REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2022

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2022

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Date : Mercredi 01 Juin 2022	Heure : 8H	Durée : 4H	Nbre pages : 5

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Documents et calculatrices non autorisés.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Notations, Définitions et objectifs.

• Pour $z \in \mathbb{C}$, on désigne par $\overline{z}$, $Re(z)$ et $Im(z)$ le conjugé, la partie réelle et la partie imaginaire de z. Si $R \in]0,+\infty[$ on note $\mathcal{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

• Une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite $\mathcal{DSE}_R$ (resp $\mathcal{DSE}_\infty$) s'il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathcal{D}(0,R)$ (resp pour tout $z \in \mathbb{C}$).

Par exemple, la fonction $z \longmapsto \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est $\mathcal{DSE}_\infty$.

On rappelle que $|e^z| = e^{Re(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

• Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I et $k \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un moment d'ordre k, noté $\mathfrak{m}_k(f)$, si la fonction $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable sur I et on pose

$$\mathfrak{m}_k(f) = \int_I t^k f(t)dt.$$

• On rappelle qu'une variable aléatoire discrète réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$ si la variable aléatoire X^k est d'espérance finie et on note dans ce cas le moment d'ordre k de X le nombre

$$\mathfrak{m}_k(X) = \mathrm{E}\left(X^k\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^k P(X = x).$$

La problématique est d'étudier la validité des affirmations suivantes :

P_1 Si les fonctions $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifient $\mathfrak{m}_k(f) = \mathfrak{m}_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $f = g$.

P_2 Si les variables aléatoires discrètes réelles X, Y vérifient $\mathfrak{m}_k(X) = \mathfrak{m}_k(Y)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors X et Y suivent la même loi.

Préliminaires

Les questions 1, 2,3 et 4 suivantes sont indépendantes.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i\alpha x} dx$. (On distinguera le cas α nul).
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue admettant un moment d'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer que $\widehat{f} : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   Exprimer, pour tout entier k, $\widehat{f}^{(k)}(0)$ en fonction de $m_k(f)$.
3. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0\,; \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$
   (a) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynômiale P_k vérifiant $G^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x}) e^{\frac{-1}{x}}$ pour tout $x > 0$.
   (b) En déduire que la fonction G est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $G^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) La fonction G est elle $\mathcal{DSE}_R$ pour un certain $R > 0$?
4. Soit $R \in]0, +\infty[$ et $f : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction $\mathcal{DSE}_R$.
   (a) Soit $r \in]0, R[$ et $f_n : t \longmapsto a_n r^n e^{int}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $n, p \in \mathbb{N}$ deux entiers non nécessairement distincts. Que vaut l'intégrale $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt$?
   (c) En déduire que pour tout réel $r \in]0, R[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a la formule

$$a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt.$$

Caractérisation de la fonction exp

5. Soit $f : z \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction $\mathcal{DSE}_\infty$. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$ et on note $K = \sup\limits_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $|a_n| \leq \frac{K}{r^n}$ pour tout réel $r > 0$.
   (b) En déduire que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que f est une fonction constante.
6. Soit g une fonction $\mathcal{DSE}_\infty$ telle que $g(0) = 1$. On suppose qu'il existe un réel M vérifiant $|g(z)| \leq M e^{Re(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Justifier que la fonction $f : z \longmapsto e^{-z} g(z)$ est $\mathcal{DSE}_\infty$.
   (b) En déduire que $g(z) = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

$\mathbf{P}_1$ Cas des fonctions continues sur un segment

On considère l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme définie par $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

7. Soit f une fonction de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant $m_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, où $m_k(f) = \int_a^b t^k f(t)dt$.
   (a) Justifier que $\int_a^b f(t)Q(t)dt = 0$ pour toute fonction polynômiale Q.
   (b) Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f^2 sur $[a,b]$.
   (c) En déduire que $\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$, puis que f est nulle.
8. Montrer que $\mathbf{P}_1$ est vraie si $f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
9. Montrer que $\mathbf{P}_1$ est vraie si $f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.

$\mathbf{P}_1$ Cas des fonctions dans H

Soit H l'espace des fonctions $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifiant la propriété suivante :
Pour tout réel strictement positif α la fonction $t \longmapsto h(t)e^{\alpha t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
On munit H de la norme $\|.\|_1$ définie par $\|h\|_1 = \int_0^{+\infty} |h(t)|\,dt$ pour tout $h \in \mathbf{H}$.

10. Soit $f \in \mathbf{H}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-izt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
    Ainsi la fonction $\widehat{f} : z \longmapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt$ est bien définie sur $\mathbb{C}$.
11. On veut montrer que $\widehat{f}$ est $\mathcal{DSE}_\infty$. On fixe $z \in \mathbb{C}$.
    (a) Montrer qu'il existe un réel C vérifiant :
    $$2^n |f(t)| \frac{t^n |z|^n}{n!} \leq Ce^{-t},$$
    pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
    (On pourra observer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{(2|z|+1)t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$).
    (b) En déduire que $\int_0^{+\infty} \left| f(t)\frac{t^n z^n}{n!} \right| dt \leq \frac{C}{2^n}$
    (c) Montrer alors que $\widehat{f}$ est $\mathcal{DSE}_\infty$ et que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :
    $$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n m_n(f)}{n!} z^n, \text{ où } m_n(f) = \int_0^{+\infty} t^n f(t)dt.$$
12. On suppose maintenant que $f \in \mathbf{H}$ et que $m_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On se propose de démontrer que f est nulle. On fixe un réel $a > 0$ et on pose :
    $$F(z) = \int_0^a f(t)e^{-iz(t-a)}dt \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}.$$
    Il est clair que F est $\mathcal{DSE}_\infty$ (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

(a) Vérifier que si $Im(z) \geq 0$ alors on a l'inégalité suivante :

$$|F(z)| \leq \|f\|_1. \tag{1}$$

(b) Justifier que $\widehat{f}$ est nulle sur $\mathbb{C}$, puis établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = -\int_a^{+\infty} f(t)e^{-iz(t-a)}dt.$$

(c) Déduire que l'inégalité (1) reste vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(d) Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} F(in) = 0$, puis déduire que F est nulle sur $\mathbb{C}$.

(e) Montrer alors que $\int_0^a f(t)dt = 0$ puis conclure que f est nulle.

13. Montrer que $\mathbf{P}_1$ est vraie si $f, g \in \mathbf{H}$.

Un contre-exemple

14. Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = G(x-1)G(2-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où G est la fonction définie dans la question 3.

(a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, que φ est strictement positive sur $]1,2[$, et qu'elle est nulle en déhors de cet intervalle.

On pose $\psi(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_1^2 \varphi(t)e^{itx}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\psi(x) = \frac{i^n}{2\pi x^n}\int_1^2 \varphi^{(n)}(t)e^{itx}dt, \qquad x \neq 0.$$

En déduire que la fonction $x \longmapsto x^n\psi(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

15 Montrer alors que la fonction ψ admet un moment d'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On admet que $\widehat{\psi}(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

16. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_k(\psi) = 0$, où $m_k(\psi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^k\psi(t)dt$.
(On pourra utiliser la question 2).

17. Montrer que $\mathbf{P}_1$ n'est pas vraie en général.

$\mathbf{P}_2$ Cas de variables aléatoires bornées

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires considérées sont réelles, définies sur Ω telles que $X(\Omega)$ soit dénombrable. On fixe une telle variable aléatoire X et on note $X(\Omega) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. On définit la fonction Φ_X par la formule

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n}P(X = x_n), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

18. Montrer que Φ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

19. Montrer que si X admet une espérance finie alors Φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

20. Déterminer explicitement Φ_X si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

21. Soit $a \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$\int_{-T}^{T} \Phi_X(t) e^{-ita} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) \int_{-T}^{T} e^{it(x_n - a)} dt.$$

(b) En déduire que $P(X = a) = \lim_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Phi_X(t) e^{-ita} dt$.

(c) Montrer que si Y est une variable aléatoire discrète telle que $\Phi_X = \Phi_Y$ alors X et Y ont la même loi.

22. On suppose maintenant que X est bornée, c'est-à-dire il existe un réel M tels que $|x_n| \leq M$ pour tout $x_n \in X(\Omega)$.

(a) Montrer que X admet un moment d'ordre k pour tout k.

(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum P(X = x_n) e^{ix_n z}$ est convergente.

On prolonge la fonction Φ_X sur $\mathbb{C}$ en posant $\Phi_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) e^{ix_n z}$.

(c) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la famille $(P(X = x_n) \frac{x_n^k z^k}{k!})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
En déduire que

$$\Phi_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k m_k(X)}{k!} z^k \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

23. Montrer que $\mathbf{P}_2$ est vraie si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes bornées.

Un contre-exemple

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont la loi est donnée par

$$P(X = e^{8n}) = \frac{e^{-n^2}}{\alpha} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}, \text{ où } \alpha = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2}.$$

24. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(e^{-n^2+8kn})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et que
$e^{-16k^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2+8kn} = \alpha$.
En déduire que X admet un moment d'ordre k et calculer $m_k(X)$.

25. On définit la fonction θ sur $\mathbb{Z}$ par $\theta(2k) = 0$, $\theta(4k+1) = \frac{1}{2}$ et $\theta(4k-1) = -\frac{1}{2}$.

(a) Montrer que $\theta(n+4) = \theta(n)$ et $\theta(-n) = -\theta(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta(n) e^{-n^2+8nk} = 0$.

(c) Soit Y une variable aléatoire dont la loi est définie par

$$P(Y = e^{8n}) = \frac{e^{-n^2}}{\alpha}(1 - \theta(n)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z},$$

Montrer que $m_k(Y) = m_k(X)$, puis déduire que la propriété $\mathbf{P}_2$ n'est pas vraie dans le cas géneral.

⋆ **Fin du sujet** ⋆

Partie 1: Préliminaires

1. $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\alpha x}dx = 1$ si $\alpha = 0$. Si $\alpha \neq 0$, on a $\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\alpha x}dx\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\frac{\sin \alpha T}{T}\right| \leq \frac{1}{|\alpha| T}$. Donc $\lim\limits_{T\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\alpha x}dx = 0$.

2. Comme $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\widehat{f}$ est est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $g(t,x) = f(t)e^{-ixt}$.

   (a) $t \longrightarrow g(t,x)$ est cpm et intégrable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $x \longrightarrow g(t,x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(t,x) = (-i)^n t^n f(t)e^{-ixt}$$

   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(t,x)\right| \leq |t^n f(t)|$ qui est intégrable.

   Par suite la fonction $\widehat{f}$ est de classe C^∞ et $\widehat{f}^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}}(-i)^n t^n f(t)e^{-ixt}dt$. En particulier pour $x = 0$, $\widehat{f}^{(n)}(0) = (-i)^n m_n(f)$.

3. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$G(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}.$$

   (a) On procède par récurrence sur k. Pour $k = 0$ on a $P_0(X) = 1$. Supposons que le polynôme P_k existe. Pour $x > 0$ on a

   $$G^{(k+1)}(x) = (-\frac{1}{x^2}P_k'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}P_k(\frac{1}{x}))e^{-\frac{1}{x}} = P_{k+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

   où $P_{k+1} = X^2(-P_k' + P_k)$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$, On a G est de classe C^i sur $\mathbb{R}^*$ pour tout $0 \leq i \leq k$ et

   $$\lim_{x\longrightarrow 0^+} G^{(i)}(x) = \lim_{X\longrightarrow+\infty} P_i(X)e^{-X} = 0 = \lim_{x\longrightarrow 0^-} G^{(i)}(X)$$

   par croissance comparées. D'après le théorème du prolongement de classe C^k, on en déduit que G est C^k pour tout k, par suite G est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $G^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (c) Supposons que G est DSE_R alors G coincide avec sa série de Taylor $S_G(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!}x^k$ sur un intervalle ouvert de type $]-R, R[$, donc G est nulle sur cet intervalle, ce qui est absurde.

4.

(a) Soit $0 < r < R$.
On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f_n(t)| = |a_n|\, r^n$ le terme général d'une série convergente, puisque $r < R$. Ce qui montre la convergence normale donc uniforme de la série sur $\mathbb{R}$.

(b) Si $n = p$ alors $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. Si $n \neq p$ alors $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}dt = \frac{-i}{n-p}(e^{i(n-p)2\pi} - 1) = 0$.

(c) On a

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}dt = 2\pi a_p r^p.$$

La permutation des signes série et intégrale sont justifiés par la continuité de $f_n : t \longrightarrow a_n r^n e^{i(n-p)t}$ et la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur le segment $[0, 2\pi]$.

Caractérisation de la fonction exp.

5. (a) En utilisant la formule obtenu dans la question 4, c on a pour tout $r > 0$:
$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})e^{-ipt}|\, dt \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \|f\|_\infty\, dt = \dfrac{K}{r^n}$

(b) Pour $n \geq 1$, on a $|a_n| = \lim\limits_{r \longrightarrow +\infty} |a_n| \leq \lim\limits_{r \longrightarrow +\infty} \dfrac{K}{r^n} = 0$ ce qui montre que $a_n = 0$ pour tout entier $n \geq 1$. Donc $f(z) = a_0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

6. (a) Comme la fonction $z \longrightarrow e^{-z}$ est DSE de rayon de convergence $+\infty$ alors g est la somme du la série produit de Cauchy de deux séries définissant f et $z \longrightarrow e^{-z}$. Comme les deux séries ont un rayon de convergence infinie, alors la rayon de leur produit est ∞.

(b) Par hypothèse, on a $|g(z)| = |e^{-z}|\,|f(z)| \leq e^{-\mathrm{Re}(z)}\,|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. D'après la question 5.b, on en déduit que g est constante. Donc $f(z) = g(0)e^z = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

$\mathcal{P}_1$:Cas des fonctions continues sur un segment.

7. Soit f une fonction de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ vérifiant $m_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) On a $\int_I f(t)t^n dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale on obtient le résultat.

(b) Comme f est continue sur la compact $[a,b]$ alors d'après le Théorème de Weirstrass, il existe une suite des fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction f. Comme$\|P_n f - f^2\| = \|f(P_n - f)\| = \|f\|\,\|(P_n - f)\|$ on en déduit que $(P_n f)_n$ converge uniformément vers f^2.

(c) On a $0 = \int_I P_n(t)f(t)dt \longrightarrow \int_I f^2$ par convergence uniforme donc $\int_I f^2 = 0$. La continuité et la positivité de f^2 montre que $f = 0$.

8. Si $f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ telles que $m_n(f) = m_n(g)$ alors $m_n(f - g) = 0$ pour tout n et par suite $f = g$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie sur les fonctions de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.

9. Si f et $g \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{C})$, on écrit $f = f_1 + if_2$ et $g = g_1 + g_2$ où les f_i et les g_i sont dans $\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq 2$. Comme $m_n(f) = m_n(g)$ alors $m_n(f_1) = m_n(f_2)$ et donc $f_1 = f_2$ par 8. De même $g_1 = g_2$. Donc $f = g$.

$\mathcal{P}_1$: Cas des fonctions dans $\mathcal{H}$.

10. Soit $f \in \mathcal{H}$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On a $f(t)e^{-izt} = |f(t)|\, e^{yt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Il existe C tel que $|f(t)| \leq Ce^{-(|y|+1)t}$ donc

$$\left|f(t)e^{yt}\right| \leq |f(t)|\, e^{|y|t} \leq Ce^{-(|y|+1)t}e^{|y|t} = Ce^{-t} =_\infty o(\frac{1}{t^2})$$

Donc $t \longrightarrow f(t)e^{yt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par suite $t \longrightarrow f(t)e^{-izt}$ est intégrable.

11. On fixe f dans $\mathcal{H}$ et $z \in \mathbb{C}$.

(a) il existe un réel C vérifiant : $|f(t)| \leq Ce^{-2|z|t}e^{-t}$ donc

$$2^n\, |f(t)|\, \frac{t^n\, |z|^n}{n!} \leq Ce^{-2|z|t}\frac{2^n t^n\, |z|^n}{n!}e^{-t}$$

On conclut alors avec $\dfrac{2^n t^n\, |z|^n}{n!} \leq e^{2|z|t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\int_0^{+\infty} \left|f(t)\dfrac{t^n z^n}{n!}\right| dt \leq \dfrac{C}{2^n}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \dfrac{C}{2^n}$.

(c) On a $\widehat{f}(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-i)^n z^n t^n}{n!}dt$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $g_n(t) = \dfrac{(-i)^n z^n}{n!}f(t)t^n$ pout tout $t \in \mathbb{R}^+$.

- g_n est cpm sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable car $|f(t)|\, t^n = O(e^{-t}t^n)$.
- La série $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $t \longrightarrow f(t)e^{-izt}$ qui est CPM.
- La question b assure que la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.
  Le théorème d'intégration terme à terme montre que

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\dfrac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)t^n dt)z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer alors que $\widehat{f}$est $\mathcal{DSE}_\infty$ et que

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n m_n(f)z^n \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

12. (a) Si $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ alors

$$|F(z)| \leq \int_0^a \left|f(t)e^{-iz(t-a)}\right| dt = \int_0^a |f(t)|\, e^{\mathrm{Im}(z)(t-a)}dt \leq \int_0^a |f(t)| \leq \|f\|_1$$

(b) Comme $m_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors d'aprés 11 on a $\widehat{f}(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ puis $0 = \widehat{f}(z) = F(z) + \int_a^{+\infty} f(t)e^{-iz(t-a)}dt$ donc

$$F(z) = -\int_a^{+\infty} f(t)e^{-iz(t-a)}dt.$$

Si $\operatorname{Im} z \leq 0$ alors

$$|F(z)| \leq \int_a^{+\infty} \left|f(t)e^{-iz(t-a)}\right| dt = \int_a^{+\infty} |f(t)|\, e^{\operatorname{Im}(z)(t-a)}dt \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| \leq \|f\|_1$$

(c) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} F(in) = \lim \int_0^a f(t)e^{n(t-a)}dt = 0$ par application de Théorème de convergence dominée car $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(t)e^{n(t-a)} = 0$ pour tout $t \in]0, a[$ et $\left|f(t)e^{n(t-a)}\right| \leq |f(t)|$ qui est intégrable sur $]0, a[$.

(d) La fonction F est $\mathcal{DSE}_\infty$est elle est bornée sur $\mathbb{C}$, d'après la question 5.b, F est constante. Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} F_a(in) = 0$, donc $F_a(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(e) On a pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F(0) = \int_0^a f(t)dt = 0$. On en déduit par dérivation que f nulle

13. Si on a deux fonctions f, g de H qui ont la même moment alors $m_n(f - g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par suite $f = g$.

Un contre exemple.

14. Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = G(x-1)G(2-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) φ est le produit de deux fonctions C^∞ donc elle est de classe C^∞. De plus si $x \in]1, 2[$ alors $G(x-1) > 0$ et $G(2-x) > 0$ donc $\varphi(x) > 0$. Si $x \leq 1$ ou $x \geq 2$ alors $G(x - \frac{1}{2}) = 0$ ou $G(2-x) = 0$.

On pose $\psi(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{itx}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Montrer, par récurence, que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a :

Pour $k = 0$ le résultat est évident. Supposons que $\psi(x) = \frac{i^k}{x^k}\int_0^{+\infty} \varphi^{(k)}(t)e^{itx}dt$ Par une intégration par parties, on a

$$\int_0^\infty \varphi^{(k)}(t)e^{itx}dt = \left[\frac{1}{ix}e^{itx}\varphi^{(k)}(t)\right]_0^\infty - \frac{1}{ix}\int_0^\infty \varphi^{(k+1)}(t)e^{itx}dt = -\frac{1}{ix}\int_0^\infty \varphi^{(k+1)}(t)e^{itx}dt$$

Car $\varphi^{(k)}$ est nulle en déhors de $[1, 2]$.

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}$ est bornée sur $[1, 2]$, on pose $M_k = \sup_{t\in[1,2]} \left|\varphi^{(k)}(t)\right|$. Alors $|\psi(x)| \leq \frac{1}{x^k}\int_1^2 \left|\varphi^{(k)}(t)\right| dt \leq \frac{M_k}{x^k}$.

1/(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, Comme $\psi(x) = O(\frac{1}{x^{n+2}})$ alors $x^n\psi(x) = O(\frac{1}{x^2})$ par suite $x \longrightarrow x^n\psi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On admet qu'il existe un réel λ tel que $\widehat{\psi}(x) = \lambda\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

16. Comme ψ admet un moment a tous ordres, d'après la question 1,

$$m_n(\psi) = \frac{1}{(-i)^n}\widehat{\psi}^{(n)}(0) = \frac{\lambda}{(-i)^n}\varphi^{(n)}(0) = 0$$

car φ est nulle sur $]-\infty, 1[$.

17. ψ et la fonction nulle ont la même suite des moments et ψ est non nulle car φ non nulle. L'affirmation P_1 n'est pas vrai.

Partie 5 Cas discrètes.

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} P(X = x_n), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

18. Comme $|e^{itx_n} P(X = x_n)| = P(X = x_n)$ et la série $\sum P(X = x_n)$ converge on en déduit que la série de fonctions $\sum e^{itx_n} P(X = x_n)$ converge normalement donc uniformément. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ $t \longrightarrow e^{itx_n} P(X = x_n)$ est continue par suite Φ_X est continue et on a $|\Phi_X(t)| \leq 1$.

19. Supposons que X admet une espérance finie

    On pose $g_n(t)e^{itx_n} P(X = x_n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $g_n{}'(t) = ix_n e^{itx_n} P(X = x_n)$. Donc $|g_n'(t)| \leq |x_n| P(X = x_n)$ et la série $\sum |x_n| P(X = x_n)$ converge. Par suite $\sum g_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

    Conclusion Φ_X est de classe C^1.

20. Exemple.

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{-\lambda+\lambda e^{it}}$$

21 Soit X une variable aléatoire dont $X(\Omega) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $a \in \mathbb{R}$.

(a) Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)e^{it(x_n-a)}$ converge normalement donc uniformément sur $[-T, T]$ on peut écrie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi_X(t)e^{-ita}dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=0}^{+\infty}P(X = x_n)e^{it(x_n-a)}dt = \\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2T}P(X &= x_n)\int_{-T}^{T}e^{it(x_n-a)}dt\end{aligned}$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{T\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi_X(t)e^{-ita}dt = \lim_{T\longrightarrow+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2T}P(X = x_n)\int_{-T}^{T}e^{it(x_n-a)}dt$$

En appliquant le théorème de la double limite en effet $\lim_{T\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2T}P(X=x_n)\int_{-T}^{T}e^{it(x_n-a)}dt$ 0 si $a\neq x_n$ et $\lim_{T\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2T}P(X=x_n)\int_{-T}^{T}e^{it(x_n-a)}dt=P(X=x_n)$ si $a=x_n$.

D'autre part la série $\sum\frac{1}{2T}P(X=x_n)\int_{-T}^{T}e^{it(x_n-a)}$ converge uniformément par rapport à T sur $]0,+\infty[$

Si $a\notin X(\Omega)$ alors $\lim_{T\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi_X(t)e^{-ita}dt=0=P(X=a)$

Si $a=x_k\in X(\Omega)$ alors $\lim_{T\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi_X(t)e^{-ita}dt=P(X=x_k)=P(X=a)$

(c) Si $\Phi_X=\Phi_Y$ alors $P(X=a)=P(Y=a)$ pour tout $a\in\mathbb{R}$ donc X et Y suivent la même loi.

22. On considère dans cette question une variable aléatoire réelle X bornée, c'est-à-dire il existe un réel M tels que $|x_n|\leq M$ pour tout $x_n\in X(\Omega)$.

(a) Pour tout k, $|X|^k\leq M$ donc $E(|X|^k)$ existe.

(b) Soit $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\left|P(X=x_n)e^{ix_nz}\right| &= P(X=x_n)e^{-\operatorname{Im}(z)x_n}\\ &\leq P(X=x_n)e^{|\operatorname{Im}z||x_n|}\\ &\leq P(X=x_n)e^{|\operatorname{Im}z|M}\end{aligned}$$

dont la série converge.

On prolonge la fonction Φ_X sur $\mathbb{C}$ en posant $\Phi_X(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P(X=x_n)e^{ix_nz}$.

(c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ la série $\sum\limits_k P(X=x_n)\frac{|x_n^k|\,|z^k|}{k!}$ converge et $S_n=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P(X=x_n)\frac{|x_n^k|\,|z^k|}{k!}=P(X=x_n)e^{|x_n||z|}$ et la série $\sum P(X=x_n)e^{|x_n||z|}$ converge d'après la question précédente. On a

$$\begin{aligned}\Phi_X(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}P(X=x_n)e^{ix_nz}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=x_n)\frac{i^kx_n^kz^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=x_n)x_n^k)i^k\frac{z^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}i^km_k(X)\frac{z^k}{k!}\end{aligned}$$

23. Si $m_k(X)=m_k(Y)$ alors $\Phi_X=\Phi_Y$ donc X et Y suivent la même loi.

Contre exemple

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont la loi est donnée par

$$P(X=e^{8n})=\frac{e^{-n^2}}{\alpha}\text{ pour tout }n\in\mathbb{Z},$$

où $\alpha=(\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-n^2})$.

24. On pose $u_n = e^{-n^2+8kn}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n}$ convergent car $e^{-n^2+8kn} = o(\frac{1}{n^2})$ et $e^{-n^2-8kn} = o(\frac{1}{n^2})$ donc la famille est sommable. On a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2+8kn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(n+4k)^2} e^{16k^2} = e^{16k^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2}$$

car l'application $n \longrightarrow n+4k$ est une permutation de $\mathbb{Z}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre k si et seulement si $(\alpha e^{-n^2+8kn})_{(n,k)\in\mathbb{N}}$ est sommable. Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha e^{-n^2+8kn}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha e^{-n^2-8kn}$ convergent car $e^{-n^2+8kn} = o(\frac{1}{n^2})$ et $e^{-n^2-8kn} = o(\frac{1}{n^2})$ donc la famille est sommable. On a

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2+8kn} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(n-4k)^2} e^{16k^2} = \frac{1}{\alpha} e^{16k^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2} = e^{16k^2}.$$

car l'application $n \longrightarrow n+4k$ est une permutation de $\mathbb{Z}$.

$$m_k(X) = e^{16k^2}.$$

25. On définit la fonction θ sur $\mathbb{Z}$ par $\theta(2k) = 0$, $\theta(4k+1) = \frac{1}{2}$ et $\theta(4k-1) = -\frac{1}{2}$.

(a) Si n paire alors $n+4$ et $-n$ sont pairs par suite $\theta(n) = \theta(n+4) = -\theta(n) = 0$
Si n congru à 1 mod [4] alors $n+4$ congru à 1 mod [4] et donc $\theta(n+4) = \theta(n)$ et $-n$ congru à -1 mod [4] donc $\theta(-n) = -\theta(n)$. De même si n congru à -1 [4].

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta(n) e^{-n^2+8nk} &= e^{16k^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(n) e^{-(n+4k)^2} = e^{16k^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(n-4k) e^{-n^2} \\
&= e^{16k^2} \Big(\sum_{n\equiv 1[4]} \theta(n-4k) e^{-n^2} + \sum_{n\equiv -1[4]} \theta(n-4k) e^{-n^2} \Big) \\
&= e^{16k^2} \Big(\frac{1}{2} \Big(\sum_{n\equiv 1[4]} e^{-n^2} - \sum_{n\equiv -1[4]} e^{-n^2} \Big) = 0
\end{aligned}$$

Car $\sum_{n\equiv -1[4]} e^{-n^2} = \sum_{n\equiv 1[4]} e^{-(-n)^2} = \sum_{n\equiv 1[4]} e^{-n^2}$.

(c) Soit Y une variable aléatoire dont la loi est définie par

$$P(Y = e^{8n}) = \frac{e^{-n^2}}{\alpha}(1-\theta(n)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z},$$

La loi de la variable Y est bien définie puisque

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{e^{-n^2}}{\alpha}(1-\theta(n)) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{e^{-n^2}}{\alpha} = 0$$

On a $m_k(Y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-n^2+8kn}(1-\theta(n)) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-n^2+kn} = m_k(X)$.

26. L'affirmation $\mathcal{P}_2$ n'est pas vrai puisque $m_k(Y) = m_k(X)$ et X et Y n'ont pas la même loi.