République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2018

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2018

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Date: Mercredi 06 Juin 2018 Heure: 8H Durée : 3H Nbre de pages : 4

Barème : Part.I : (5 pts), Part.II : (4,5 pts), Part. III : (3,5 pts), Part. IV : (4 pts), Part.V : (3 pts).

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A, $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace. On admet que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(A.B) = \mathrm{Tr}(B.A)$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, on note $A \oplus B$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{K})$ définie par :

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B \end{pmatrix}.$$

- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. On note :
  - $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
  - Pour tout entier $k \geq 1$, $f^k = f \circ f^{k-1}$ avec la convention $f^0 = id_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E.
  - Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k$.
- On rappelle que le polynôme caractéristique d'une matrice A (resp, d'un endomorphisme f) est donné par :

$$\chi_A(X) = \det(X.I_n - A) \quad (\text{resp. } \chi_f(X) = \det(X.id_E - f)).$$

Les candidats sont invités à utiliser sans justification les calculs par blocs comme par exemple

$$(A_1 \oplus B_1).(A_2 \oplus B_2) = A_1.A_2 \oplus B_1.B_2 \quad \text{et} \quad {}^t(A_1 \oplus B_1) = {}^tA_1 \oplus {}^tB_1,$$

où $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$.

Définitions

1. On rappelle que deux matrices A et B sont dites semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = P.B.P^{-1}$.
2. Un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ est dit **sans facteurs carrés**, si toutes ses racines dans $\mathbb{C}$ sont simples.
3. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **normale** si elle vérifie : ${}^tA.A = A.{}^tA$.
4. Un endomorphisme f de E est dit **semi-simple** si tout sous espace vectoriel de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.
5. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ annule un endomorphisme f si $P(f) = 0$.

On se propose de démontrer le résultat suivant :
Soit f un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(C1) : Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B})$ est **normale**.

(C2) : L'endomorphisme f est **semi-simple**.

(C3) : Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$, **sans facteurs carrés** tel que $Q(f) = 0$.

Partie I. Préliminaires

(1) **Matrices normales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on note :

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix} ; \text{ avec } z = a + ib \in \mathbb{C}.$$

(1.a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est **normale** si et seulement si A est symétrique, ou bien de la forme $A = A_{a,b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(1.b) Justifier que $A_{a,b}$ et A_z sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(2) Soient $p, n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_p \quad \text{et} \quad B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_p,$$

où A_i et $B_i \in M_{n_i}(\mathbb{R})$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,p\}$.

(2.a) Justifier que si A_i est **normale** pour tout $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ alors A est **normale**.

(2.b) Montrer que si A_i et B_i sont semblables dans $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ alors A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(3) Dans cette question, on se propose de démontrer que deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$, sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $A = P.B.P^{-1}$.

(3.a) En écrivant P sous la forme : $P = P_1 + iP_2$, avec P_1 et $P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifier que :

$$A.P_1 = P_1.B \quad \text{et} \quad A.P_2 = P_2.B.$$

(3.b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$A.(P_1 + tP_2) = (P_1 + tP_2).B.$$

(3.c) Soit Q le polynôme défini par :

$$Q(X) = \det(P_1 + XP_2).$$

Vérifier que $Q(i) \neq 0$ et en déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(P_1 + \alpha P_2) \in GL_n(\mathbb{R}).$$

(3.d) En déduire que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie II. (C_1)$\Rightarrow$(C_2)

Soit f un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E tels que $A := Mat(f, \mathcal{B})$ est une matrice **normale**. On se propose de démontrer que f est **semi-simple**.

(4) **Cas euclidien** : On suppose dans cette question que E est un espace euclidien et que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

(4.a) Montrer que si $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale de E, alors la matrice $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_1)$ est **normale**.

(4.b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et F un sous espace vectoriel de E de dimension p, stable par f. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de E et des matrices $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ telles que

$$M := \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0_{n-p,p} & A_2 \end{pmatrix}.$$

(4.c) En utilisant l'égalité : ${}^tM.M = M.\,{}^tM$, montrer que $Tr(C.{}^tC) = 0$ puis que C est la matrice nulle.

(4.d) En déduire que l'orthogonal de F, noté $F^\perp$ est stable par f. Conclure.

(5) **Cas général** : Pour $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \in E$, on pose $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

(5.a) Vérifier que φ définit un produit scalaire sur E et que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

(5.b) En déduire que f est **semi-simple**.

Partie III. (C_2)$\Rightarrow$(C_3)

Soit f un endomorphisme **semi-simple** de E. On se propose de démontrer que l'endomorphisme f est annulé par un polynôme **sans facteurs carrés** $Q \in \mathbb{R}[X]$.

(6) Soit R un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'endomorphisme $g = R(f)$ est nilpotent.

(6.a) Vérifier que $\ker g$ est stable par f.

(6.b) En déduire qu'il existe un supplémentaire H de $\ker g$ dans E, stable par g.

(6.c) En considérant l'endomorphisme induit par g sur H, montrer que $g = 0$.

(7) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$ tel que $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{n_i}$, avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de λ_i dans χ_f pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

(7.a) Montrer que le polynôme $Q = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i) \in \mathbb{R}[X]$.

(7.b) Montrer que $Q(f)$ est nilpotent. En déduire que $Q(f) = 0$.

Partie IV. (C_3)$\Rightarrow$(C_1)

Soit f un endomorphisme de E et $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme **sans facteurs carrés** tels que $Q(f) = 0$. On se propose de démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}_1$ de E telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_1)$ est **normale**. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$. Il s'agit donc de démontrer que A est semblable, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à une matrice **normale**.

(8) Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(9) On suppose dans cette question que toutes les valeurs propres de A sont réelles. Démontrer que A est semblable dans, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à une matrice diagonale.

(10) On suppose dans cette question que A n'a pas de valeurs propres réelles.

(10.a) Justifier que n est pair.
Dans la suite, on pose $p = \frac{n}{2}$.

(10.b) Montrer qu'il existe $(z_1, z_2, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$A = P.\left(A_{z_1} \oplus A_{z_2} \oplus \cdots \oplus A_{z_p}\right).P^{-1}.$$

(10.c) En utilisant les questions **I.**(1) et **I.**(2), montrer que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice **normale** $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(10.d) Conclure en utilisant la question **I.**3.

(11) On revient au cas général. Montrer que A est semblable, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à une matrice **normale**.

Partie V. Deux petites applications

Les deux questions suivantes sont indépendantes. On désigne par $GL(E)$ le groupe des automorphismes de l'espace E.

(12) Soit H un sous-groupe **fini** de $GL(E)$. Montrer que tout automorphisme $f \in H$ est **semi-simple**.

(13) Soient (Ω, τ, P) un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

(13.a) Calculer la probabilité de l'événement $(X = Y)$.

(13.b) Pour $\omega \in \Omega$, on définit la matrice $M(\omega)$ par :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & -X(\omega) \\ Y(\omega) & -Y(\omega) \end{pmatrix}.$$

Soit $f(\omega)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M(\omega)$.
Montrer que la probablité pour que f soit **semi-simple** vaut $\frac{2-2p}{2-p}$.

Fin de l'énoncé