Partie 1. Préliminaires

(1) **Matrices normales de $M_2(\mathbb{R})$**

(1.a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors ${}^tA.A = A.{}^tA$ signifie que $\begin{cases} a^2+b^2 = a^2+c^2 \\ c^2+d^2 = b^2+d^2 \\ ac+bd = ab+cd \end{cases} \iff$ $\begin{cases} b = c \\ \text{ou } b = -c \neq 0 \text{ et } a = d \end{cases}$. Par suite A est symétrique, ou bien de la forme $A = A_{a,b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(1.b) On a :

$$\chi_{A_{a,b}}(X) = \begin{vmatrix} a-X & -b \\ b & a-X \end{vmatrix} = (X-a)^2 + b^2 = (X-z)(X-\overline{z}).$$

Si $b = 0$ alors $A_{a,b} = A_a = A_z$. Sinon $\chi_{A_{a,b}}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc diagonalisable. On conclut que $A_{a,b}$ et A_z sont semblables dans $M_2(\mathbb{C})$.

(2) (2.a) Si A_i est normale pour tout $i \in \{1,2,..,p\}$ alors

$$\begin{aligned} {}^tA.A &= {}^t(A_1 \oplus ... \oplus A_p).(A_1 \oplus ... \oplus A_p) \\ &= ({}^tA_1.A_1 \oplus ... \oplus {}^tA_p.A_p) \\ &= (A_1.{}^tA_1 \oplus ... \oplus A_p.{}^tA_p) \\ &= (A_1 \oplus ... \oplus A_p).{}^t(A_1 \oplus ... \oplus A_p) = A.{}^tA. \end{aligned}$$

Donc A est une matrice normale.

(2.b) Soient $P_1, ..., P_n$ des matrices inversibles tels que pour tout $i \in \{1,...,p\}$, $A_i = P_iB_iP_i^{-1}$. On pose

$$P = P_1 \oplus ... \oplus P_p \text{ et } R = P_1^{-1} \oplus ... \oplus P_p^{-1}.$$

Le calcul par blocs montre que $P.R = I_n$ (ce qui montre que $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P^{-1} = R$) et que

$$\begin{aligned} P.B.P^{-1} &= (P_1B_1P_1^{-1}) \oplus ... \oplus (P_pB_pP_p^{-1}) \\ &= A_1 \oplus ... \oplus A_p = A. \end{aligned}$$

(3) Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $A = P.B.P^{-1}$.

(3.a) On écrit $P = (z_{k,j})_{1\leq k,j\leq n}$ avec $z_{k,j} = a_{k,j} + i.b_{k,j}$. On pose $P_1 = (a_{k,j})_{1\leq k,j\leq n}$ et $P_2 = (b_{k,j})_{1\leq k,j\leq n}$. On a alors $P = P_1 + iP_2$, avec P_1 et $P_2 \in M_n(\mathbb{R})$. Or $A.P = P.A$ donc

$$\begin{aligned} A.(P_1+iP_2) &= (P_1+iP_2).B. \\ ie.\ A.P_1 + iA.P_2 &= P_1.B + iP_2.B. \end{aligned}$$

D'où :

$$A.P_1 = P_1.B \text{ et } A.P_2 = P_2.B.$$

(3.b) On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} A.(P_1 + tP_2) &= A.P_1 + tA.P_2 \\ &= P_1.B + tP_2.B \\ &= (P_1 + tP_2).B. \end{aligned}$$

(3.c) Soit Q le polynôme défini par :

$$Q(X) = \det(P_1 + XP_2).$$

On a : $Q(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det(P) \neq 0$. Donc Q est un polynôme non nul, à coefficients réels. On en déduit que Q admet un nombre fini de racines. D'où il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$, c'est-à-dire :

$$(P_1 + \alpha P_2) \in GL_n(\mathbb{R}).$$

(3.d) On a donc $A.(P_1 + \alpha P_2) = (P_1 + \alpha P_2).B$, On conclut que

$$A = (P_1 + \alpha P_2).B.(P_1 + \alpha P_2)^{-1}.$$

Enfin A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$, d'aprés 3.c.

Partie 2. $(C_1) \Rightarrow (C_2)$

(4) Cas euclidien

(4.a) Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de E, on a : $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_1) = P^{-1}.A.P$ où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$. Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ sont orthonormales, alors P est une matrice orthogonale, donc ${}^tP.P = I_n$. On a alors

$$\begin{aligned} {}^tA'.A' &= {}^t({}^tP.A.P).({}^tP.A.P) \\ &= {}^tP.{}^tA.P.{}^tP.A.P \\ &= {}^tP.{}^tA.A.P \\ &= {}^tP.A.{}^tA.P \\ &= {}^tP.A.P.{}^tP.{}^tA.P \\ &= A'.{}^tA'. \end{aligned}$$

D'où A' est normale.

(4.b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et F un sous espace vectoriel de E de dimension p, stable par f. Soit B_F une base orthonormale de F. On la complète en une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de E ($\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale adaptée à la somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$). Comme F est stable par f, la matrice : $M := \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_1)$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0_{n-p,p} & A_2 \end{pmatrix}.$$

(4.c) On a : ${}^tM.M = \begin{pmatrix} {}^tA_1.A_1 & {}^tA_1.C \\ {}^tC.A_1 & {}^tC.C + {}^tA_2.A_2 \end{pmatrix}$ et $M.{}^tM = \begin{pmatrix} A_1.{}^tA_1 + C.{}^tC & C.{}^tA_2 \\ A_2.{}^tC & A_2.{}^tA_2 \end{pmatrix}$.

On déduit que

$$ {}^tA_1.A_1 = A_1.{}^tA_1 + C.{}^tC. $$

D'où par linéarité de l'application trace, on obtient :

$$ \begin{aligned} Tr\left({}^tA_1.A_1\right) &= Tr\left(A_1.{}^tA_1\right) + Tr\left(C.{}^tC\right) \\ &= Tr\left({}^tA_1.A_1\right) + Tr\left(C.{}^tC\right). \end{aligned} $$

Donc $Tr\left(C.{}^tC\right) = 0$.

Or $Tr\left(C.{}^tC\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n-p} c_{i,j}^2 = 0$ donc $C = 0_{p,n-p}$.

(4.d) Comme

$$ M = \mathrm{Mat}\left(f, \mathcal{B}_1\right) = \begin{pmatrix} A_1 & O_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & A_2 \end{pmatrix}. $$

on déduit que $F^{\perp}$: (l'orthogonale de F) est stable par f, donc $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F, stable par f. On conclut que f est semi-simple.

(5) **Cas général:** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, .., e_n)$ de E vérifiant $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ est normale.

(5.a)
- $\varphi(y, x) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \varphi(x, y)$. Donc φ est symétrique.
- $\varphi(\alpha x + x', y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha x_i + x_i'\right) y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i = \alpha\varphi(x, y) + \varphi(x', y)$.
- $\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ si $x \neq 0$.

  Donc φ définit un produit scalaire sur E. De plus $\varphi(e_i, e_i) = 1$ et $\varphi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. D'où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

(5.b) La matrice de f dans une base orthonormale est une matrice normale. D'aprés la question (4) , f est semi-simple.

Partie 3. (C_2)$\Rightarrow$(C_3)

Soit f un endomorphisme **semi-simple** de E.

(6) Soit R un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'endomorphisme $g = R(f)$ est nilpotent.

(6.a) Soit $x \in \ker g \iff R(f)(x) = 0 \implies R(f)(f(x)) = f(R(f)(x)) = 0$. Donc $f(x) \in \ker g$. D'où $\ker g$ est stable par f.
Ou bien $f \circ g = g \circ f \implies \ker g$ est stable par f.

(6.b) Comme f est semi-simple, on déduit que $\ker g$ admet un supplémentaire H stable par f. Or g est un polynôme en f, donc H est stable par g.

(6.c) En considére l'endomorphisme $g_H : H \longrightarrow H$ induit par g sur H. On sait que g_H est injective (puisque $\ker g_H = H \cap \ker g = \{0\}$) donc inversible. Supposons que $\dim H \geq 1$. Alors l'endomorphism g_H est nilpotent et inversible. Ce qui est absurde, donc $H = \{0\}$. On déduit que $E = \ker g$, par suite $g = 0$.

(7) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$ tel que $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{n_i}$, avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de λ_i dans χ_f pour tout $i \in \{1, 2, ..k\}$.

(7.a) Le polynôme $\chi_f \in \mathbb{R}[X]$ donc si $z \in \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\}$ alors $\bar{z} \in \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\}$. Il existe, éventuellement, des réels $\alpha_1, ..., \alpha_m$ et des complexes $z_1, ..., z_p$ tels que

$$\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\} = \{\alpha_1, ..., \alpha_m, z_1, \bar{z}_1, ..., z_p, \bar{z}_p\}.$$

D'où

$$\begin{aligned} Q &= \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i) \\ &= \prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_i) . \prod_{j=1}^{p} [(X - z_j)(X - \bar{z}_j)] \\ &= \prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_i) . \prod_{j=1}^{p} (X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_j) X + |z_j|^2) \in \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

Donc $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Ou bien $Q = \dfrac{P}{\mathrm{p\,gcd}(P, P')}$ et $\mathrm{p\,gcd}(P, P') \in \mathbb{R}[X]$...

(7.b) On a : $(Q(f))^n = Q^n(f)$. Or $Q^n = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^n$, donc χ_f divise Q^n, par suite $Q^n(f) = 0$. D'où $Q(f)$ est nilpotent. Comme de plus f est semi-simple, d'aprés (6) $Q(f) = 0$. On déduit que f est annulé par un polynôme réel sans facteurs carrés.

Partie 4. $(C_3) \Rightarrow (C_1)$

(8) Comme A est annulé par Q scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

(9) Comme A est semblable dans $M_n(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale ~~$D \in M_n(\mathbb{R})$, donc~~ d'aprés (3), A et D sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

(10)(10.a) Supposons que n est impair. Donc $\lim_{x \to +\infty} \chi_A(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \chi_A(x) = -\infty$. Comme χ_A est continue sur $\mathbb{R}$ et change de signe, par le théorème des valeurs intermédiaires on déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A(\alpha) = 0$, ce qui est absurde. Donc n est pair.

Où bien les racines de χ_A sont deux à deux conjuguées et de même multiplicité...

(10.b) On a : $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$. Si z est une racine de χ_A alors $\bar{z}$ est une racine de χ_A. Il existe donc $(z_1, z_2, .., z_p) \in \mathbb{C}^p$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} z_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 & & & \\ & 0 & . & 0 & \\ & & & z_p & 0 \\ 0 & & & 0 & \bar{z}_p \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P.\left(A_{z_1} \oplus ... \oplus A_{z_p}\right).P^{-1}. \end{aligned}$$

(10.c) D'aprés $(I.1)$, pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, si $z_j = a_j + i.b_j$ alors A_{a_j,b_j} et A_{z_j} sont semblables dans $M_2(\mathbb{C})$. En utilisant la question $(I.2)$ on déduit que $A_{z_1} \oplus ... \oplus A_{z_p}$ est semblable dans $M_n(\mathbb{C})$ à $A' = A_{a_1,b_1} \oplus ... \oplus A_{a_p,b_p}$. Or A' est une matrice normale. On conclut que A est semblable dans $M_n(\mathbb{C})$ à une matrice normale A'.

(10.d) D'aprés $(I.3)$ A et A' sont deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$, donc semblables dans $M_n(\mathbb{R})$ .On conclut que A est semblable dans $M_n(\mathbb{R})$ à une matrice normale A'.

(11) Soit $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres réelles éventuelles de A et $z_1, \bar{z}_1, ..., z_p, \bar{z}_p$ ses valeurs propres dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Comme A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que

$$\begin{aligned} A &= P.diag\left(\lambda_1, ..., \lambda_k, z_1, \bar{z}_1, ..., z_p, \bar{z}_p\right).P^{-1} \\ &= P.\left(D \oplus A_{z_1} \oplus ... \oplus A_{z_p}\right)P^{-1}, \end{aligned}$$

où $D = diag\left(\lambda_1, ..., \lambda_k\right) \in M_k(\mathbb{R})$. Comme dans le cas précédent, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, A_{a_i,b_i} et A_{z_i} sont semblables dans $M_2(\mathbb{C})$. En utilisant la question $(I.2)$ on déduit que $D \oplus A_{z_1} \oplus ... \oplus A_{z_p}$ est semblable dans $M_n(\mathbb{C})$ à $M = D \oplus A_{a_1,b_1} \oplus ... \oplus A_{a_p,b_p}$. On conclut que A est semblable dans $M_n(\mathbb{C})$ à M. D'aprés $(I.3)$ A et M sont deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$, donc semblables dans $M_n(\mathbb{R})$. De plus $M \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice normale. Donc A est semblable dans $M_n(\mathbb{R})$ à une matrice normale.

Partie 5. Deux petites applications

(12) Soit H un sous groupe **fini** de $GL(E)$. Tout automorphisme $f \in H$ est d'ordre fini. Il existe donc un entier naturel non nul m tel que $f^m = Id_E$. On déduit que

$$Q = X^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{m}})$$

est un polynôme annulateur de f. Comme Q est sans facteurs carrés, alors f est semi-simple.

(13) Soient (Ω, τ, P) un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoirès indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

(13.a) On a l'évènement $(X=Y)=\bigsqcup_{k=1}^{+\infty}(X=k,Y=k)$. Donc

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k,Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(p(1-p)^{k-1}\right)^2 = p^2\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}$$

(13.b) Pour $\omega\in\Omega$, on définit la matrice $M(\omega)$ par :

$$M(\omega)=\begin{pmatrix} X(\omega) & -X(\omega) \\ Y(\omega) & -Y(\omega)\end{pmatrix}.$$

Soit $f(\omega)$ l'endomorphisme associé canoniquement à $M(\omega)$.

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) &= \lambda^2+(X(\omega)-Y(\omega))\lambda \\
&= \lambda(\lambda+(X(\omega)-Y(\omega))).
\end{aligned}$$

Si $X(\omega)-Y(\omega)\neq 0$.Donc χ_f est sans facteurs carrés d'où $f(\omega)$ est semi-simple.
Si $X(\omega)-Y(\omega)=0$.Donc $\chi_f(\lambda)=\lambda^2 \Longrightarrow f^2=0$. Supposons que f est semi-simple, d'aprés $(III.6)$ $f=0$. Absurde.
L'événement " f est semi-simple" est l'événement contraire de l'événement $(X=Y)$.
La probablité pour que f soit semi-simple vaut

$$\begin{aligned}
P(X\neq Y) &= 1-P(X=Y) \\
&= 1-\frac{p}{2-p}. \\
&= \frac{2-2p}{2-p}.
\end{aligned}$$