République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2018

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2018

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Date: Jeudi 31 mai 2018	**Heure: 8H**	**Durée : 4H**	**Nbre de pages : 4**

Barème : Partie I : 2 pts, Partie II : 4 pts, Partie III : 6 pts, Partie IV : 4 pts, Partie V : 4 pts.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Rappels et notations

- Pour tous entiers k et n avec $k \leq n$, on note $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, le coefficient du binôme.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on notera $\mathbb{P}(X = x)$ la probabilité de $X^{-1}(\{x\})$, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
- Pour $a < b$, on désignera par $\mathcal{C}([a,b])$; l'espace des fonctions à valeurs réelles continues et définies sur $[a,b]$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$, pour $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

  De même $\mathcal{C}^k([a,b])$ sera l'espace des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur $[a,b]$ avec $1 \leq k \leq \infty$.

Partie I. Inégalité de Hölder

Soient $p,q > 0$ tels que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. En exploitant la concavité de $x \mapsto \ln x$, établir que pour tout $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$
2. Soient a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}_+^*$, déduire de ce qui précède que :
$$\frac{a_1 b_1}{(a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}\right).$$
3. Conclure que :
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq (a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q)^{\frac{1}{q}}.$$

4. Plus généralement, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels positifs $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Partie II. Fonctions höldériennes

Soit $\alpha \in]0,1]$. Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite α-höldérienne sur $[0,1]$, s'il existe $k > 0$ tels que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^\alpha.$$

On appelle Hol_α, l'ensemble des fonctions α-höldériennes.

1. Soit $\alpha \in]0,1]$. On considère la fonction u définie sur $[0,1]$ par $u : x \mapsto x^\alpha$.
   a) On fixe $y \in]0,1]$. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = u(x) - u(y) - u(x-y)$ est décroissante sur $[y,1]$.
   b) En déduire que la fonction u est α-höldérienne.
2. Montrer que Hol_α est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Soient α et β deux réels de $[0,1]$ tels que $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$. Montrer que $\mathrm{Hol}_\beta \subset \mathrm{Hol}_\alpha$.
4. Soit $f \in \mathrm{Hol}_\alpha$, $\alpha \in]0,1]$. Montrer que $f \in \mathcal{C}([0,1])$.
5. On considère la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (\ln x)^{-1} & \text{si} \quad 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -(\ln 2)^{-1} & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

   Montrer que $f \in \mathcal{C}([0,1])$ mais que, pour tout $\alpha \in]0,1]$, $f \notin \mathrm{Hol}_\alpha$.
6. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1]$, f est dans Hol_α.
   La réciproque est-elle vraie ?

Partie III. Polynômes de Bernstein

On appelle polynômes de Bernstein de degré $n \in \mathbb{N}^*$ les polynômes réels :

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}; \quad 0 \leq k \leq n.$$

On considère $(Y_p)_{p \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0,1]$. On notera $S_n = \sum_{p=1}^{n} Y_p$.

1. Donner la loi de S_n.
2. a) Montrer que $0 \leq B_{n,k}(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$, on a : $B_{n,k}(x) = B_{n,n-k}(1-x)$, pour tout $x \in [0,1]$.
   c) Donner les valeurs de $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

d) En déduire les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x)$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x)$ puis $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.

3. Pour tout entier $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$, calculer, en utilisant l'indépendance des variables aléatoires Y_p, $\mathbb{P}(S_n = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(S_{n-1} = k)$ et de $\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1)$. En déduire l'expression de $B_{n,k}(X)$ en fonction de $B_{n-1,k}(X)$ et de $B_{n-1,k-1}(X)$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}.$$

4. Montrer que pour tout f dans $\mathcal{C}([0,1])$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x) \quad \text{et que} \quad B_n(f)(x) - f(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right).$$

5. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.
6. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans un ensemble fini et φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{E}(Z)) \leq \mathbb{E}(\varphi(Z))$.
7. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Montrer que $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f.
8. Établir le théorème de Weierstrass, c'est à dire si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ alors toute fonction dans $\mathcal{C}([a,b])$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
9. Montrer que toute suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ tout entier, converge vers un polynôme. En déduire que le théorème de Weierstrass n'est pas valable si on remplace $[a,b]$ par $\mathbb{R}$.

Partie IV. Estimation de l'erreur dans le cas höldérien

Soit $\ell > 0$ et $\alpha \in]0,1]$. Posons

$$\mathrm{Hol}_\alpha(\ell) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ telle que } \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \ell |x-y|^\alpha\}.$$

1. Montrer que pour toute fonction f dans $\mathrm{Hol}_\alpha(\ell)$, la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f.
2. Montrer que pour toute fonction f dans $\mathrm{Hol}_\alpha(\ell)$, et pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \ell\, \mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^\alpha\right).$$

3. En utilisant les inégalités de Hölder, prouver que :

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^\alpha\right) \leq \left(\sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right|^2 \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right)\right)^{1-\frac{\alpha}{2}},$$

en déduire que : $\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^\alpha\right) \leq \left(\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|^2\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$.

4. En déduire que si f est dans $\mathrm{Hol}_\alpha(\ell)$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|B_n(f) - f\|_\infty \leq \ell \left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$.

Partie V. Fonctions continues nulle part dérivables

1. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en un réel a. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergeant vers a telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq a \leq x_n$ et $y_n < x_n$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{h(x_n) - h(y_n)}{x_n - y_n} = h'(a).$$

Dans la suite, f_k sera la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k : x \longmapsto f_k(x) = \dfrac{\sin(2\pi m^k x)}{r^k}$, où m est un entier pair et $1 < r < \dfrac{m}{1+6\pi}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

2. Montrer que : f est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit x un nombre réel fixé.
   a) Montrer que : $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{k \leq xm^n + \dfrac{1}{4\pi}\right\}$, existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On notera dans la suite $k_n = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{k \leq xm^n + \dfrac{1}{4\pi}\right\}$.
   b) On pose $x_n = \dfrac{4k_n+5}{4m^n}$, $y_n = \dfrac{4k_n-1}{4m^n}$. Montrer que $y_n \leq x < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Calculer $f_k(x_n)$ et $f_k(y_n)$ pour tout $k \geq n$.
   b) Montrer que : $\dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \dfrac{2}{r^n(x_n - y_n)} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{f_k(x_n) - f_k(y_n)}{x_n - y_n}$.
   c) En déduire que : $\dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \geq \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{m}{r}\right)^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{|f_k(x_n) - f_k(y_n)|}{x_n - y_n}$.
   d) Montrer que : $\dfrac{|f_k(x_n) - f_k(y_n)|}{x_n - y_n} \leq 2\pi \left(\dfrac{m}{r}\right)^k$.
   e) En déduire que : $\dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \geq \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{m}{r}\right)^n - 2\pi \dfrac{\left(\frac{m}{r}\right)^n - 1}{\left(\frac{m}{r}\right) - 1}$.
   f) Prouver que f est continue et nulle part dérivable.
5. Montrer que toute fonction de $\mathcal{C}([0,1])$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues et nulle part dérivables sur $[0,1]$. (On pourra utiliser le théorème de Weierstrass).

Fin de l'énoncé