Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2017

Concours Mathématiques et Physique
Correction de l'Epreuve de Mathématiques II

Partie I – Quotient de Rayleigh : Cas général

1. Les applications $\varphi_1 : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, (X,Y) \mapsto \langle AX, Y\rangle$ et $\varphi_2 : \Omega \to \Omega \times \Omega, X \mapsto (X,X)$ sont bilinéaire et linéaire respectivement. En dimension finie, elles sont donc continues. Ainsi $\varphi_1 \circ \varphi_2 : X \mapsto \langle AX, X\rangle$ est continue sur Ω. De plus, $\psi : X \mapsto \|X\|$ est 1-lipschitzienne d'ou $X \mapsto \|X\|^2$ est continue. Finalement, R_A est quotient des fonctions continues sur Ω donc elle est continue.

---

2. (a) ψ étant continue et $S_n = \psi^{-1}(\{1\})$: image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ donc S_n est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, S_n est bornée donc S_n est un fermé borné en dimension finie donc c'est un compact.

   (b) $\frac{X}{\|X\|}$ est un vecteur unitaire et $R_A\left(\frac{X}{\|X\|}\right) = \left\langle A\frac{X}{\|X\|}, \frac{X}{\|X\|}\right\rangle = R_A(X)$. Puisque $S_n \subset \Omega$ donc $R_A(S_n) \subset R_A(\Omega)$. Réciproquement, si $X \in \Omega$ alors $\frac{X}{\|X\|} \in S_n$ et on a $R_A(X) = R_A\left(\frac{X}{\|X\|}\right) \in R_A(S_n)$. D'où la deuxième inclusion et par suite l'égalité.

   (c) $R_A(\Omega) = R_A(S_n)$ est l'image d'un compact de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par une application continue donc c'est un compact de $\mathbb{R}$ et par suite R_A est bornée et atteint ses bornes.

---

3. (a) $\forall t \in [0,1], (1-t)X + tY \neq 0$; car sinon, il existe $\alpha = 1-t, \beta = t, (\alpha,\beta) \neq (0,0)$ tels que $\alpha X + \beta Y = 0$ et donc (X,Y) est liée ce qui est absurde.

   (b) $X \neq 0$, la famille (X) est donc libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $n \geq 2$ donc il existe $Z \neq 0$ tel que (X,Z) est libre.
   La famille (Y,Z) est aussi libre. Sinon, comme $Z \neq 0$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Y = \alpha Z$. De même (X,Y) est liée et $Y \neq 0$ donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $X = \beta Y$ et par suite $X = \alpha\beta Z$ ce qui est absurde car (X,Z) est libre.

   (c) Si (X,Y) est une famille libre, alors on considère $\gamma(t) = (1-t)X + tY$, $t \in [0,1]$.
   Sinon, $\gamma : [0,1] \to \Omega$ est défini par

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)X + 2tZ & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (-2t+2)Z + (2t-1)Y & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

   Dans les deux cas, et pour $X \neq Y$, γ est un chemin continu d'extrémités X et Y contenu dans Ω. Par suite Ω est une partie connexe par arcs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

---

4. $R_A(\Omega)$ est l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue, alors c'est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$ et donc un intervalle (fermé borné d'après 2.c.) et donc $R_A(\Omega) = [m, M]$.

---

5. (a) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tA = A = -A$ et donc $A = 0$. Ainsi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. On en déduit que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors : $\forall X \in \Omega$,

$$R_A(X) = \frac{{}^t(AX)X}{\|X\|^2} = -\frac{{}^tXAX}{\|X\|^2} = -R_A(X)$$

   d'où $R_A(X) = 0$.

(c) En décomposant la matrice $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ et en utilisant la question précédente on trouve l'égalité demandée.

Partie II – Quotient de Rayleigh : Cas d'une matrice symétrique

6. A est symétrique réelle, d'après le théorème spectrale, il existe une base orthonormale $(V_1, \ldots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée par des vecteurs propres de A associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivement, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1, n]\!] : AV_i = \lambda_i V_i$.

---

7. (a) $\forall i \in [\![1, n]\!] : MV_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j V_j \left({}^tV_j\, V_i\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j V_j \delta_{i,j} = \lambda_i V_i$, d'où M et A coïncident sur une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc $M = A$.

(b) Pour tout $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i V_i \in \Omega$, on a $\|X\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ et $\langle AX, X\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ d'où l'expression de $R_A(X)$.

---

8. $R_A(V_i) = \frac{\lambda_i \|V_i\|^2}{\|V_i\|^2} = \lambda_i, \forall i \in [\![1, n]\!]$.

---

9. (a) On a $\lambda_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ d'où $R_A(V_1) = \lambda_1 \leq R_A(X) \leq \lambda_n = R_A(V_n)$ pour tout $X \in \Omega$. D'après I.4., $R_A(\Omega) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A est nilpotente et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. De plus, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega : R_A(X) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R_A(X) = \frac{1}{2}$ et donc $\max\limits_{X \in \Omega} R_A(X) \neq 0 = \lambda_2$ et pour $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R_A(X) = -\frac{1}{2}$ et donc $\min\limits_{X \in \Omega} R_A(X) \neq 0 = \lambda_1$.

---

10. En notant $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda_1 \leq a_{i,i} = \langle AE_i, E_i\rangle = R_A(E_i) \leq \lambda_n$$

---

11. (a) Notons d'abord que Ω est un ouvert de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc pour tout $X \in \Omega$ et $H \in \Omega$ tel que $X + H \in \Omega$ on a :

$$R_A(X + H) = \frac{\langle AX, X\rangle + 2\langle AX, H\rangle + \langle AH, H\rangle}{\|X\|^2 + 2\langle X, H\rangle + \|H\|^2}$$

Sachant que

$$\left(\|X\|^2 + 2\langle X, H\rangle + \|H\|^2\right)^{-1} = \|X\|^{-2}\left(1 - \frac{2}{\|X\|^2}\langle X, H\rangle + o(\|H\|)\right), \; \|H\| \to 0$$

d'où

$$R_A(X + H) = R_A(X) + \frac{2}{\|X\|^2}\langle AX - R_A(X)X, H\rangle + o(\|H\|)$$

Ainsi, R_A est différentiable sur Ω et $\nabla R_A(X) = \frac{2}{\|X\|^2}(AX - R_A(X)X)$.

(b) Si $X \in \Omega$ est un point critique de R_A, c'est-à-dire $\nabla R_A(X) = 0$, alors $AX - R_A(X)X = 0$ et donc $AX = R_A(X)X$. Comme $X \neq 0$, alors il est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $R_A(X)$.

---

12. (a) A est une matrice symétrique réelle de valeurs propres λ_1, λ_2. On a $\lambda_1\lambda_2 = \det(A) > 0$ et donc λ_1 et λ_2 sont de même signe. De plus $\det(A) = ac - b^2 > 0$ et $a > 0$ donc $c > 0$ et par suite $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c > 0$. Ainsi λ_1 et λ_2 sont strictement positives.

(b) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x, y)\| = 1$, on a : $q(x, y) = R_A(X)$. Ainsi $\inf\limits_{\|(x,y)\|=1} q(x, y) = \min\limits_{X \in S_2} R_A(X) = \lambda_1 > 0$. Donc pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, on a $q\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \geq \lambda_1$, d'où il suffit de prendre $\alpha = \lambda_1$ et on a $q(x, y) \geq \alpha(x^2 + y^2)$ qui reste vraie pour $(x, y) \neq (0, 0)$.
La CNS pour avoir une égalité est que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, c'est à dire que $A = \lambda I_2$.

Partie III – Théorème de min-max et application

13. (a) On a $\dim(F \cap U_k) = \dim F + \dim(U_k) - \dim(F + U_k) \geq k + n - k + 1 - n = 1$. D'où $F \cap U_k \neq \{0\}$ et par suite il existe $X \neq 0$, $X \in F \cap U_k$.

(b) Pour $X \neq 0, X \in F \cap U_k$ on a : $X = \sum\limits_{i=k}^{n} x_i V_i$ et donc $R_A(X) = \dfrac{\sum\limits_{i=k}^{n} x_i^2 \lambda_i}{\sum\limits_{i=k}^{n} x_i^2} \geq \lambda_k$.

(c) $\forall X \in G \setminus \{0\} : R_A(X) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 \lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2} \leq \lambda_k$.

(d) Pour tout $F \in \mathcal{V}_k$: $\max\limits_{X \in F \backslash \{0\}} R_A(X) \geq \lambda_k$ et par suite $\min\limits_{F \in \mathcal{V}_k} \max\limits_{X \in F \backslash \{0\}} R_A(X) \geq \lambda_k$.
De plus, d'après (c), et comme $R_A(V_k) = \lambda_k$ on a : $\max\limits_{X \in G \backslash \{0\}} R_A(X) = \lambda_k$ et donc $\min\limits_{F \in \mathcal{V}_k} \max\limits_{X \in F \backslash \{0\}} R_A(X) \leq \lambda_k$ et par suite on a l'égalité.

---

14. Application.

(a) On a

$$ {}^tM = \begin{pmatrix} {}^tB & {}^t({}^tC) \\ {}^tC & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ {}^tC & 0 \end{pmatrix} = M $$

ainsi M est symétrique. De plus

$$ M \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & B \\ 0 & {}^tC \end{pmatrix} $$

Le déterminant de ce produit est non nul puisque $\det^2(C) \neq 0$. Ainsi $\det(M) \neq 0$ et donc M est inversible.

(b) i. Pour $X = \begin{pmatrix} 0 \\ X_1 \end{pmatrix} \in W$: $\langle MX, X \rangle = 0$ et donc $R_A(X) = 0$. D'où $\max\limits_{X \in W \backslash \{0\}} R_A(X) = 0$. Ainsi, par le théorème min-max : $\lambda_n \leq 0$ et comme $\lambda_n \neq 0$ alors on a $\lambda_n < 0$.

ii. En considérant la matrice $-M$ et puisque ses valeurs propres sont les opposées de celles de M, alors en notant λ_i' ces valeurs propres on a :

$$ \lambda_1' \leq \cdots \leq \lambda_n' = -\lambda_{n+1} < 0 $$

d'où on obtient $\lambda_{n+1} > 0$ et on obtient le résultat.

15. (a) ${}^tCC$ est une matrice symétrique réelle donc ses valeurs propres sont réelles. De plus, si λ est une valeur propre et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ un vecteur propre associé :

$$\lambda\|X\|^2 = \langle {}^tCCX, X\rangle = {}^t(CX)(CX) = \|CX\|^2$$

d'où $\lambda \geq 0$. Or C est inversible donc $\lambda \neq 0$ et par suite $\lambda > 0$.

(b) i. Le produit matriciel par blocs donne

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_n & -C \\ -{}^tC & \lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 I_n - C{}^tC & 0 \\ -{}^tC & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

Et on obtient

$$\lambda^n \chi_M(\lambda) = \lambda^n \det(\lambda^2 I_n - C{}^tC),$$

d'où $\chi_M(\lambda) = \chi_{C{}^tC}(\lambda^2)$, $\forall \lambda \neq 0$. Cette égalité se prolonge pour $\lambda = 0$.

ii. De même,

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & -C \\ -{}^tC & \lambda I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ -{}^tC & -{}^tCC + \lambda^2 I_n \end{pmatrix}.$$

Et on a $\chi_M(\lambda) = \chi_{{}^tCC}(\lambda^2)$.

iii. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ alors $0 = \chi_M(\lambda) = \chi_{{}^tCC}(\lambda^2)$ et donc $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}({}^tCC)$. Réciproquement, si $\mu \in \mathrm{Sp}({}^tCC)$, $\mu > 0$ et on a : $0 = \chi_{{}^tCC}((\pm\sqrt{\mu})^2) = \chi_M(\sqrt{\mu}) = \chi_M(-\sqrt{\mu})$, d'où $\pm\sqrt{\mu} \in \mathrm{Sp(M)}$. D'où

$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{ \pm\sqrt{\mu} \mid \mu \in \mathrm{Sp}({}^tCC)\right\}.$$

Même résultat pour $C{}^tC$. Ainsi $\mathrm{Sp}({}^tCC) = \mathrm{Sp}(C{}^tC)$.

(c) i. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in E_\lambda(M)$. On a $MX = \lambda X \iff$ $\begin{cases} CX_2 &= \lambda X_1 \\ {}^tCX_1 &= \lambda X_2 \end{cases}$ d'où en combinant les égalités on obtient : $X_1 \in E_{\lambda^2}(C{}^tC)$ et $X_2 \in E_{\lambda^2}({}^tCC)$. Ainsi $E_\lambda(M) \subset H_{\lambda^2}$.

ii. M est symétrique réelle donc diagonalisable. Notant $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{2p}$ les valeurs propres distinctes de M, on a :

$$\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{2p} E_{\lambda_i}(M)$$

De même pour ${}^tCC$ et $C{}^tC$

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i^2}({}^tCC) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i^2}(C{}^tC)$$

D'après la question précédente :

$$\dim E_{-\lambda_i}(M) + \dim E_{\lambda_i}(M) \leq \dim E_{\lambda_i^2}(C{}^tC) + \dim E_{\lambda_i^2}({}^tCC), \ \forall i \in [\![1,p]\!]$$

Si pour un certain i, l'inégalité précédente est stricte, alors en sommant de 1 à p on obtient $2n < 2n$ ce qui est absurde. Ainsi les inégalités sont des égalités et $\dim(E_{-\lambda}(M) \oplus E_\lambda(M)) = \dim(H_{\lambda^2})$, d'où avec l'inclusion de la question précédente on a l'égalité demandée.