République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2017

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2017

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Session 2017	Date: 31 Mai 2017	Heure: 8H	Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Notations

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On note $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle \cdot,\cdot \rangle)$ l'espace euclidien des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients réels muni de son produit scalaire canonique défini par :
$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \langle X,Y\rangle = {}^tXY, \quad \text{où } {}^tX \text{ est la transposée de } X.$$
On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire et par Ω l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et à coefficients réels et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A, χ_A le polynôme caractéristique de A, $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A et $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à une valeur propre λ.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I - Quotient de Rayleigh : Cas général

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application R_A (*appelée quotient de Rayleigh pour la matrice* A) par
$$R_A : \Omega \to \mathbb{R},\ X \mapsto \frac{\langle AX, X\rangle}{\|X\|^2}.$$

1. Montrer que R_A est continue sur Ω.
2. On note $S_n = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que S_n est un compact de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Vérifier que $\forall X \in \Omega$, $R_A\left(\frac{X}{\|X\|}\right) = R_A(X)$. Comparer $R_A(\Omega)$ et $R_A(S_n)$.
   (c) En déduire que R_A est une application bornée et atteint ses bornes.
   On note dans la suite $m = \min\limits_{X\in\Omega} R_A(X)$ et $M = \max\limits_{X\in\Omega} R_A(X)$.

3. Soient X et Y deux éléments de Ω tels que $X \neq Y$.

(a) On suppose que (X,Y) est une famille libre.
Justifier que pour tout $t \in [0,1], (1-t)X + tY \neq 0$.

(b) On suppose maintenant que (X,Y) est liée. Prouver qu'il existe $Z \in \Omega$ tel que (X,Z) et (Y,Z) soient deux familles libres.

(c) Construire explicitement un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \Omega$ d'extrémités X et Y. Que peut-on conclure ?

4. En déduire que $R_A(\Omega) = [m,M]$.

5. (a) Justifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que si la matrice A est antisymétrique, alors : $R_A(X) = 0, \forall X \in \Omega$.

(c) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $R_A = R_{\left(\frac{A+{}^tA}{2}\right)}$.

Partie II - Quotient de Rayleigh : Cas d'une matrice symétrique

On suppose désormais que A est une matrice symétrique réelle de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ comptées avec leurs ordres de multiplicités telles que :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

Soit $\mathcal{B} = (V_1, \ldots, V_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée par des vecteurs propres de A telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ AV_i = \lambda_i V_i.$$

6. Justifier l'existence de $\mathcal{B}$.

7. (a) Soit la matrice $M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i {}^tV_i$ élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M = A$.

(b) Montrer que pour tout $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$ élément de Ω, on a :

$$R_A(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

8. Calculer $R_A(V_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

9. (a) Montrer les égalités : $\lambda_1 = \min_{X\in\Omega} R_A(X)$ et $\lambda_n = \max_{X\in\Omega} R_A(X)$. Donner $R_A(\Omega)$.

(b) Vérifier à l'aide de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que les égalités de la question **9.** (a) ne sont pas vraies lorsque A n'est pas symétrique.

10. Montrer que si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ alors $\lambda_1 \leq a_{i,i} \leq \lambda_n$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

11. (a) Montrer que R_A est différentiable sur Ω et que pour tout $X \in \Omega$,

$$\nabla R_A(X) = \frac{2}{\|X\|^2}(AX - R_A(X)X).$$

(b) En déduire que si $X \in \Omega$ est un point critique de R_A alors X est un vecteur propre de A et donner la valeur propre qui lui est associée.

12. Dans cette question, on prend $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, où $a > 0$ et $\det A > 0$, et on définit l'application q sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

(a) Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

(b) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$q(x,y) \geq \alpha(x^2 + y^2), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'on ait une égalité.

Partie III - Théorème de min-max et application

On considère les mêmes notations de la deuxième partie.

13. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k et U_k le sous-espace engendré par $(V_k, \ldots, V_n)$.

(a) Montrer que $F \cap U_k$ contient au moins un vecteur non nul.

(b) Pour X élément non nul de $F \cap U_k$, montrer que $R_A(X) \geq \lambda_k$.

(c) On pose G le sous-espace engendré par $(V_1, \ldots, V_k)$.
Montrer que pour tout $X \in G \setminus \{0\}, R_A(X) \leq \lambda_k$.

(d) On note $\mathcal{V}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k.
Montrer le théorème de min-max :

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{V}_k} \left\{ \max_{X \in F \setminus \{0\}} R_A(X) \right\}.$$

14. Application. On considère deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où B est symétrique et C est inversible. On considère de plus la matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} B & C \\ {}^tC & 0_n \end{pmatrix},$$

où 0_n désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Vérifier que M est symétrique, calculer $M \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$ et déduire que M est inversible.

On note $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ les valeurs propres de M comptées avec leurs ordres de multiplicités et rangées par ordre croissant.

(b) Soit le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ de dimension n :

$$W = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ X_1 \end{pmatrix} \mid X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \right\},$$

où $0_{n,1}$ est le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

i. Vérifier que pour tout $X \in W \setminus \{0\}$, $R_M(X) = 0$ et en déduire que $\lambda_n < 0$.

ii. En considérant la matrice $(-M)$, montrer que $\lambda_{n+1} > 0$, et en déduire que M possède exactement n valeurs propres strictement positives et n valeurs propres strictement négatives comptées avec leurs ordres de multiplicités telles que :

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n < 0 < \lambda_{n+1} \leq \cdots \leq \lambda_{2n}.$$

15. Dans cette question la matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est définie par blocs par :

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & C \\ {}^tC & 0_n \end{pmatrix},$$

où $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice inversible.

(a) Montrer que toutes les valeurs propres de ${}^tCC$ sont strictement positives.

(b) i. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le produit matriciel par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & C \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & -C \\ -{}^tC & \lambda I_n \end{pmatrix}$$

et en déduire que :

$$\chi_M(\lambda) = \chi_{C{}^tC}(\lambda^2).$$

ii. Montrer qu'on a aussi :

$$\chi_M(\lambda) = \chi_{{}^tCC}(\lambda^2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

iii. Trouver une relation entre $\mathrm{Sp}(M)$, $\mathrm{Sp}({}^tCC)$ et $\mathrm{Sp}(C{}^tC)$.

(c) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. On pose

$$H_{\lambda^2} = \left\{ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \mid X_1 \in E_{\lambda^2}(C{}^tC),\ X_2 \in E_{\lambda^2}({}^tCC) \right\}.$$

i. Montrer que $E_\lambda(M) \subset H_{\lambda^2}$.

ii. Établir que $E_{-\lambda}(M) \oplus E_\lambda(M) = H_{\lambda^2}$.

Fin de l'énoncé