoires X et Z ne sont pas indépendantes.

---

4. **Montrer que**

$$G=bY-aZ.$$

Ahmed dépenserait nb dinars sur l'année s'il ne fraudait jamais. En fraudant, il perd a dinars lors de chacun de ses Z contrôles et perd b dinars lors de chacun des $(n-Y)$ trajets lors desquels il ne fraude pas. Donc

$$G=nb-(aZ+b(n-Y))=bY-aZ.$$

---

5. **Calculer $E(G)$. En déduire la valeur minimale a_0 qu'il faut donner à l'amende pour que l'étudiant soit en moyenne perdant sur l'année?.**

On a

$$E(G)=E(bY-aZ)=bE(Y)-aE(Z)=bnq-anpq=nq(b-ap).$$

L'étudiant est en moyenne perdant sur l'année si et seulement si $E(G)\leq 0$ si et seulement si $nq(b-ap)\leq 0$ si et seulement si $\frac{b}{p}\leq a$. Donc la valeur minimale qu'il faut donner à l'amende pour que l'étudiant soit en moyenne perdant sur l'année est $a_0=\frac{b}{p}$.

Exercice 2 (25 Points)

1. (a) **En utilisant le théorème de Weierstrass, montrer que, pour tout $u\in E$**

$$d(u,F)=0.$$

Soit $u\in E$. D'après le théorème de Weierstrass il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômiales (donc d'éléments de F) qui converge uniformément vers u sur $[0,1]$. Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$0\leq d(u,F)\leq \|u-f_n\|_\infty,$$

et $\|u-f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $d(u,F)=0$.

(b) **Montrer que pour tout $u\in E$: $\mathcal{D}_F(u)=\begin{cases}\{u\} & \text{si } u\in F.\\ \emptyset & \text{si } u\notin F.\end{cases}$**

Soit $u\in E$ et $f\in F$. Alors $f\in\mathcal{D}_F(u)$ si et seulement si $0=d(u,F)=\|u-f\|$ si et seulement si $u=f$. Donc, si $u\in F$ alors $\mathcal{D}_F(u)=\{u\}$ et si $u\notin F$ alors $\mathcal{D}_F(u)=\emptyset$.

---

2. **Dans cette question, on suppose que E est un espace préhilbertien. Déterminer, pour tout $u \in E$, $d(u,F)$ et $\mathscr{D}_F(u)$.**

Pour tout $u \in E$, $d(u,F) = \|u - P_F(u)\|$ et $\mathscr{D}_F(u) = \{P_F(u)\}$ où $P_F(u)$ désigne le projeté orthogonal de u sur F.

---

3. (a) **Montrer que Φ est continue.**

$$|\Phi(f) - \Phi(g)| = |\|u - f\| - \|u - g\|| \leq \|(u-f) - (u-g)\| = \|f - g\|.$$

Donc Φ est 1-lipschitzienne et par suite continue.

(b) **Montrer que $K = \{f \in F \ / \ \Phi(f) \leq \|u\|\}$ est un compact non vide de F.**

- On a $\Phi(0) = \|u\| \leq \|u\|$ donc $0 \in K$ et en particulier K est non vide.
- Pour tout $f \in K$,

$$\|f\| = \|f - u + u\| \leq \|f - u\| + \|u\| = \Phi(f) + \|u\| \leq 2\|u\|.$$

Donc K est borné dans F.

- On a $K = \Phi^{-1}(]-\infty, \|u\|])$ avec Φ continue et $]-\infty, \|u\|]$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Donc K est fermé dans F.

Maintenant K est un fermé borné dans l'env de dimension finie F, donc K est un compact de F.

(c) **En déduire qu'il existe $f_0 \in K$ tel que**

$$\Phi(f_0) \leq \Phi(f) \qquad \textbf{pour tout } f \in K.$$

Comme K est un compact de F et Φ est continue sur F alors Φ est bornée sur K et atteint ses bornes. En particulier Φ admet un minimum sur K. Donc il existe $f_0 \in K$ tel que $\Phi(f_0) \leq \Phi(f)$ pour tout $f \in K$.

(d) **Montrer que**

$$\Phi(f_0) \leq \Phi(f) \qquad \textbf{pour tout } f \in F.$$

Remarquons d'abord que $0 \in K$ et donc $\Phi(f_0) \leq \Phi(0) = \|u\|$.

Soit $f \in F$.

Si $f \in K$ alors $\Phi(f_0) \leq \Phi(f)$ d'après la question précédente.

Si $f \notin K$ alors (par définition de K) $\|u\| < \Phi(f)$. Donc $\Phi(f_0) \leq \Phi(0) = \|u\| < \Phi(f)$.

En conclusion $\Phi(f_0) \leq \Phi(f)$ pour tout $f \in F$.

(e) **En déduire que $\mathscr{D}_F(u) \neq \emptyset$.**

D'après la question précédente il existe $f_0 \in F$ tel que
$\|u - f_0\| = \Phi(f_0) \leq \|u - f\| = \Phi(f)$ pour tout $f \in F$. Donc

$$d(u,F) = \min\{\|u - f\| : f \in F\} = \|u - f_0\|.$$

Il s'ensuit que $f_0 \in \mathscr{D}_F(u)$ et alors $\mathscr{D}_F(u) \neq \emptyset$.

---

4. **Soient** $u \in E$, $f \in F$ **et** $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$.

(a) **Montrer que** $d(u+f,F) = d(u,F)$.

Pour tout $g \in F$

$$d(u+f,F) \leq \|u+f-(f+g)\| = \|u-g\|$$

car $f+g \in F$. Donc $d(u+f,F)$ est un minorant de $\{\|u-g\| : g \in F\}$. Par suite

$$d(u+f,F) \leq \inf\{\|u-g\| : g \in F\} = d(u,F).$$

En appliquant cette dernière inégalité avec $u' = u+f$ et $f' = -f$ on obtient

$$d(u,F) = d(u'+f',F) \leq d(u',F) = d(u+f,F).$$

Donc $d(u+f,F) = d(u,F)$.

(b) **Montrer que** $d(\alpha u,F) = \alpha d(u,F)$.

Pour tout $g \in F$

$$\frac{1}{\alpha} d(\alpha u,F) \leq \frac{1}{\alpha}\|\alpha u - \alpha g\| = \|u-g\|.$$

car $\alpha g \in F$. Donc $\frac{1}{\alpha} d(\alpha u,F)$ est un minorant de $\{\|u-g\| : g \in F\}$. Par suite

$$\frac{1}{\alpha} d(\alpha u,F) \leq \inf\{\|u-g\| : g \in F\} = d(u,F).$$

En appliquant cette dernière inégalité avec $u' = \alpha u$ et $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$ on obtient

$$\alpha d(u,F) = \frac{1}{\alpha'} d(\alpha' u',F) \leq d(u',F) = d(\alpha u,F).$$

Donc $d(\alpha u,F) = \alpha d(u,F)$.

---

5. **Montrer que pour tout** $u \in E$ **et tout** $f \in \mathcal{P}_F(u)$

$$d(u-f,F) = \|u-f\|.$$

Soit $u \in E$ et $f \in \mathcal{P}_F(u)$. Donc $\|u-f\| = d(u,F)$. D'après la question précédente (4-a) $d(u,F) = d(u-f,F)$ (car $f \in F$). Donc $d(u-f,F) = \|u-f\|$.

---

6. **En déduire que si** $F \subsetneq E$ **alors il existe** $w \in E$ **tel que** $\mathbf{d}(w,F) = \|w\| = 1$.

Supposons que $F \subsetneq E$ et considérons $u \in E$ avec $u \notin F$. Soit $f \in \mathscr{D}_F(u)$. D'après la question précédente $d(u-f,F) = \|u-f\|$. Posons $w = \frac{u-f}{\|u-f\|}$ et observons que $\|w\| = 1$ et que, à l'aide de la question précédente (4–b),

$$d(w,F) = d\left(\frac{u-f}{\|u-f\|},F\right) = \frac{1}{\|u-f\|} d(u-f,F) = 1.$$

---

7. (a) **Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$**

$$d\left(w_{n+1}, \operatorname{Vect}(w_0,\dots,w_n)\right) = \|w_{n+1}\| = 1.$$

On pose $w_0 = 0$ et $w_1 \in E$ un vecteur unitaire arbitraire. Alors

$$d\left(w_1, \operatorname{Vect}(w_0)\right) = d\left(w_1, \{0\}\right) = \|w_1\| = 1.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons qu'on a construit $w_0,\dots,w_{n+1}\in E$ tels que pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$

$$d\left(w_{k+1}, \operatorname{Vect}(w_0,\dots,w_k)\right) = \|w_{k+1}\| = 1.$$

En appliquant la question précédente au sous espace de dimension finie $F = \operatorname{Vect}(w_0,\dots,$ on peut conclure qu'il existe $w_{n+2}\in E$ tel que

$$d\left(w_{n+2}, \operatorname{Vect}(w_0,\dots,w_{n+1})\right) = \|w_{n+2}\| = 1.$$

Le principe de récurrence permet de conclure qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$d\left(w_{n+1}, \operatorname{Vect}(w_0,\dots,w_n)\right) = \|w_{n+1}\| = 1.$$

(b) **Montrer que pour tout $m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\neq n$**

$$\|w_m - w_n\| \geq 1.$$

Soit $m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\neq n$. Sans perdre la généralité on peut supposer que $n-1\geq m\geq 0$. Donc $w_m\in\operatorname{Vect}(w_0,\dots,w_{n-1})$. Par suite

$$1 = d\left(w_n, \operatorname{Vect}(w_0,\dots,w_{n-1})\right) \leq \|w_n - w_m\|.$$

Donc $\|w_m - w_n\|\geq 1$.

(c) **En déduire que la suite $(w_n)_n$ n'admet aucune valeur d'adhérence.**

Supposons que $(w_n)_n$ admet une valeur d'adhérence λ et considérons une sous suite $\left(w_{\phi(n)}\right)_n$ de $(w_n)_n$ qui converge vers λ. On a, d'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\left\|w_{\phi(n+1)} - w_{\phi(n)}\right\| \geq 1.$$

On fait tendre n vers $+\infty$ on obtient $0 = \|\lambda-\lambda\|\geq 1$. Absurde. Donc la suite $(w_n)_n$ n'admet aucune valeur d'adhérence.

(d) **Montrer alors que la boule unité fermée $B_f(0,1)$ de E n'est pas compacte.**

La suite $(w_n)_n$ est contenue dans la boule unité fermée $B_f(0,1)$ et n'admet aucune valeur d'adhérence. Donc $B_f(0,1)$ n'est pas compacte.

Problème I

Partie I

Soit $a > 0$.

1. **Pour quelles valeurs du réel s la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+a)^s}$, est elle convergente. On pose sous cette condition**

$$\psi_a(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s}.$$

On a $\frac{1}{(n+a)^s} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{n^s}$: terme général d'une série à termes positifs convergente si, et seulement si, $s > 1$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+a)^s}$, converge si, et seulement si, $s > 1$.

---

2. **Montrer que** $\forall s > 1,\ \psi_a(s) = \frac{1}{a^s} + \psi_{a+1}(s)$.

Pour tout $s > 1$,

$$\psi_a(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s} = \frac{1}{a^s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s} = \frac{1}{a^s} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+a)^s} = \frac{1}{a^s} + \psi_{a+1}(s).$$

---

3. **Montrer que ψ_a est continue sur** $]1,+\infty[$.

Pour tout entier n, la fonction $f_n :\ s \mapsto \frac{1}{(n+a)^s} = e^{-s\ln(n+a)}$ est continue sur $]1,+\infty[$.
Soit $[\alpha,\beta] \subset]1,+\infty[$ et $s \in [\alpha,\beta]$, on a :

$$|f_n(s)| \leq \frac{1}{(n+a)^\alpha}.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+a)^\alpha}$, converge alors la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $]1,+\infty[$. Ainsi ψ_a est continue sur $]1,+\infty[$.

---

4. (a) **Montrer que $\lim_{s\mapsto 1^+} \psi_a(s) = +\infty$ lorsque $a \geq 1$.**

Lorsque $a \geq 1$, ψ_a est décroissante sur $]1,+\infty[$ en tant que somme d'une série des fonctions décroissantes, donc elle admet une limite $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, à droite en 1.

Soit N un entier supérieur ou égal à 1. On a $\psi_a(s) \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+a)^s}$.

En faisant tendre s vers 1^+, on obtient, $\lambda \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+a)}$, or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+a}$ diverge et est à termes positifs, donc $\lim_{N\mapsto+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+a} = +\infty$. D'où $\lambda = +\infty$.

(b) **Déterminer $\lim_{s\mapsto+\infty} \psi_a(s)$ lorsque $a \geq 1$.**

La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur les intervalles de la forme $[\alpha,+\infty[$, $\alpha > 1$.

De plus, on a
- Pour $a>1$, $\lim\limits_{s\mapsto+\infty} f_n(s)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
- Pour $a=1$, $\lim\limits_{s\mapsto+\infty} f_0(s)=1$ et $\lim\limits_{s\mapsto+\infty} f_n(s)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ainsi, $\lim\limits_{s\mapsto+\infty}\psi_a(s)=0$ si $a>1$ et $\lim\limits_{s\mapsto+\infty}\psi_1(s)=1$.

(c) **En Déduire $\lim\limits_{s\mapsto1^+}\psi_a(s)$ et $\lim\limits_{s\mapsto+\infty}\psi_a(s)$ lorsque $0<a<1$.**

On a $\psi_a(s)=\dfrac{1}{a^s}+\psi_{a+1}(s)$, donc

$$\lim_{s\mapsto1^+}\psi_a(s)=\frac{1}{a}+\lim_{s\mapsto1^+}\psi_{a+1}(s)=+\infty \quad et \quad \lim_{s\mapsto+\infty}\psi_a(s)=\lim_{s\mapsto+\infty}\frac{1}{a^s}+\lim_{s\mapsto+\infty}\psi_{a+1}(s)=+\infty.$$

(d) **A-t-on convergence uniforme sur $]1,+\infty[$ de la série $\sum\limits_{n\geq0}\dfrac{1}{(n+a)^s}$.**

On a pour tout entier n, $\lim\limits_{n\mapsto1^+} f_n(s)=\dfrac{1}{n+a}$ et la série $\sum\limits_{n\geq0}\dfrac{1}{n+a}$, diverge, donc d'après le théorème de la double limite pour les séries de fonctions, la série $\sum\limits_{n\geq0}\dfrac{1}{(n+a)^s}$, ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

---

5. (a) **Soient α, β deux réels tels que $\alpha>1$. Montrer que la série numérique $\sum\limits_{n\geq2}\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, est convergente.**

On choisit un réel λ tel que $1<\lambda<\alpha$. On a $\lim\limits_{\mapsto\infty}\dfrac{n^\lambda}{n^\alpha(\ln n)^\beta}=\lim\limits_{n\mapsto\infty}\dfrac{n^{\lambda-\alpha}}{(\ln n)^\beta}=0$ et par suite $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}=o(\dfrac{1}{n^\lambda})$. Donc la série $\sum\limits_{n\geq2}\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, est convergente.

(b) **Montrer que ψ_a est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ et donner l'expression de ses dérivées successives sous la forme de la somme d'une série.**

- Pour tout entier n, la fonction f_n est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall s>1,\ f_n^{(k)}(s)=(-1)^k\frac{(\ln(n+a))^k}{(n+a)^s}.$$

- Pour tout $\alpha>1$ et $s\geq\alpha$, on a

$$|f_n^{(k)}(s)|\leq\frac{(\ln(n+a))^k}{(n+a)^\alpha}.$$

Comme $\ln(n+a)=\ln n+\ln(1+\dfrac{a}{n})\underset{n\mapsto+\infty}{\sim}\ln n$, donc $\dfrac{(\ln(n+a))^k}{(n+a)^\alpha}\underset{n\mapsto+\infty}{\sim}\dfrac{(\ln n)^k}{n^\alpha}$ qui est terme général d'une série convergente.

Donc ψ_a est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall s>1,\quad \psi_a^{(k)}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\ln(n+a))^k}{(n+a)^s}.$$

---

6. (a) **Montrer que l'intégrale** $\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ **converge si, et seulement si,** $s > 0$.

La fonction $t \mapsto t^{s-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. De plus, on a $t^{s-1}e^{-t} \underset{t\mapsto 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{s-1}}$ qui est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $s > 0$.

D'autre part, $\forall s > 0$, $t^{s-1}e^{-t} \underset{t\mapsto+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ converge si, et seulement si, $s > 0$.

(b) **Montrer que pour tout** $s > 0$, $\Gamma(s) > 0$ **et** $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

La fonction $t \mapsto t^{s-1}e^{-t}$ est continue et est strictement positive sur $]0,+\infty[$, donc $\Gamma(s) > 0$.

On intègre par parties dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$, en posant, pour $s > 0$, $U'(t) = t^{s-1}$ et $V(t) = e^{-t}$ on aura $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$..

(c) **Montrer que pour tout** $s > 1$,

$$\psi_a(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}e^{-ax}\,dx.$$

Soit $s > 1$. Pour tout $x > 0$, on a $\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+a)x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s > 1$, $x \mapsto e^{-(n+a)x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} |e^{-(n+a)x}x^{s-1}|\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-(n+a)x}x^{s-1}\,dx \underset{u=(n+a)x}{=} \frac{\Gamma(s)}{(n+a)^s}.$$

Comme la série $\sum_{n\geq} \frac{1}{(n+a)^s}$, est convergente donc on peut intervertir somme et intégrale, on aura

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}e^{-ax}\,dx = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+a)x}x^{s-1}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(n+a)x}x^{s-1}dx = \psi_a(s)\Gamma(s).$$

Partie II

1. Soit $s > 0$. **Montrer que l'application** $f_s : x \mapsto \frac{E(x)-x}{x^{s+1}}$ **est continue par morceaux sur** $[1,+\infty[$.

La fonction f_s est continue sur chaque intervalle de la forme $]k,k+1[$, $k \in \mathbb{N}^*$ puisque la partie entière y est constante. Elle admet une limite nulle à droite en 1. De plus, $\forall k \geq 2$,

$$\lim_{x\mapsto k^+} f_s(x) = \frac{k-k}{k^{s+1}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto k^-} f_s(x) = -\frac{1}{k^{s+1}}.$$

D'où, f_s est continue sur tout intervalle de la forme $]k,k+1[$, $k \in \mathbb{N}^*$ et elle admet une limite finie à droite et à gauche en tout entier non nul, par suite, f_s est continue par morceaux sur tout segment de $[1,+\infty[$. Ainsi, f_s est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.

---

2. **Montrer que l'application** $F : s \mapsto \int_1^{+\infty} f_s(x)\,dx$ **est continue sur** $]0,+\infty[$.

On a

– $s \mapsto \dfrac{E(x)-x}{x^{s+1}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, $\forall x \geq 1$.

– $x \mapsto \dfrac{E(x)-x}{x^{s+1}}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$, $\forall s > 0$.

– Pour tout $\alpha > 0$ et $s \geq \alpha$, $|f_s(x)| \leq \dfrac{1}{x^{s+1}} \leq \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

---

3. **Montrer que, pour tout** $s > 1$,

$$\psi(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + sF(s).$$

Soit N un entier supérieur ou égal à deux.

$$\begin{aligned}
\int_1^N f_s(x)dx &= \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1} f_s(x)dx = \sum_{n=1}^{N-1}\left(n\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^{s+1}}\right) - \int_1^N \frac{dx}{x^s} \\
&= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{n}{(n+1)^s}\right) - \frac{1}{s-1}\left(1-\frac{1}{N^{s-1}}\right) \\
&= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{s-1}\left(1-\frac{1}{N^{s-1}}\right) \\
&= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} - \frac{1}{sN^s} - \frac{1}{s-1}\left(1-\frac{1}{N^{s-1}}\right).
\end{aligned}$$

On fait tendre N vers $+\infty$, on aura

$$F(s) = \frac{1}{s}\psi(s) - \frac{1}{s-1},$$

ce qui donne

$$\psi(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + sF(s).$$

---

4. **Montrer que la suite** $\left(\gamma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)_n$ **est convergente.**

On a

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc la série $\sum_{n\geq 2}(\gamma_n - \gamma_{n-1})$ converge et par suite la suite $(\gamma_n)_n$ est convergente.

---

5. **Montrer que** $F(1) = \gamma - 1$.

On a $F(1)=\int_1^{+\infty}\frac{E(x)-x}{x^2}$. Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}\int_1^N \frac{E(x)-x}{x^2}dx &= \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{E(x)-x}{x^2}dx=\sum_{n=1}^{N-1} n\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^2}-\int_1^N\frac{dx}{x}\\ &= \sum_{n=1}^{N-1} n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\ln N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1}-\ln N=\gamma_N-1.\end{aligned}$$

En passant à la limite, on aura $F(1)=\gamma-1$.

---

6. **Montrer alors que**

$$\lim_{s\mapsto 1^+}\left(\psi(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma.$$

Par continuité de F en 1 et en utilisant la Question 2)-Partie II, on aura

$$\lim_{s\mapsto 1^+}\left(\psi(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\lim_{s\mapsto 1^+}\left(1+sF(s)\right)=1+F(1)=\gamma.$$

Partie III

1. **Déterminer B_1 et B_2.**

$$B_1=-\frac{1}{2}\binom{2}{0}B_0=-\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad B_2=-\frac{1}{3}B_0-\frac{1}{3}\binom{3}{1}=\frac{1}{6}.$$

---

2. **Montrer que pour tout entier non nul n,** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0$.

On a $n+2=\binom{n+2}{n+1}$, donc $(n+2)B_{n+1}=-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}B_k$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}B_k+\binom{n+2}{n+1}B_{n+2}=0\Rightarrow\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k}B_k=0.$$

---

3. **Montrer que pour tout entier n, $|B_n|\leq n!$. (*On rappelle que* $e\approx 2.7...$).**

On raisonne par récurrence. Pour $n=0$, $|B_0|=1\leq 1=0!$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $|B_k|\leq k!$ pour tout entier $k\leq n$, on a,

$$\begin{aligned}|B_{n+1}| &\leq \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}|B_k|\leq\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+2)!}{(n+2-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(n+2-k)!}\\ &\leq \sum_{k=2}^{n+2}\frac{(n+1)!}{k!}\leq(n+1)!\left(\sum_{k=0}^{n+2}\frac{1}{k!}-2\right)\\ &\leq (n+1)!\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}-2\right)\leq(n+1)!(e-2)\leq(n+1)!\end{aligned}$$

---

4. **Que peut on dire du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}z^n$.**

   On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\frac{B_n}{n!}| \leq 1$. Comme le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ est 1 donc celui de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}z^n$ est supérieur ou égal à 1.

---

5. **Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| < R$,**

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n.$$

   On a, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$.
   Donc pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| < R$,

$$\begin{aligned}(e^z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n &= z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n = z\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n+1-k)!}\right)z^n \\ &= zB_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n}B_k\binom{n+1}{k}\right)z^n = z.\end{aligned}$$

   L'égalité $(e^z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n = z$ n'est pas valable pour $z = 2i\pi$ puisque le terme à gauche est nul en ce point. Ceci prouve que $R \leq 2\pi$.

---

6. **Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbf{cotan}(\pi x) = i + \frac{2i}{e^{2i\pi x}-1}$.**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$i + \frac{2i}{e^{2i\pi x}-1} = i + \frac{2ie^{-i\pi x}}{e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}} = \frac{i(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}) + 2ie^{-i\pi x}}{2i\sin(\pi x)} = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \text{cotan}(\pi x).$$

---

7. **En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $|x| < \frac{R}{2\pi}$,**

$$\pi x\,\mathbf{cotan}(\pi x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2i\pi x)^n.$$

   On a, $|2i\pi x| < 1 \Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{2\pi}$.

$$\begin{aligned}\frac{2i}{e^{2i\pi x}-1} &= \frac{1}{\pi x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2i\pi x)^n = \frac{1}{\pi x}\left(B_0 + B_1 2i\pi x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2i\pi x)^n\right) \\ &= -i + \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\pi x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2i\pi x)^n.\end{aligned}$$

Donc, d'après la question précédente, $\pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2i\pi x)^n$.

---

8. **Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que la famille $\left(\frac{x^{2n}}{k^{2n}}\right)_{n\geq 1, k\geq 1}$ est sommable.**

La famille $\left(\frac{x^{2n}}{k^{2n}}\right)_{n\geq 1, k\geq 1}$ est sommable.

En effet, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{|x|^{2n}}{k^{2n}}$ converge et sa somme est $|x|^{2n}\psi(2n)$ car $|\frac{x}{k}| < 1$. D'autre part, la série $\sum_{n\geq 1} \psi(2n)|x|^n$ converge puisque $\psi(2n)|x|^n \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} |x|^n$ qui est terme général d'une série convergente puisque $|x| < 1$.

---

9. **En admettant la relation $\pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - k^2}$, $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, montrer que**

$$\pi x \operatorname{\mathbf{cotan}}(\pi x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \psi(2n) x^{2n}.$$

Puisque pour $|\frac{x}{k}| < 1$, $\frac{x^2}{x^2-k^2} = -\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^2}{1-\frac{x^2}{k^2}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{k^{2n}}$, donc, par sommabilité de la famille $\left(\frac{x^{2n}}{k^{2n}}\right)_{n\geq 1, k\geq 1}$, on aura

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2-k^2} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{k^{2n}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{k^{2n}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi(2n)x^{2n}.$$

D'après l'égalité $\pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2-k^2}$, $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on aura finalement, $\pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \psi(2n)x^{2n}$.

---

10. **En déduire que pour tout entier non nul p,**

$$\psi(2p) = (-1)^{p+1}\frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!}B_{2p} \quad \textbf{et} \quad B_{2p+1} = 0.$$

Soit g la fonction définie sur $]-1,1[$ par $g(x) = \pi x \operatorname{cotan}(\pi x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.
D'après ce qui précède, g est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$g(x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \psi(2n)x^{2n} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{B_{2p}}{(2p)!} 2^p \pi^{2p} x^{2p}.$$

Par unicité du développement, on aura

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \psi(2p) = (-1)^{p+1}\frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!}B_{2p} \quad \text{et} \quad B_{2p+1} = 0.$$

11. **Déterminer alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$.**

Le rayon de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$ est celui de la série $\sum_{p\geq 0} \frac{B_{2p}}{(2p)!} z^{2p}$ puisque $B_{2p+1} = 0 \; \forall \; p \in \mathbb{N}^*$. D'autre part,

$$\left|\frac{B_{2p}}{(2p)!}\right| \underset{p\mapsto+\infty}{\sim} \frac{2\psi(2p)}{(2\pi)^{2p}} \underset{p\mapsto+\infty}{\sim} \frac{2}{(2\pi)^{2p}}.$$

Or, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\lim_{p\mapsto+\infty} \left|\frac{(2\pi)^{2p} z^{2p+2}}{(2\pi)^{2p+2} z^{2p}}\right| = \frac{|z|^2}{4\pi^2}.$$

La série converge absolument, si $|z| < 2\pi$, et diverge si $|z| > 2\pi$.
Ainsi, la rayon de convergence vaut 2π.