Partie I. Inégalité de Hölder

1. Par la concavité de $x \mapsto \ln(x)$, on a pour tous $a, b > 0$ et tout $\lambda \in [0,1]$ l'inégalité :

$$\lambda \ln(a) + (1-\lambda)\ln(b) \leq \ln(\lambda a + (1-\lambda)b).$$

Pour $\lambda = \frac{1}{p}$ on obtient l'inégalité voulue. Enfin celle-ci reste vraie si $a = 0$ ou $b = 0$.

2. Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente à

$$a = \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} \quad \text{et} \quad b = \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}.$$

3. De même on a aussi

$$\frac{a_2 b_2}{(a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + b_2^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{a_2^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_2^q}{b_1^q + b_2^q}$$

donc en sommant les inégalités obtenues puis en simplifiant on obtient celle voulue.

4. En reprenant l'inégalité du 2. avec

$$a = \frac{a_j^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} \text{ et } b = \frac{b_j^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

puis en sommant les inégalités obtenues, on obtient celle voulue.

Partie II. Fonctions höldériennes

1. a) On a $g'(x) = u'(x) - u'(x-y) = \alpha(x^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1})$. Comme la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est décroissante sur $]0,1]$ et $x - y \leq x$, on a $(x-y)^{\alpha-1} \geq x^{\alpha-1}$ et ainsi $g'(x) \leq 0$. La fonction g est alors décroissante sur $[y,\ 1]$

   b) On a $g(y) = 0$ donc $g(x) \leq 0$ sur $[y,\ 1]$. Ainsi, pour $0 \leq y \leq x \leq 1$, $(x^\alpha - y^\alpha) = u(x) - u(y) \leq u(x-y) = (x-y)^\alpha$. Enfin, on trouve que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x-y|^\alpha$. Donc u est α-hölderienne pour $k = 1$.

2. La fonction nulle est clairement dans Hol_α disons pour $k = 1$. Si g_1 et g_2 sont dans Hol_α et λ est un nombre réel, alors il existe deux constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que

$$\forall (x,\ y) \in [0,1]^2,\ |g_1(x) - g_1(y)| \leq k_1|x-y|^\alpha \ et\ |g_2(x) - g_2(y)| \leq k_2|x-y|^\alpha$$

Grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}|\lambda g_1(x) + g_2(x) - \lambda g_1(y) - g_2(y)| &\leq |\lambda||g_1(x) - g_1(y)| + |g_2(x) - g_2(y)| \\ &\leq |\lambda| k_1 |x-y|^\alpha + k_2|x-y|^\alpha \\ &\leq (|\lambda| k_1 + k_2)|x-y|^\alpha\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\lambda g_1 + g_2$ est dans Hol_α pour $k = |\lambda| k_1 + k_2$. L'ensemble Hol_α est donc bien un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

3. Soit $t \in]0,1]$. La fonction F définie sur $]0,1]$ par $F(x) = t^x = \exp(x\ln(t))$ est décroissante sur $]0,1]$. Donc si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ et si $(x,\ y) \in [0,1]^2$ alors $|x-y|^\beta \leq |x-y|^\alpha$ y compris si $x = y$. De ce fait toute fonction dans Hol_β appartient à Hol_α.

4. Soit f une fonction appartenant à un Hol_α pour $k > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{1/\alpha}$ La condition $|x-y| < \eta$ entraîne

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^\alpha \leq k\eta^\alpha \leq \varepsilon.$$

Ainsi on a bien $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

5. Supposons que qu'il existe $\alpha \in]0,1]$ tel que $f \in \mathrm{Hol}_\alpha$. Il existerait alors $k > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^\alpha .$$

En particulier pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{x^\alpha |\ln x|} \leq k$. Mais $\frac{1}{x^\alpha |\ln x|} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ donc on aboutit à une contradiction. Par conséquent, pour tout $\alpha \in]0,1]$, $f \notin \mathrm{Hol}_\alpha$.

6. Soit f une fonction dans $C^1([0,1])$ D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_\infty |x-y|.$$

$\|f'\|_\infty$ est fini car f' est continue sur le compact $[0,1]$.
Donc f appartient à Hol_1 donc à tous les Hol_α, d'après la question 3.
La réciproque est fausse. En effet $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ est dans Hol_1 donc dans tous les Hol_α sans être dérivable.

Partie III. Polynômes de Bernstein

1. Les variables $Y_1, \ , Y_n$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bemoulli $\mathcal{B}(x)$, de paramètre $x \in [0,1]$ donc $S_n = \sum_{p=1}^{n} Y_p$ suit loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$, de paramètre (n,x).

2. a) Soient $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. S_n suit la loi $\mathcal{B}(n,\ x)$. Donc $\mathbb{P}(S_n = k) = B_{n,k}(x)$. Par conséquent $0 \leq B_{n,k}(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

   b) On considère $(\widetilde{Y}_p)_{p \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1-x$ et on pose $\widetilde{S}_n = \sum_{p=1}^{n} \widetilde{Y}_p$. Avoir k succès lors de la répétition de n épreuves indépendantes de Bemoulli de paramètre $x \in [0,1]$ est équivalent à avoir $n-k$ échecs. On a donc, pour tout $x \in [0,1]$, $B_{n,k}(x) = \mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(\widetilde{S}_n = n-k) = B_{n,n-k}(1-x)$.

   c) S_n suit loi binomiale de paramètre (n,x) donc $\mathbb{E}(S_n) = nx$ et $\mathbb{V}(S_n) = nx(1-x)$.

   d) Soit $x \in [0,1]$. On a $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{E}(S_n) = nx$. D'autre part,

   $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}(S_n^2) - (\mathbb{E}(S_n))^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) - (nx)^2$ donc

   $$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) = nx(1-x) + (nx)^2.$$

   $$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 .$$

3. Soit $n \geq 2$ un entier.
Pour $1 \leq k \leq n$, en remarquant que $S_n = S_{n-1} + X_n$, on a

$$(S_n = k) = ((S_{n-1} = k) \cap (X_n = 0)) \cup ((S_{n-1} = k-1) \cap (X_n = 1)) ,$$

où l'union est disjointe. Par indépendance, d'une part des événements $(S_{n-1} = k)$ et $(X_n = 0)$, et d'autre part des événements $(S_{n-1} = k-1)$ et $(X_n = 1)$, la formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \mathbb{P}(X_n = 0)\mathbb{P}(S_{n-1} = k) + \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1) \\ &= (1-x)\mathbb{P}(S_{n-1} = k) + x\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1) . \end{aligned} \qquad (\star)$$

Puisque $(S_{n-1} = -1) = \emptyset$ et $(S_{n-1} = n) = \emptyset$ on obtient
$\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0)\mathbb{P}(S_{n-1} = 0) = (1-x)\mathbb{P}(S_{n-1} = 0)$ et
$\mathbb{P}(S_n = n) = \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(S_{n-1} = n-1) = x\mathbb{P}(S_{n-1} = n-1)$.
Pour $1 \leq k \leq n-1$, la relation $(\star)$ entraîne que

$$\forall x \in [0,1], \quad B_{n,k}(x) = (1-x)B_{n-1,k}(x) + xB_{n-1,k-1}(x).$$

Si on pose, $B_{n,-1} = B_{n-1,n} = 0$, cete relation restera vraie pour $k = 0$ et $k = n$.
On peut ainsi conclure que l'on a, pour $0 \leq k \leq n$,

$$B_{n,k}(X) = (1-X)B_{n-1,k}(X) + XB_{n-1,k-1}(X),$$

puisque ces polynômes sont égaux sur $[0,1]$.

4. On sait que S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$. La variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$ prend les valeurs $\left\{\dfrac{k}{n}\ ;\ 0 \leq k \leq n\right\}$ et $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{k}{n}\right) = \mathbb{P}(S_n = k) = B_{n,k}(x)$. Le théorème de transfert implique que pour toute $f \in C(0,1]$,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{k,n}(x) = B_n(f)(x).$$

Puisque, $\mathbb{E}(f(x)) = f(x)$, on obtient

$$B_n(f)(x) - f(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - \mathbb{E}(f(x)) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right).$$

5. Pour tout $\delta > 0$, On a d'après l'inégalit de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\delta^2}.$$

D'autre part, $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = x$ et $\mathbb{V}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{x(1-x)}{n}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2},$$

la demière inégalité provient du fait que le maximum de la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est $\dfrac{1}{4}$.

6. D'après l'énoncé, $Z(\Omega)$ est fini. On note donc $Z(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ les valeurs prises par Z. Puisque $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\mathbb{P}(Z = x_k)$, on a

$$\varphi(\mathbb{E}(Z)) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\mathbb{P}(Z = x_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Z = x_k)\varphi(x_k),$$

où on a utilisé le fait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Z = x_k) = 1$ pour appliquer la définition généralisée de la convexité de φ. Le théorème de transfert permet d'identifier le terme de droite de l'inégalité précédente à $\mathbb{E}(\varphi(Z))$. On a donc bien $\varphi(\mathbb{E}(Z)) \leq \mathbb{E}(\varphi(Z))$.

7. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, le théorème de Heine implique que f est uniformément continue. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{1}_{\{|\frac{S_n}{n} - x| < \delta\}} + \left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \mathbb{1}_{\{|\frac{S_n}{n} - x| \geq \delta\}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{1}_{\{|\frac{S_n}{n} - x| < \delta\}} + 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\{|\frac{S_n}{n} - x| \geq \delta\}} \end{aligned}$$

D'après la question 4., on a pour tout $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| = |\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)|$. La fonction valeur absolue étant convexe, on a d'après la question 6.,

$$\forall x \in [0,1], \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}\left(\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right|\right).$$

Ainsi par la croissance et la linéarité de l'espérance, on obtient pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{|\frac{S_n}{n} - x| < \delta\}}\right) + 2\|f\|_\infty \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{|\frac{S_n}{n} - x| \geq \delta\}}\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \delta\right) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \end{aligned}$$

La dernière inégalité est conséquence de la question 5. et du fait que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \delta\right) \leq 1$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} = 0$, à partir d'un certain rang indépendant de x, on a pour tout $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. La suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge donc uniformément vers f sur $[0,1]$.

8. Soit $f \in C([a,b])$. Pour $t \in [0,1]$, on pose $g(t) = f(a + t(b-a))$. Ainsi $g \in C([0,1])$ et pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$. D'après la question 7., la suite $(B_n(g))_{n \geq 1}$ uniformément, sur $[0,1]$, vers g. Pour $x \in [a,b]$, on pose $P_n(x) = B_n(g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$. P_n est un polynôme et on a pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| B_n(g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| \\ &\leq \|B_n(g) - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc, $\|P_n - f\|_\infty \leq \|B_n(g) - g\|_\infty$ et alors la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

9. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$.
Posons $f = \lim\limits_{n \to +\infty} P_n$. À partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$, $\|P_n - f\|_\infty \leq 1$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, $\|P_n - P_N\|_\infty \leq 2$. $P_n - P_N$ est un polynôme. Comme il est majoré, il est constant. Autrement dit, il existe $c_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = P_N + c_n$. Or on a $c_n = P_n(0) - P_N(0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(0) - P_N(0) = c$. Donc $f = \lim\limits_{n \to +\infty} P_n = P_N + c$ est un polynôme. On peut conclure que toute suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$, converge vers un polynôme.
Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas un polynôme ne peut pas être limite uniforme d'une suite de polynômes. Donc le théorème de Weierstrass n'est pas valable si on remplace $[a,b]$ par $\mathbb{R}$.

Partie IV. Estimation de l'erreur dans le cas höldérien

1. Puisque f appartient à $\mathrm{Hol}_\alpha(\ell)$, f est continue sur $[0,1]$ (question **II**, 4.) donc $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ (question **III**, 7.).

2. D'après la question **III**, 4., on obtient pour tout $x \in [0,1]$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right).$$

En utilisant la croissance et la linéarité de l'espérance, on obtient pour tout $x \in [0,1]$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}\left(\ell\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^\alpha\right) = \ell\,\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^\alpha\right).$$

3. On a par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^\alpha\right) = \sum_{k=0}^{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|^\alpha \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n}\left[\left|x - \frac{k}{n}\right|^\alpha (\mathbb{P}(S_n = k))^{\frac{\alpha}{2}})(\mathbb{P}(S_n = k))^{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

On prend $p = \dfrac{2}{\alpha}$ et $q = \dfrac{2}{2-\alpha}$ qui vérifient bien $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
L'inégalité de Hölder obtenue à la première partie permet alors d'écrire :

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^\alpha\right) \leq \left(\sum_{k=0}^{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|^2 \mathbb{P}(S_n = k)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n = k)\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}. \qquad (\star\star)$$

On a bien sûr $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n = k) = 1$, alors la relation $(\star\star)$ nous donne

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^\alpha\right) \leq \left(\sum_{k=0}^{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|^2 \mathbb{P}(S_n = k)\right)^{\frac{\alpha}{2}} = \left(\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^2\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

4. Soit $f \in \mathrm{Hol}_\alpha(\ell)$. D'après les questions **IV**, 2. et **IV**, 3., on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \ell\,\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^\alpha\right) \leq \ell\left(\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^2\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

D'autre part on a,

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^2\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(|S_n - nx|^2) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)|^2) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{nx(1-x)}{n^2} \leq \frac{1}{4n},$$

car $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$, pour tout $x \in [0,1]$.

On a donc pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \ell\left(\dfrac{1}{4n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$, soit

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \ell\left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Partie V. Fonctions continues nulle part dérivables

1. Si h est dérivable en a, c'est que (au voisinage de a), on peut écrire

$$h(a+\varepsilon) = h(a) + \varepsilon h'(a) + \varepsilon g(\varepsilon),$$

où g est une fonction telle que $\lim_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon) = 0$. On a donc, en posant $x_n = a + \alpha_n$ et $y_n = a - \beta_n$ (avec α_n et β_n positifs et $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$),

$$\frac{h(x_n) - h(y_n)}{x_n - y_n} = \frac{(\alpha_n + \beta_n)h'(a) + \alpha_n g(\alpha_n) + \beta_n g(-\beta_n)}{\alpha_n + \beta_n} = h'(a) + r_n,$$

avec $r_n = \dfrac{\alpha_n g(\alpha_n) + \beta_n g(-\beta_n)}{\alpha_n + \beta_n}$.

On a $|r_n| \leq \dfrac{\alpha_n |g(\alpha_n)|}{\alpha_n + \beta_n} + \dfrac{\beta_n |g(-\beta_n)|}{\alpha_n + \beta_n} \leq |g(\alpha_n)| + |g(-\beta_n)|$.

Ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{h(x_n) - h(y_n)}{x_n - y_n} = h'(a)$.

2. On a pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $|f_k(x)| \leq \dfrac{1}{r^k}$. Par conséquent, la série de terme général f_k converge normalement vers f. Donc f est bien définie et elle est continue sur $\mathbb{R}$.

3. a) Notons k_n la partie entière de $xm^n + \dfrac{1}{4\pi}$. On a bien $k_n = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ k \leq xm^n + \dfrac{1}{4\pi} \right\}$.

   b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n \leq xm^n + \dfrac{1}{4\pi} < k_n + 1$. Par conséquent, $4k_n \leq 4m^n x + \dfrac{1}{\pi} \leq 4m^n x + 1$ et $4m^n x < 4m^n x + \dfrac{1}{\pi} < 4k_n + 4 < 4k_n + 5$. Il vient, $y_n \leq x < x_n$. D'autre part, $x_n - y_n = \dfrac{3}{2m^n}$ et finalement $\lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0$ car $m > 1 + 6\pi$.

4. a) On a $f_k(x_n) = \dfrac{\sin\left(\frac{(4k_n+5)m^{k-n}\pi}{2}\right)}{r^k}$ et $f_k(x_n) = \dfrac{\sin\left(\frac{(4k_n-1)m^{k-n}\pi}{2}\right)}{r^k}$.

   Puisque m est pair, $f_k(x_n) = f_k(y_n) = 0$ si $k > n$. Si $k = n$ alors $f_n(x_n) = \dfrac{1}{r^n}$ et $f_n(y_n) = -\dfrac{1}{r^n}$.

   b) D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x_n) - f_k(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= \frac{2}{r^n(x_n - y_n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k(x_n) - f_k(y_n)}{x_n - y_n}.
\end{aligned}$$

   c) On a $x_n - y_n = \dfrac{3}{2m^n}$, alors on trouve que

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} &= \frac{4}{3}\left(\frac{m}{r}\right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k(x_n) - f_k(y_n)}{x_n - y_n} \\
&\geq \frac{4}{3}\left(\frac{m}{r}\right)^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k(x_n) - f_k(y_n)}{x_n - y_n} \right| \\
&\geq \frac{4}{3}\left(\frac{m}{r}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|f_k(x_n) - f_k(y_n)|}{x_n - y_n}.
\end{aligned}$$

d) D'après le théorème des accroissement finis il existe $z_n \in]y_n\,,\,x_n[$ tel que

$$\frac{|f_k(x_n) - f_k(y_n)|}{x_n - y_n} = |f_k'(z_n)|\,,$$

et donc que

$$\frac{|f_k(x_n) - f_k(y_n)|}{x_n - y_n} = 2\pi\left(\frac{m}{r}\right)^k |\cos(2\pi m^k z_n)| \leq 2\pi\left(\frac{m}{r}\right)^k.$$

e) D'après la question **V**.4.d) on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|f_k(x_n) - f_k(y_n)|}{x_n - y_n} \leq 2\pi \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{m}{r}\right)^k = 2\pi\frac{\left(\frac{m}{r}\right)^n - 1}{\left(\frac{m}{r}\right) - 1}.$$

Et on obtient le résultat souhaité d'après la question **V**.4.c)

f) Si f était dérivable en x alors, d'après la question **V**.1., $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$ serait $f'(x)$. D'après la question **V**.4.e), on obtient

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \geq \left(\frac{m}{r}\right)^n \left[\frac{4}{3} - 2\pi\frac{1 - \left(\frac{r}{m}\right)^n}{\left(\frac{m}{r}\right) - 1}\right] \geq \left(\frac{m}{r}\right)^n \left[\frac{4}{3} - \frac{2\pi}{\left(\frac{m}{r}\right) - 1}\right].$$

Mais $\dfrac{m}{r} > 1 + 6\pi$ donc $\dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \geq \left(\dfrac{m}{r}\right)^n$ et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = +\infty$. Par conséquent, f n'est pas dérivable en x. Comme le choix de x est arbitraire, f n'est nulle part dérivable.

5. Soit $h \in \mathcal{C}([0,1])$. Alors d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$ qui converge uniformément vers h sur $[0,1]$.

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $\varphi_n(x) = \dfrac{f(x)}{n} + P_n(x)$. Alors pour tout $n \geq 1$, φ_n est continue sur $[0,1]$ mais y est nulle part dérivable. D'autre part, la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers h.