République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2017

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2017

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Session 2017	**Date: 25 Mai 2017**	**Heure: 8H**	**Durée : 4 heures**

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1 (3 points)

Ahmed, un étudiant, effectue n trajets par an sur la ligne de bus 38-B. Le prix du ticket est de b dinars par trajet. La probabilité que cet étudiant soit contrôlé lors d'un trajet est de $p \in]0,1[$ et l'on suppose que les contrôles sont indépendants les uns des autres. Le prix de l'amende à payer lorsque l'on est contrôlé sans titre de transport est de a dinars.
On suppose que, chaque jour, Ahmed fraude (n'achète pas un ticket) avec la probabilité $q \in]0,1[$ ou achète un ticket avec la probabilité $1-q$.
On suppose de plus que les comportements d'Ahmed sont indépendants d'un jour sur l'autre, et ne dépendent pas non plus des éventuels contrôles qu'il aurait eu.
On note :

- X : la variable aléatoire égale au nombre de fois dans l'année où Ahmed est contrôlé.
- Y : la variable aléatoire égale au nombre de fois dans l'année où Ahmed fraude.
- Z : la variable aléatoire égale au nombre de fois dans l'année où Ahmed se fait contrôler alors qu'il n'a pas de ticket.

On définit le «gain» relatif annuel de l'étudiant par la formule

$$\left(\begin{array}{l}\text{Somme dépensée sur l'année}\\ \text{par l'étudiant en ne fraudant jamais.}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{l}\text{Somme dépensée sur l'année}\\ \text{par l'étudiant en fraudant.}\end{array}\right)$$

1. Justifier que :
$$X \sim \mathcal{B}(n,p),\ Y \sim \mathcal{B}(n,q) \text{ et } Z \sim \mathcal{B}(n,pq)$$
2. Donner (sans calculs) les espérances $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{E}(Z)$.
3. En considérant les événements $(X=0)$ et $(Z=1)$, montrer que les variables aléatoires X et Z ne sont pas indépendantes.
4. On note G la variable aléatoire donnant le gain relatif de l'étudiant sur l'année. Montrer que $G = bY - aZ$.
5. Calculer $E(G)$. En déduire la valeur minimale a_0 qu'il faut donner à l'amende pour que l'étudiant soit en moyenne perdant sur l'année?

Exercice 2 (5 points)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et F un sous espace vectoriel de E.
Pour tout $u \in E$, on rappelle que la distance de u à F est définie par

$$d(u,F) = \inf\{\|u-f\| \ / \ f \in F\},$$

et on introduit l'ensemble $\mathscr{D}_F(u)$ défini par :

$$\mathscr{D}_F(u) = \{f \in F \ / \ d(u,F) = \|u-f\|\}.$$

1. Dans cette question $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, F est le sous espace vectoriel de E formé par les applications polynômiales et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme.
   (a) En utilisant le théorème de Weierstrass, montrer que, pour tout $u \in E$,
   $$d(u,F) = 0.$$
   (b) Montrer que pour tout $u \in E$, $\mathscr{D}_F(u) = \{u\}$ si $u \in F$ et $\mathscr{D}_F(u) = \emptyset$ si $u \notin F$.

   Dans toute la suite, on suppose que F est de dimension finie.

2. Dans cette question, on suppose que E est un espace préhilbertien réel muni de sa norme euclidienne. Déterminer, pour tout $u \in E$, $d(u,F)$ et $\mathscr{D}_F(u)$ en fonction de $P_F(u)$: le projeté orthogonal de u sur F.
3. Soit $u \in E$. On pose :
   $$\Phi : F \to \mathbb{R}, \ f \mapsto \|u-f\|.$$
   (a) Montrer que Φ est continue.
   (b) Montrer que $K = \{f \in F \ / \ \Phi(f) \leq \|u\|\}$ est un compact non vide de F.
   (c) En déduire qu'il existe $f_0 \in K$ tel que $\Phi(f_0) \leq \Phi(f)$, pour tout $f \in K$.
   (d) Montrer que $\Phi(f_0) \leq \Phi(f)$, pour tout $f \in F$.
   (e) En déduire que $\mathscr{D}_F(u) \neq \emptyset$.
4. Soient $u \in E$, $f \in F$ et $\alpha > 0$. Montrer que
   (a) $d(u+f,F) = d(u,F)$,
   (b) $d(\alpha u,F) = \alpha d(u,F)$.
5. Montrer que pour tout $u \in E$ et tout $f \in \mathscr{D}_F(u)$, $d(u-f,F) = \|u-f\|$.
6. En déduire que si F un sous espace vectoriel de E différent de E alors il existe $w \in E$ tel que $d(w,F) = \|w\| = 1$.
7. On suppose que E est de dimension infinie.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$d(w_{n+1}, \mathrm{Vect}(w_0, ..., w_n)) = \|w_{n+1}\| = 1.$$
   (b) Montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$,
   $$\|w_m - w_n\| \geq 1.$$
   (c) En déduire que la suite $(w_n)_n$ n'admet aucune valeur d'adhérence.
   (d) Montrer alors que la boule unité fermée $B_f(0,1)$ de E n'est pas compacte.

Problème (12 points)

Partie I

Soit $a > 0$ fixé.

1. Pour quelles valeurs du réel s la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+a)^s}$, est elle convergente. On pose sous cette condition
$$\psi_a(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s}.$$
2. Montrer que $\forall s > 1, \psi_a(s) = \frac{1}{a^s} + \psi_{a+1}(s)$.
3. Montrer que ψ_a est continue sur $]1,+\infty[$.
4. (a) Montrer que $\lim_{s\to 1^+} \psi_a(s) = +\infty$ lorsque $a \geq 1$.
   (b) Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \psi_a(s)$ lorsque $a \geq 1$.
   (c) En déduire $\lim_{s\to 1^+} \psi_a(s)$ et $\lim_{s\to+\infty} \psi_a(s)$, lorsque $0 < a < 1$.
   (d) A-t-on la convergence uniforme sur $]1,+\infty[$ de la série de fonction $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+a)^s}$.
5. (a) Soient α, β deux réels tels que $\alpha > 1$. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, est convergente.
   (b) Montrer que ψ_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et donner l'expression de ses dérivées successives sous la forme de la somme d'une série.
6. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ converge, si et seulement si, $s > 0$.
   On pose $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$, $s > 0$.
   (b) Montrer que pour tout $s > 0$, $\Gamma(s) > 0$ et $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
   (c) Montrer que pour tout $s > 1$, $\psi_a(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}} e^{-ax}\, dx$.

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que $a = 1$ et on note $\psi(s) = \psi_1(s)$, $s > 1$.

Partie II

Pour tout réel x, on note $E(x)$ sa partie entière : C'est l'unique entier relatif vérifiant $x - 1 < E(x) \leq x$.

1. Soit $s > 0$. Montrer que l'application $f_s : x \mapsto \frac{E(x)-x}{x^{s+1}}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
2. Montrer que l'application $F : s \mapsto \int_1^{+\infty} f_s(x)\, dx$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\psi(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + sF(s)$. $\Big($On pourra remarquer que pour tout entier $N \geq 2$, $\int_1^N f_s(x)dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f_s(x)dx\Big)$.

4. Montrer que la suite $\left(\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_n$ est convergente.

   $\Big($On pourra étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2}(\gamma_n - \gamma_{n-1})\Big)$.

   On note $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n$.

5. Montrer que $F(1) = \gamma - 1$.

6. Montrer alors que $\lim_{s\to 1^+} \left(\psi(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$.

Partie III

On note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial définie par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n \geq k$ et on considère la suite réelle $(B_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$B_0 = 1 \quad \text{et} \quad B_{n+1} = -\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k} B_k.$$

1. Déterminer B_1 et B_2.

2. Montrer que, pour tout entier non nul n, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} B_k = 0$.

3. Montrer que, pour tout entier n, $|B_n| \leq n!$. $\Big($On rappelle que $e \approx 2.7...\Big)$.

4. Que peut on dire du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$.

5. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| < R$, $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$.

6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\operatorname{cotan}(\pi x) = i + \frac{2i}{e^{2i\pi x} - 1}$.

7. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $|x| < \frac{R}{2\pi}$, $\pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2i\pi x)^n$.

8. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que la famille $\left(\frac{x^{2n}}{k^{2n}}\right)_{n\geq 1, k\geq 1}$ est sommable.

9. En admettant la relation : $\pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - k^2}$, $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, montrer que

$$\pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \psi(2n) x^{2n}.$$

10. En déduire que, pour tout entier non nul p,

$$\psi(2p) = (-1)^{p+1}\frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!} B_{2p} \quad \text{et} \quad B_{2p+1} = 0.$$

11. Déterminer, alors, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$.

Fin de l'énoncé