



Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Physique

| | | | |
|-------------------------------------|--------------------|--------------------|----------------------|
| Date : Lundi 29 Mai 2017 | Heure : 8 H | Durée : 4 H | Nb pages : 08 |
| Barème : Problème 1 : 11 pts | | Problème 2 : 9 pts | |

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données utiles

Le rotationnel d'un vecteur \vec{A} en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2} [\cos(p+q) + \cos(p-q)]$$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$

SI : Unité exprimée dans le système international

L'épreuve est composée de deux problèmes. Le problème 1 comprend trois parties qui traitent de quelques unes des applications du phénomène d'induction, alors que le problème 2 traite dans une première partie du phénomène d'interférence à N ondes en commençant par trois ondes. La fin de ce problème traite de quelques applications du réseau.

Problème 1 Phénomène d'induction et applications

Le phénomène d'induction électromagnétique présente certaines applications intéressantes notamment dans le domaine du chauffage tel que les plaques à induction où les fours à induction. On cite également le phénomène de lévitation magnétique utilisé, entre autres, dans les trains à grandes vitesses ainsi que dans le freinage par induction utilisé par les grands engins. Dans ce problème, on étudie quelques unes de ces applications et on utilisera le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dont les vecteurs unitaires sont $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

A- Plaque à induction

Une plaque chauffante à induction est une plaque qui permet de chauffer le fond d'une casserole ou d'un poêle non pas par contact thermique mais en créant des courants de Foucault induits dans le socle de la plaque formé, en général, d'un conducteur ferromagnétique. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre une bobine (l'inducteur) et la plaque circulaire formant le fond du récipient (l'induit).

La casserole repose sur une plaque en vitrocéramique en dessous de laquelle est logée une bobine plate d'axe Oz qui génère au niveau du fond de la casserole un champ magnétique sinusoïdal uniforme $\vec{B} = B_0 \sin \omega t \vec{u}_z$ d'amplitude B_0 et de pulsation ω (Fig.1).

Le fond de la casserole peut être modélisé par trois spires concentriques de centre O , de diamètre D_k et de résistance R_k ($k=1 \rightarrow 3$).

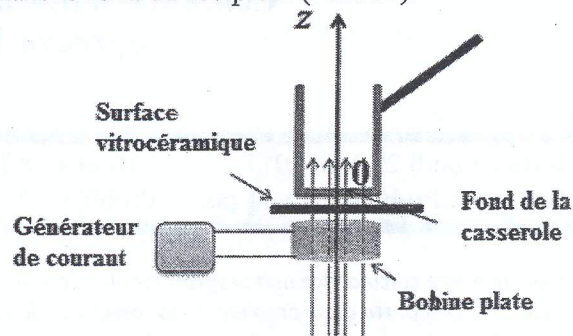


Fig.1

- 1 Exprimer le flux de \vec{B} à travers la spire de diamètre D_k .
- 2 En déduire la f.e.m. induite e_k puis le courant i_k circulant dans la spire k .
- 3 Donner l'expression de la puissance instantanée P_k dissipée par effet Joule dans la spire k .
- 4 Exprimer la puissance moyenne temporelle $\langle P_k \rangle$
- 5 Exprimer la puissance moyenne totale $\langle P \rangle$ dissipée dans le fond de la casserole.

B- Four à induction

Considérons un cylindre en cuivre de rayon R , de hauteur H et de conductivité électrique γ entouré par un solénoïde (S) coaxial ayant n spires jointives par unité de longueur parcourues par un courant sinusoïdal $i(t) = I_0 \cos \omega_0 t$ (Fig.2).

- 6 En négligeant les effets de bord ($H \gg R$), établir l'expression du champ magnétique \vec{B} à l'intérieur du solénoïde en fonction de n , μ_0 et $i(t)$. On admet que ce champ est nul à l'extérieur de (S).
- 7 En utilisant les propriétés de symétrie, montrer que le champ électrique induit par ce courant n'a qu'une composante suivant \vec{u}_θ et que cette composante ne dépend que de r et t .
- 8 Déterminer le champ électrique induit $\vec{E}(r, t)$ en tout point M du conducteur supposé avoir les mêmes propriétés électrique et magnétique que le vide.

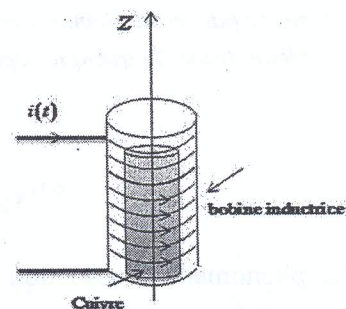


Fig.2

- 9 En utilisant la loi d'Ohm en déduire le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}_c(r,t)$. Déterminer la puissance instantanée par unité de volume P_v puis sa valeur moyenne temporelle $\langle P_v \rangle$.
- 10 Calculer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ dissipée par effet Joule dans le conducteur
 A.N: $R=0,1\text{ m}$, $H=1\text{ m}$, $I_0=2\text{ A}$, $\omega_0=100\pi$, $\mu_0=4\pi 10^{-7}\text{ SI}$, $\gamma=6.10^7\text{ }\Omega^{-1}\text{ m}^{-1}$ et $n=1000\text{ m}^{-1}$.
- 11 Sachant que la température de fusion du cuivre est $T_f=1358\text{ K}$, sa capacité thermique massique est $C=385\text{ J.kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ et sa masse volumique est $\rho=8920\text{ kg m}^{-3}$, calculer la quantité de chaleur Q nécessaire pour faire fondre le cylindre de cuivre se trouvant initialement à la température ambiante $T_0=293\text{ K}$.
- 12 Calculer la durée τ_f nécessaire pour faire fondre le cylindre en cuivre. Cette durée vous paraît-elle raisonnable ?
- 13 Pour augmenter la puissance dissipée par effet Joule, on utilise une pulsation $\omega=100\omega_0$, calculer $\langle P \rangle$. En déduire la nouvelle valeur de τ_f . Conclure.
- 14 On admet que le cylindre en cuivre (très bon conducteur thermique) évacue vers l'extérieur par sa surface totale S_t une puissance :
- $$P_{th}=h(T_f-T_0)S_t \quad \text{où } h \text{ est une constante}$$
- 14.1- De quel type de transfert thermique s'agit-il ?
- 14.2- Qu'appelle t'on h ? Donner son unité dans le système international.
- 14.3- Définir une résistance thermique pour ce type de transfert.
15. On se propose de recalculer le temps τ_f en tenant compte de ces pertes
- 15.1 Montrer que pour compenser ces pertes, la pulsation ω doit être supérieure à une pulsation critique ω_c , donner alors son expression en fonction des données du problème. Sachant que $h=155\text{ SI}$, calculer la valeur de ω_c .
- 15.2 Calculer la nouvelle valeur de τ_f pour $\omega=100\omega_0$. Conclure.

C- Lévitation magnétique

I-Préliminaires

On considère une spire circulaire d'axe Oz et de rayon a , parcourue par un courant d'intensité I (Fig. 3a). On admet que le champ magnétique \vec{B} créé par la spire en un point O' de son axe s'écrit:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \alpha \vec{u}_z \quad (1).$$

- 16 Un solénoïde fini de longueur ℓ possédant n spires jointives par unité de longueur de rayon a parcourues par un courant I (Fig. 3b).

- 16.1 Montrer en utilisant les propriétés de symétrie qu'en tout point O' extérieur à ce solénoïde situé sur l'axe des z , le champ \vec{B} possède une seule composante suivant cet axe.

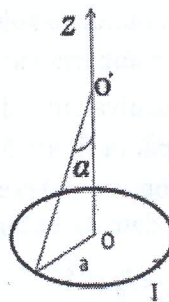


Fig. 3a

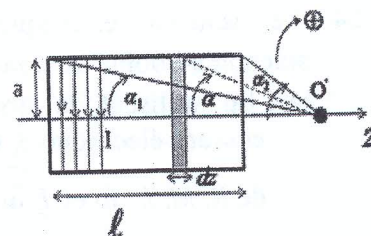


Fig. 3b

- 16.2 Montrer, à l'aide de l'équation (1), que le champ magnétique \vec{B} créé par ce solénoïde au point O' peut se mettre sous la forme : $\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{u}_z$
- 16.3 Que devient cette expression pour un solénoïde semi-infini selon les z négatifs?

II- Bobine plate en Lévitacion magnétique

Un solénoïde (S) supposé être semi-infini d'axe Oz vertical de rayon a et comportant n spires jointives par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité $I = I_0 \cos \omega t$ d'amplitude I_0 et de fréquence $f = 50$ Hz.

On place au dessus de (S) à une distance z du point O une bobine conductrice plate, de centre O' comportant N spires de même rayon $b \ll a$ (Fig. 4a). Cette bobine est de masse m , d'inductance L et de résistance R .



Fig. 4a

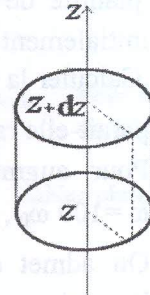


Fig. 4b

- 17 Calculer la longueur d'onde λ associée au courant et justifier la validité du régime quasi-stationnaire.
- 18 Décrire qualitativement le phénomène qui a lieu au niveau de la bobine.
- 19 Exprimer le champ magnétique \vec{B} créé par (S) au point O' en fonction a , z , μ_0 , n et I .
- 20 Montrer, par des considérations de symétrie, qu'en tout point de cote $z > 0$ proche de l'axe Oz et distant de r , ce champ possède deux composantes B_r et B_z .
- 21 Pour déterminer la composante radiale B_r de ce champ, il suffit de calculer son flux à travers une surface fermée cylindrique d'axe Oz, de rayon r et de hauteur dz (Fig. 4b).

21.1 Montrer que cette composante s'écrit : $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$

Exprimer $B_r(r, z)$ en fonction de r , z , a , I , μ_0 et n .

- 21.2 Dans la suite, on se place au niveau de la bobine en considérant $z = a$ et $r = b$. Exprimer le rapport $\frac{B_r}{B_z}$ en fonction de $\frac{b}{a}$.

- 21.3 Pour $\frac{b}{a} = \frac{1}{20}$, calculer la valeur du rapport $\frac{B_r}{B_z}$. Conclure.

- 22 Calculer le flux ϕ_e du champ magnétique \vec{B} à travers la bobine. En déduire l'expression du coefficient M d'induction mutuelle solénoïde-bobine.
- 23 Déterminer la f.e.m. induite e due à la variation du flux ϕ_e dans la bobine.
- 24 Le schéma électrique équivalent de l'ensemble solénoïde-bobine est donné par la figure 5.

- 24.1 En utilisant la notation complexe, calculer le courant électrique $\underline{i_b}(t)$ dans la bobine en fonction de R , M , L , ω et \underline{I} où $\underline{I} = I_0 e^{j\omega t}$

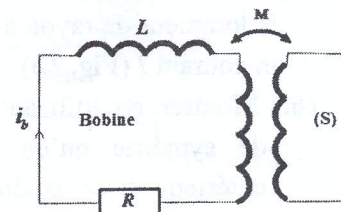


Fig.5

- 24.2 On choisit comme solution de $i_b(t)$ l'expression $i_b(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$ où φ est le déphasage entre les courants dans la bobine et dans le solénoïde. Exprimer l'amplitude réelle I_M en fonction de M, I_0, R, L et ω et montrer que :

$$\cos \varphi = -\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

- 25 On se propose d'étudier dans cette question le phénomène de lévitation induit dans la bobine.

25.1 Exprimer la force de Laplace élémentaire $d\vec{F}$ qui s'exerce sur un élément de longueur $d\vec{l}$ de la bobine.

25.2 Montrer que seule la composante B_r du champ magnétique a une action sur la bobine supposée indéformable.

25.3 En déduire la force de Laplace $\vec{F}(t)$ qui s'exerce sur la bobine.

25.4 Montrer que sa moyenne temporelle s'écrit :

$$\langle \vec{F}(t) \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 \pi b^2 n N M L \omega^2}{4a(R^2 + L^2 \omega^2)} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$$

25.5 Exprimer la condition sur la masse m de la bobine si on veut observer un soulèvement vers le haut de cette dernière (phénomène de lévitation).

25.6 Cette lévitation est-elle possible si l'inductance propre L est nulle ? Justifier.

Problème 2

Interférences à N ondes et réseau de diffraction

Partie A : Interférences à trois ondes

Trois fentes fines F_1, F_2 et F_3 (Fig. 6) équidistantes de a et perpendiculaires au plan xOz sont éclairées par une fente source fine F parallèle aux trois fentes émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ et placée au foyer principal objet d'une lentille convergente L_1 de distance focale f' . On observe les interférences à l'infini, c'est à dire en un point M d'un écran (E) situé dans le plan focal image d'une lentille convergente L_2 de même distance focale que L_1 .

1 Questions préliminaires :

- 1.1- Quel est l'intérêt d'utiliser des fentes d'Young au lieu des trous d'Young ?
- 1.2- Quel est le rôle de chaque lentille ?
- 1.3- Tracer le cheminement des rayons issus de F arrivant au point M après avoir traversé les trois fentes.
- 1.4- Les vibrations qui interfèrent en M sont-elles cohérentes ? Justifier.

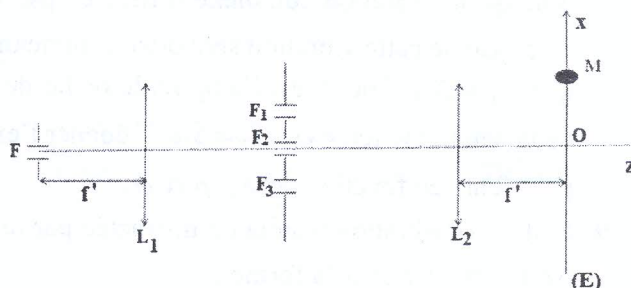


Fig.6

- 2 Etablir l'expression du déphasage ϕ entre les vibrations issues de deux fentes successives en fonction de a , x , λ et f' .

- 3 La fente F_2 émet la vibration complexe \underline{S}_1 prise comme origine des phases. Montrer que la vibration résultante \underline{S} en un point M de l'écran s'écrit :

$$\underline{S} = \underline{S}_1 [1 + 2 \cos \phi]$$

- 4 En posant $I_1 = \underline{S}_1 \underline{S}_1^*$ (\underline{S}_1^* est le conjugué de \underline{S}_1), déterminer l'intensité $I(\phi)$.

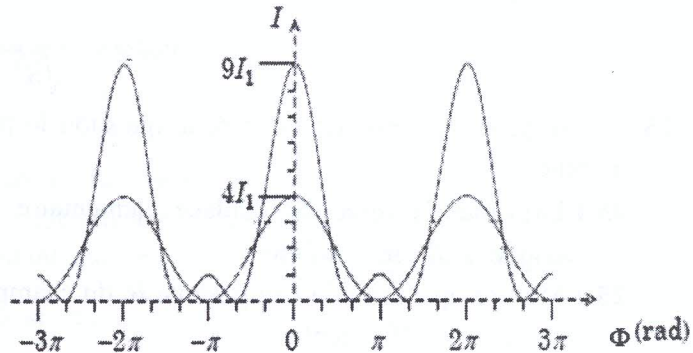


Fig.7

- 5 On donne sur la figure 7 les courbes $I(\phi)$ correspondantes aux cas de deux et trois fentes d'Young. Commenter physiquement la différence entre ces deux courbes.
- 6 On ferme la fente centrale F_2 . Exprimer l'intensité au point M en fonction de x , I_1 et l'interfrange i_f . Calculer i_f pour $a = 0,5 \text{ mm}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$ et $f' = 50 \text{ cm}$.

Partie B : Interférences à N ondes : Réseau de diffraction

I. Détermination de la fonction réseau

Nous étendons le calcul précédent au cas d'interférences à N ondes. Ceci fait appel à une structure périodique connue sous le nom de réseau. Un tel dispositif est constitué de N fentes fines parallèles équidistantes de a .

Ce réseau est éclairé par un faisceau de lumière parallèle et monochromatique de longueur d'onde λ sous un angle d'incidence i . On s'intéresse au faisceau diffracté à l'infini dans la direction θ comme le montre la figure 8.

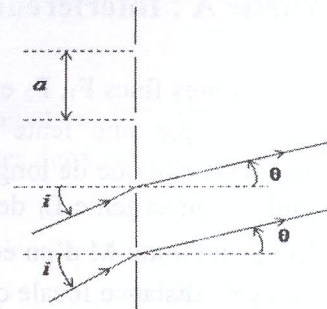


Fig. 8

- 7 Calculer la différence de marche δ entre deux rayons issus de deux fentes successives. En déduire la différence de phase ϕ entre ces deux rayons.
- 8 Soit \underline{S}_1 la vibration complexe diffractée par la 1^{ère} fente.

La phase de cette vibration sera prise comme origine telle que $\underline{S}_1 = A e^{j\omega t}$ où A est l'amplitude réelle de la vibration. Sachant que la vibration issue de la deuxième fente est $\underline{S}_2 = \underline{S}_1 e^{-j\phi}$ donner l'expression de la vibration \underline{S}_p diffractée par la $p^{\text{ième}}$ fente en fonction de \underline{S}_1 , p et ϕ .

- 9 Soit \underline{S} la vibration résultante diffractée par le réseau dans la direction θ . Montrer que \underline{S} peut se mettre sous la forme :

$$\underline{S} = \underline{S}_1 e^{-j(N-1)\phi/2} \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

- 10 En déduire l'intensité lumineuse $I(\varphi)$ diffractée par le réseau dans la direction θ . Quelle est sa période ?
- 11 Etudier les variations de $I(\varphi)$ et préciser les positions des maximums principaux et des minimums.
- 12 Calculer les intensités des maximums principaux I_{\max} en fonction de A et N ainsi que les intensités I_1' et I_2' correspondantes aux deux premiers maximums secondaires. Evaluer les rapports $\frac{I_1'}{I_{\max}}$ et $\frac{I_2'}{I_{\max}}$. Conclure.
- 13 Tracer la courbe $\frac{I(\varphi)}{I_{\max}}$ sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

II- Applications des réseaux

Mesure du pas d'un réseau

- 14 On dispose d'un réseau de transmission comportant N fentes fines parallèles dont on veut déterminer le pas a . Ce réseau est placé sur la plateforme d'un goniomètre éclairé entièrement à l'aide d'un faisceau de lumière parallèle monochromatique de longueur d'onde $\lambda = (546,2 \pm 0,1) \text{ nm}$ sous un angle d'incidence i . On s'intéresse au faisceau diffracté à l'infini dans la direction θ .
- 14.1 Calculer l'angle de déviation D d'un rayon incident en fonction de i et θ . Montrer que l'angle de déviation minimale D_m vérifie la relation suivante :

$$\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = \frac{k\lambda}{2a},$$

où k est l'ordre de diffraction du réseau.

- 14.2 Une mesure de D_m pour $k = 2$ donne $D_m = 31,71^\circ \pm 0,02^\circ$. Calculer le pas a du réseau. En déduire le nombre N de traits du réseau si sa largeur est $L = 1 \text{ cm}$.
- 14.3 Calculer l'incertitude absolue Δa sur le pas du réseau.

Mesure de longueur d'onde et de dispersion angulaire

- 15 On veut mesurer les longueurs d'ondes émises par une lampe spectrale à vapeur de mercure afin de déterminer les niveaux d'énergie occupés par cet atome. Pour ce faire, on considère un réseau de diffraction de N fentes fines parallèles de pas $a = 2 \mu\text{m}$ placé sur la plateforme d'un goniomètre. Ce réseau est éclairé sous incidence normale. Les radiations les plus intenses figurent dans le tableau 1.

Tableau 1

| Radiation | Violette (λ_1) | Bleue (λ_2) | Verte (λ_3) | Orangée (λ_4) |
|---|--------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| θ_i (en degré, $i = 1 \rightarrow 4$) | 11,68 | 12,59 | 15,84 | 17,91 |
| Longueur d'onde (nm) | | | | |
| $d\theta / d\lambda$ (rad/nm) | | | | |

- 15.1 Calculer les longueurs d'onde λ_n ($n=1 \rightarrow 4$) à l'ordre $k=1$ des quatre radiations.
- 15.2 Quel est l'ordre maximum k_{max} observé pour les deux radiations extrêmes ?
- 16 Etablir l'expression donnant la dispersion angulaire $\frac{d\theta}{d\lambda}$ en fonction de k , a et θ .
- 17 Compléter le tableau 1 en calculant en *minute /nm* (60 minutes= 1°) la dispersion angulaire à l'ordre $k=1$ pour les quatre radiations.

Mesure du pouvoir de résolution d'un réseau

18 Le pouvoir de résolution d'un réseau est son aptitude à séparer deux longueurs d'ondes voisines λ et $\lambda+d\lambda$ ($d\lambda \ll \lambda$). En admettant que pour un ordre k donné, les deux longueurs d'ondes ne peuvent être séparées que si $d\varphi \geq \frac{2\pi}{N}$ (critère de Rayleigh) où $d\varphi$ est la différence de phase entre deux maximums principaux correspondants aux deux longueurs d'ondes.

18.1 Montrer que $d\varphi = 2\pi k \frac{d\lambda}{\lambda}$

18.2 En déduire, en fonction de λ , k et N , le plus petit écart de longueur d'onde $d\lambda_{min}$ qui peut être séparé par ce réseau.

19 Le pouvoir de résolution d'un réseau comportant N traits est par définition $R = \frac{\lambda}{d\lambda_{min}} = kN$. Le doublet jaune de la lampe spectrale à vapeur de sodium est composé de deux raies de longueurs d'onde très voisines $\lambda_1 = 589,0nm$ et $\lambda_2 = 589,6nm$.

19.1 Compléter le tableau 2 ci-dessous pour $k=1$.

Tableau 2

| N | 5000 | 2000 | 500 | 200 |
|----------------------------------|------|------|-----|-----|
| $d\lambda_{min} (nm)$ pour $k=1$ | | | | |

19.2 Quels sont les réseaux qui sont capables de séparer les deux radiations à l'ordre $k=1$?

19.3 A partir de quel ordre les quatre réseaux peuvent-ils séparer les deux radiations ?

Fin de l'épreuve