République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles
de Formation d'Ingénieurs
Session 2020

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2020

Concours Mathématiques et Physique
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I

Exercice

1. (a) Soit $p \in \{1,2,\dots,n\}$. Pour tout $1 \leq j \leq n$, l'application $A \longmapsto |a_{p,j}|$ est continue comme composée de deux applications continues. Par suite, f_p est continue comme combinaison linéaires de fonctions continues.

(b) Comme $]0,\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et, pour tout $p \in \{1,2,\dots,n\}$, f_p est continue alors $f_p^{-1}(]0,\infty[)$ est un ouvert pour chaque $p \in \{1,2,\dots,n\}$. Donc $\mathcal{D} = \bigcap_{p=1}^{n} f_p^{-1}(]0,\infty[)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme intersection finie d'ouverts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

2. Soit $X = {}^t(x_1\, x_2 \cdots x_n) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$. Donc, pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$.

Soit $i_0 \in \{1,2,..,n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. On a $|x_{i_0}| = 0$ car, sinon :

$$|a_{i_0i_0}|\,|x_{i_0}| = \left|-\sum_{j=1,j\neq i_0}^{n} a_{i_0j}x_j\right| \leq \sum_{j=1,j\neq i_0}^{n} |a_{i_0j}|\,|x_j| \leq \left(\sum_{j=1,j\neq i_0}^{n} |a_{i_0j}|\,|x_{i_0}|\right) < |a_{i_0i_0}|\,|x_{i_0}|,$$

qui est absurde. Du fait que $\max_{1\leq i\leq n} |x_i| = |x_{i_0}| = 0$, on déduit que $x_i = 0$, pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Par suite $X = 0$.

Soit $A \in \mathcal{D}$. Alors, d'après le résultat précédent, $\ker A = \left\{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}$. Donc 0 n'est pas une valeur propre de A et, par conséquent, $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que $\mathcal{D} \subset GL_n(\mathbb{R})$.

---

3. Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{D}$ et $t \in [0,1]$. Pour chaque $1 \leq i \leq n$:

$$ta_{ii} + (1-t)b_{ii} > t\sum_{j\neq i}|a_{ij}| + (1-t)\sum_{j\neq i}|b_{ij}| = \sum_{j\neq i}\left(|ta_{ij}| + |(1-t)b_{ij}|\right) \geq \sum_{j\neq i}|ta_{ij} + (1-t)b_{ij}|$$

Ce qui montre que $tA + (1-t)B \in \mathcal{D}$.

---

4. La fonction det est une fonction polynômiale en les coefficients de la matrice A. Ce qui justifie la continuité de l'application déterminant.

---

5. Comme $\mathcal{D}$ est convexe alors $\mathcal{D}$ est connexe par arcs. De plus, l'application det est continue donc l'image $\det(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par l'application det est un intervalle de $\mathbb{R}$. Puisque, d'après la question 2-, $\mathcal{D} \subset GL_n(\mathbb{R})$ cette image ne contient pas 0 . Par suite $\det(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $\det(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}_-^*$. Or $I_n \in \mathcal{D}$ et $\det(I_n) = 1 > 0$ donc $\det(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $\det(A) > 0$ pour tout $A \in \mathcal{D}$.

---

6. Soit $\varepsilon > 0$. On a $a_{ii} \geq \sum\limits_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} |a_{ij}|$ donc $a_{ii} + \varepsilon > \sum\limits_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} |a_{ij}|$, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Donc $A + \varepsilon I_n \in \mathcal{D}$ et, par conséquent, $\det(A + \varepsilon I_n) > 0$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$, par continuité de l'application det on obtient $\det(A) \geq 0$.

Problème

Partie 1 : Préliminaires

1. On a

$$\begin{aligned} \gamma_{n-1} - \gamma_n &= -\frac{1}{n} - \ln(1 - \frac{1}{n}) \underset{n \to +\infty}{=} -\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge alors la série $\sum (\gamma_{n-1} - \gamma_n)$ converge. Il s'ensuit que la suite $(\gamma_n)_n$ converge.

---

2. (a) Soit $x > 0$.

• i) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est cpm sur $\mathbb{R}_+^*$.

ii) Au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \geq 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ converge (car $1 - x < 1$) donc $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

iii) Au voisinage de $+\infty$, $t^2 t^{x-1}e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et $\frac{1}{t^2} \geq 0$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

i), ii) et iii) prouvent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

• On pose, pour $t > 0$, $u(t) = t^x$ et $v(t) = e^{-t}$.

On a $\lim\limits_{t \to 0} u(t)v(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc le crochet $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0.

De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge et vaut $x\Gamma(x)$. D'après la formule d'IPP $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -x\Gamma(x).$$

Comme $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt = -\Gamma(x+1)$ on obtient la formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(b) Pour $k=0$, $\Gamma(0+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1 = 0!$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que $\Gamma(k+1) = k!$. Alors

$$\Gamma(k+2) = (k+1)\Gamma(k+1) = (k+1)k! = (k+1)!.$$

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma(k+1) = k!$.

Partie 2 : Etude d'une intégrale

1. (a) La fonction Φ est continue sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$. De plus

$$\Phi(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} = \frac{\ln(1-t)+t}{t\ln(1-t)} = \frac{-t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)+t}{t(-t+o(t))} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{-1+o(1)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = \Phi(0).$$

Donc Φ est continue en 0. On en déduit que Φ est continue sur $]-\infty,1[$.

(b) La fonction Φ est continue sur $[0,1[$ et prolongeable par continuité en 1 ($\lim_{t\to 1}\Phi(t) = 1$).
Donc $\int_0^1 \Phi(t)\,dt$ est convergente.

2. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Soit $\alpha > 0$.
* La fonction $t \mapsto \frac{e^{-\alpha t}}{t}$ est cpm sur $[\varepsilon,+\infty[$. De plus $t^2\frac{e^{-\alpha t}}{t} = te^{-\alpha t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{e^{-\alpha t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge et $\frac{1}{t^2} \geq 0$ alors $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t}}{t}dt$ converge.
* Le changement de variable $u = \alpha t$ montre que $I(\alpha) = \int_{\varepsilon\alpha}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\alpha u}\alpha du = \int_{\varepsilon\alpha}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du$.

(b) Soient $\alpha,\beta > 0$. D'après 2-(a) les intégrales $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t}}{t}dt$ et $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\beta t}}{t}dt$ convergent donc $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}dt$ converge et

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}dt &= \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t}}{t}dt - \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\beta t}}{t}dt \\
&= \int_{\varepsilon\alpha}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du - \int_{\varepsilon\beta}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du \qquad \text{(d'après 2-(a))} \\
&= \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta}\frac{e^{-u}}{u}du + \int_{\varepsilon\beta}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du - \int_{\varepsilon\beta}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du \\
&= \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta}\frac{e^{-u}}{u}du.
\end{aligned}$$

3. (a) Supposons que $\alpha \leq \beta$. Pour tout $u \in [\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta]$, $\dfrac{e^{-\varepsilon\beta}}{u} \leq \dfrac{e^{-u}}{u} \leq \dfrac{e^{-\varepsilon\alpha}}{u}$. Donc

$$\int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-\varepsilon\beta}}{u} du \leq \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-u}}{u} du \leq \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-\varepsilon\alpha}}{u} du.$$

Par suite

$$e^{-\varepsilon\beta} \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leq \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-u}}{u} du \leq e^{-\varepsilon\alpha} \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Comme $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{-\varepsilon\beta} \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{-\varepsilon\alpha} \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Si $\beta < \alpha$ alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{\varepsilon\beta}^{\varepsilon\alpha} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ et par conséquent

$$\int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-u}}{u} du = -\int_{\varepsilon\beta}^{\varepsilon\alpha} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Donc, dans tous les cas, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

(b) D'après 2-(b), l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ converge et $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt = \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-u}}{u} du$.
De plus, d'après 3-,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$ converge et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

---

4. On effectue le changement de variable $u = -\ln(1-t)$, on obtient

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u}\right) e^{-u} du = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{1-e^{-u}}{u}\right) \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} du.$$

---

5. (a) Les ψ_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$. En effet
Sur $]0,1]$: $\psi_n(u) \underset{u\to 0}{\sim} h(u) \underset{u\to 0}{\to} 0$ donc ψ_n est prolongeable par continuité en 0. Donc ψ_n est intégrable sur $]0,1]$
Sur $[1,+\infty[$: $u^2\psi_n(u) = u^2 e^{-nu} - ue^{-nu} - ue^{-(n+1)u} \underset{u\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\psi_n(u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$.
Comme $u \longmapsto \frac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ alors il en est de même pour ψ_n.
Donc ψ_n est intégrable sur $]0,+\infty[$. (Autres justifications est possibles). De plus

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |\psi_n(u)|\,du &= \int_0^{+\infty} \psi_n(u)\,du \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u-1+e^{-u}}{u} e^{-nu} du \\
&= \int_0^{+\infty} \left(e^{-nu} + \frac{e^{-(n+1)u} - e^{-nu}}{u} \right) du \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-nu} du + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u} - e^{-nu}}{u} du \\
&= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1). \quad (*)
\end{aligned}$$

(b) Pour tout $u > 0$, on a $\dfrac{e^{-u}}{1-e^{-u}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nu}$ (série géométrique de raison e^{-u} et $0 \leq e^{-u} < 1$), par suite

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u)\,du = \int_0^{+\infty} (\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(u))du.$$

D'autre part,
i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ψ_n est cpm et intégrables sur $]0,+\infty[$.
ii) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} \psi_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme $S :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $u \mapsto h(u)\dfrac{e^{-u}}{1-e^{-u}}$ est cpm.
iii) Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\psi_n(u)|\,du = \frac{1}{n} - \ln(\frac{n+1}{n}) \sim \frac{1}{2n^2}$, donc la série $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |\psi_n(u)|\,du$ converge.
D'après le théorème d'intégration terme à terme on en déduit que

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{+\infty} (\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(u))du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \psi_n(u)\,du \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) = \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1)) \\
&= \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N+1) = \lim_{N\longrightarrow+\infty} \gamma_N - \ln(\frac{N+1}{N}) = \gamma
\end{aligned}$$

Partie 3 : Développement en série entière de Φ

1. Soit $x \in [0,1]$.
   Pour $n = 0$, on a $0 \leq u_0(x) = x \leq 1 = \frac{1}{1+0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$. Alors

$$u_{n+1}(x) = \frac{x(1-x)\dots(n+1-x)}{(n+2)!} = u_n(x)\frac{(n+1-x)}{(n+2)} \leq \frac{1}{n+1}\frac{(n+1-x)}{(n+2)} \leq \frac{1}{n+2}.$$

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$.
On a $\forall x \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n \xrightarrow{cu} 0$ sur $[0,1]$.
Autrement : pour tout $k \in \{1,2,..n\}$ $0 \leq k-x \leq k$ donc $x(1-x)\dots(n-x) \leq n!$ par suite $u_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$.

---

2. Soit $t \in]-1,1[$. Comme $1-t>0$ alors la fonction $x \longmapsto (1-t)^x$ est continue sur le segment $[0,1]$. Donc $\int_0^1 (1-t)^x dx$ existe et

$$1 - \int_0^1 (1-t)^x dx = 1 - \left[\frac{e^{x\ln(1-t)}}{\ln(1-t)}\right]_0^1 = 1 + \frac{t}{\ln(1-t)} = t\Phi(t).$$

---

3. (a) Pour $x \in [0,1]$, un développement en série entière donne : $\forall t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}(1-t)^x &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}t^n \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x(1-x)\dots(n-1-x)}{n!}t^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}(x)t^n.\end{aligned}$$

(b) Pour $t \in]-1,1[$,

$$\int_0^1 (1-t)^x dx = \int_0^1 \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}(x)t^n\right)dx = 1 - \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}(x)\right)t^n dx.$$

On pose $v_n(x) = t^n u_{n-1}(x)$, $x \in [0,1]$.
i) Les v_n sont continues sur $[0,1]$.
ii) Pour tout $x \in [0,1]$, $|v_n(x)| = u_{n-1}(x)|t|^n \leq |t|^n$. Comme $\sum |t|^n$ converge alors la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0,1]$.
On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1}\int_0^1 v_n(x)dx$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 v_n(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)dx = 1 - \int_0^1 (1-t)^x dx = t\Phi(t).$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 v_n(x)dx = \left(\int_0^1 u_{n-1}(x)dx\right)t^n$; donc

$$t\Phi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^1 u_{n-1}(x)dx\right)t^n = t\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^1 u_{n-1}(x)dx\right)t^{n-1} = t\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)dx\right)t^n.$$

On en déduit que, pour $t \neq 0$, $\Phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 u_n(x)\,dx \right) t^n$ et par continuité le résultat reste vrai pour $t = 0$. Donc

$$\forall t \in]-1,1[,\ \Phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \text{ où } a_n = \int_0^1 u_n(x)\,dx.$$

---

4. La fonction Φ est DSE sur $]-1,1[$ et $\forall t \in]-1,1[$, $\Phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Comme $F :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \int_0^t \phi(s)\,ds$ est une primitive de Φ sur $]-1,1[$ alors F est aussi DSE sur $]-1,1[$ et

$$\forall t \in]-1,1[,\ F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

i) Pour tout n, $g_n(t) \underset{t \to 1}{\longrightarrow} \frac{a_n}{n+1}$.

ii) Pour tout $t \in]-1,1[$,

$$|g_n(t)| \leq \left| \frac{a_n}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \underbrace{u_n(x)}_{\leq \frac{1}{n+1}} dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge alors la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement et donc uniformément sur $]-1,1[$.

i) et ii) permettent de conclure que F admet une limite en 1 donnée par $\lim_{t \to 1} F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}$.

Or $\lim_{t \to 1} F(t) = \int_0^1 \Phi(t)\,dt = J = \gamma$, donc

$$\gamma = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

Partie 4 : Formule de Taylor et applications

1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nt)^k}{k!} \right| \leq A e^{\beta \frac{k}{n}} \frac{(nt)^k}{k!} = A \frac{\left(nte^{\frac{\beta}{n}}\right)^k}{k!}.$$

Comme la série $\sum_{k\geq 0} \frac{\left(nte^{\frac{\beta}{n}}\right)^k}{k!}$ converge (série exponentielle) alors la série $\sum_{k\geq 0} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nt)^k}{k!}$ converge absolument.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nt)^k}{k!}e^{-nt}$.

i) Pour tout k, u_k est continue sur $\mathbb{R}^+$.

ii) Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in [a,b]$,

$$|u_k(t)| = \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nt)^k}{k!}e^{-nt}\right| \leq \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nb)^k}{k!}\right|.$$

Comme la série $\sum_{k\geq 0}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nb)^k}{k!}\right|$ alors $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,b]$. Donc $\sum u_k$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.

D'après i) et ii) la somme $f_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ de cette série de fonctions est continue sur $\mathbb{R}^+$.

---

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors pour tout $t \in [-1,1]$,

$$G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t) \times \ldots \times G_{X_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n.$$

Or, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}\frac{(x)^n}{n!}t^n = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xt)^n}{n!} = e^{(t-1)x}$$

Donc, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$G_{S_n}(t) = \left(e^{x(t-1)}\right)^n = e^{nx(t-1)}$$

Donc S_n suit la loi de Poisson de paramètre nx.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme S_n suit la loi de Poisson de paramètre nx alors

$$\mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}(S_n) = \frac{1}{n}nx = x.$$

Donc

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{S_n}{n} - x\right)^2\right) = \mathrm{E}\left(\left(\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)^2\right) = \mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}nx = \frac{x}{n}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f\left(\frac{t}{n}\right)$. Comme la série $\sum_{k\geq 0} g(k)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx} =$

$\sum_{k\geq 0} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}$ converge absolument alors la famille $(g(k)P(S_n=k))_{k\in\mathbb{N}} = \left(g(k)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable. D'après le théorème de transfert, $g(S_n)$ admet une espérance finie donnée par

$$E(g(S_n)) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx} = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!} = f_n(x).$$

Donc $f\left(\frac{S_n}{n}\right) = g(S_n)$ admet une espérance finie donnée par

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f_n(x).$$

---

3. (a) i) Comme f est continue au point x alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|t-x| \leq \alpha \Longrightarrow |f(t)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\text{si } |t-x| \leq \alpha \quad \text{alors} \quad |f(t)-f(x)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + 2\tfrac{A}{\alpha^2}(t-x)^2,$$

$$\begin{aligned}\text{si } |t-x| > \alpha \quad \text{alors} \quad |f(t)-f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq 2A \\ &\leq 2\tfrac{A}{\alpha^2}(t-x)^2 \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + 2\tfrac{A}{\alpha^2}(t-x)^2.\end{aligned}$$

Donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|f(t)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{A}{\alpha^2}(t-x)^2$$

---

ii) Comme $\frac{S_n}{n}(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, donc $\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{A}{\alpha^2}\left(\frac{S_n}{n} - x\right)^2$. Par suite

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &= \left|\mathbb{E}(f\left(\frac{S_n}{n}\right))-f(x)\right| \leq \mathbb{E}\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+2\frac{A}{\alpha^2}\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}-x\right)^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+2\frac{A}{\alpha^2}\frac{x}{n}.
\end{aligned}$$

Autrement,

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}-f(x)\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}}_{=1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}-\sum_{k=0}^{\infty} f(x)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2}+2\frac{A}{\alpha^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}}_{=1}+2\frac{A}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de transfert on montre que

$$\frac{x}{n}=\mathrm{E}\left(\left(\frac{S_n}{n}-x\right)^2\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 P(S_n=k),$$

donc

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+2\frac{A}{\alpha^2}\frac{x}{n}.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $\alpha > 0$ tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+2\frac{A}{\alpha^2}\frac{x}{n}.$$

Comme $2\frac{A}{\alpha}\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $2\frac{A}{\alpha^2}\frac{x}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc

$$\forall n \geq n_0, |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

On en déduit que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

---

4. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}$.

i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, v_k est cpm sur $[0,+\infty[$.

ii) $\sum v_k$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et sa somme $f_n = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ est cpm sur $[0,+\infty[$.

iii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} x^2 v_k(x) = \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}x^{k+2}e^{-nx} = 0$ car $n > 0$. Donc $v_k(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ alors v_k est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc v_k est aussi intégrable sur $[0,+\infty[$.

iv) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |v_k(x)|\,dx &= \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \int_0^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}dx = \frac{1}{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \frac{1}{k!}\underbrace{\int_0^{+\infty} y^k e^{-y}dy}_{=k!} = \frac{1}{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &\leq \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|.\end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{k\geq 0} f\left(\frac{k}{n}\right)$ converge absolument alors $\sum_{k\geq 0}\left(\int_0^{+\infty}|v_k(x)|\,dx\right)$ converge.

i), ii), iii) et iv) permettent alors d'intervertir les symboles $\sum$ et $\int$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx &= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k(x)\right)dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} v_k(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\int_0^{+\infty}\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{k!}\frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{+\infty} y^k e^{-y}dx}_{=\Gamma(k+1)=k!} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

---

5. Pour tout k, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq Ae^{\beta\frac{k}{n}} = A\left(e^{\frac{\beta}{n}}\right)^k$. Comme la série $\sum_{k\geq 0}\left(e^{\frac{\beta}{n}}\right)^k$ converge (série géométrique de raison $e^{\frac{\beta}{n}} \in [0,1[$) alors la série $\sum_{k\geq 0} f\left(\frac{k}{n}\right)$ converge absolument.

---

6. * On a $\lim n(e^{\frac{\beta}{n}} - 1) = \beta$ donc pour $\varepsilon = -\frac{\beta}{2}$ il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on a :

$$n(e^{\frac{\beta}{n}} - 1) - \beta \leq \frac{-\beta}{2}$$

donc $n(e^{\frac{\beta}{n}} - 1) \leq \frac{\beta}{2}$.

* Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$|f_n(x)| \leq e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| f(\frac{k}{n}) \right| \frac{(nx)^k}{k!} \leq Ae^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{\frac{\beta}{n}})^k \frac{(nx)^k}{k!} = Ae^{nx(e^{\frac{\beta}{n}}-1)}.$$

D'après la question précédente, pour tout $n \geq n_0$, $nx(e^{\frac{\beta}{n}} - 1) \leq \frac{1}{2}\beta x$. On en déduit que, pour tout $n \geq n_0$, $e^{nx(e^{\frac{\beta}{n}}-1)} \leq e^{\frac{\beta x}{2}}$ et par la suite

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R}^+ : |f_n(x)| \leq Ae^{\frac{\beta}{2}x}.$$

---

7. Vue la question 4-, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

   i) Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors, d'après la question 3-b), $f_n \xrightarrow{cs} f$ sur $\mathbb{R}^+$.
   ii) Les f_n et f sont cpm sur $\mathbb{R}^+$.
   iii) $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+ : |f_n(x)| \leq A\exp\left(\frac{\beta}{2}x\right) = \varphi(x)$.
   La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\beta < 0$.
   D'après le théorème de la convergence dominée, on peut déduire que les f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et que $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

   Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

---

8. D'après les questions 4- et 5- de la partie 2, $\gamma = J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} h(x)\,dx$, où $h(x) = 1 - \dfrac{1-e^{-x}}{x}$. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} h(x) & = e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right), \quad \text{si } x \neq 0. \\ \frac{1}{2} & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a f est continue sur $\mathbb{R}^+$, puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$. Posons $g(x) = e^x f(x)$; on a g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{+\infty} g = 1$, donc g est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Il vient que $|g(x)| \leq M$ et par la

suite $|f(x)| = e^{-x}|g(x)| \leq Me^{-x}$. En utilisant la question 7-,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{k}{n}}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{-k}{n}}} - \frac{n}{k}e^{-\frac{k}{n}}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\frac{k}{n}}-1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k}{k}}_{=-\ln\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n\left(e^{\frac{k}{n}}-1\right)} + \ln\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\right).
\end{aligned}$$