REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2022

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2022

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Date : Mardi 07 Juin 2022	Heure : 8H	Durée : 3H	Nbre pages : 5

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Notations

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- La matrice identité et la matrice nulle sont notées respectivement I_n et $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
- Pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, on note par $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $d_{ii} = \alpha_i$.
- Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note respectivement ${}^tM$, $\mathrm{rg}(M)$ et $\mathrm{Sp}(M)$ la transposée de M, le rang de M et son spectre.
- Pour tout ensemble fini E, $\mathrm{card}(E)$ désigne le cardinal de E.
- Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$ l'exponentielle de la matrice M.
- On pourra utiliser librement le résultat suivant :

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,

a) $\exp(P^{-1}MP) = P^{-1}\exp(M)P$.

b) $\exp({}^tM) = {}^t(\exp(M))$.

c) $\exp(\alpha I_n) = \exp(\alpha) I_n$.

Partie préliminaire

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On pose

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), t \longmapsto \sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k \text{ et } \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), t \longmapsto \exp(\varphi(t)).$$

1. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{d} k a_k t^{k-1} N^k$.
2. Montrer, par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$, que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $\psi'(t) = \varphi'(t)\psi(t)$.
3. Montrer que ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie I : L'image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par la fonction exponentielle

Dans cette partie on se propose de montrer que l'image directe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par la fonction exponentielle est égale à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; c'est à dire $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $\exp(M)$ est inversible.
   On vient ainsi de montrer que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

   <u>Dans la suite de cette partie on veut montrer l'inclusion réciproque.</u>

2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente et $A = I_n + N$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k N^k.$$
   (a) Montrer φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(I_n + tN)\varphi'(t) = N$.
   (b) On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \exp(\varphi(t))$.
   i. Montrer que ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$(I_n + tN)\psi'(t) = N\psi(t) \text{ et } (I_n + tN)\psi''(t) = 0.$$
   ii. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi''(t) = 0$.
   iii. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = tN + I_n$.
   (c) Montrer alors qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(B) = A$.

3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $A = \lambda I_n + N$.
   En remarquant que $A = \lambda(I_n + \frac{1}{\lambda}N)$, montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(B) = A$.

4. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On rappelle qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} P,$$

où les matrices A_j, $j \in \{1,...,k\}$, sont de la forme $\lambda_j I_{n_j} + N_j$ avec $n_j \in \mathbb{N}^*$, $N_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})$ est une matrice nilpotente et $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$.
En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(B) = A$.

5. Montrer alors $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Partie II : Une caractérisation du rang d'une matrice carrée

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on pose $\sigma_R(M) = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \lambda R - M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$

.

1. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on a
   (a) $\sigma_R(M) = \mathrm{Sp}(R^{-1}M) \cap \mathbb{C}^*$.
   (b) $\mathrm{rg}(R^{-1}M) = \mathrm{rg}(M)$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $r = \mathrm{rg}\ (M)$.
   (a) Montrer que, pour tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\sigma_R(M)$ est un ensemble fini et $\mathrm{card}(\sigma_R(M)) \leq r$.
   (b) Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PDQ$ avec $D = \mathrm{diag}(1,2,...r,0,...0)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{card}(\sigma_{PQ}(M)) = r$.
3. Montrer alors que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{rg}(M) = \max\limits_{R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathrm{card}(\sigma_R(M))$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non inversible et $r = \mathrm{rg}(M)$.
   (a) Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PNQ$ où $N = (n_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec
   $$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \text{ et } i \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$
   (b) Montrer que $\sigma_{PQ}(M)$ est vide.
5. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \min\limits_{R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathrm{card}(\sigma_R(M)) = 0$.

Partie III : Conservation du rang VS conservation de l'inversibilité

Soit $U \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On dit que U conserve le rang si et seulement si, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{rg}(U(M)) = \mathrm{rg}(M)$.

On dit que U conserve l'inversibilité si et seulement si, pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $U(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Le but de cette partie est de montrer que

U conserve le rang si et seulement si U conserve l'inversibilité.

1. Montrer que si U conserve le rang alors U conserve l'inversibilité.
   Dans la suite de cette partie on suppose que U conserve l'inversibilité.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non inversible.
   (a) Soit $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $\lambda R - M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que $\lambda U(R) - U(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   (b) En déduire que $U(M)$ est non invesible.
3. Montrer alors que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow U(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
4. Soit $M \in \ker U$. En remarquant que, pour tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $U(\lambda R - M) = \lambda U(R)$, montrer que $\mathrm{rg}(M) = 0$ puis que $M = 0$.
5. Montrer que U est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
6. Montrer que U^{-1} conserve l'inversibilité.
7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r et $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{card}(\sigma_S(M)) = r$.
   (a) Montrer que $\mathrm{card}\left(\sigma_{U(S)}(U(M))\right) = r$.
   (b) En déduire que $\mathrm{rg}(M) \leq \mathrm{rg}(U(M))$.
8. Montrer que $\mathrm{rg}(U(M)) = \mathrm{rg}(M)$.
9. Conclure.

Partie IV : Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec l'exponentielle

Pour toutes matrices $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ on note $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi_{P,Q}(M) = PMQ \text{ et } \Psi_{P,Q}(M) = P\,{}^tMQ.$$

1. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

   On admettra dans la suite, que la réciproque du dernier résultat est vraie :

   Si un endomorphisme U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ conserve le rang alors il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que
   $U = \Phi_{P,Q}$ ou $U = \Psi_{P,Q}$.

2. Montrer que l'endomorphisme U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ conserve l'inversibilité si et seulement si, il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $U = \Phi_{P,Q}$ ou $U = \Psi_{P,Q}$.

   On dit que l'endomorphisme U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ <u>commute avec l'exponentielle</u> si et seulement si

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ U(\exp(M)) = \exp(U(M)).$$

3. Vérifier que, pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ commutent avec l'exponentielle.

4. Soit U un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commute avec l'exponentielle.

   (a) Montrer que U conserve l'inversibilité.

   (b) Montrer que $U(I_n) = I_n$.

   (c) En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $U = \Phi_{P,P^{-1}}$ ou $U = \Psi_{P,P^{-1}}$.

5. Déterminer alors tous les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec l'exponentielle.

⋆ Fin du sujet ⋆

Partie préliminaire (10 pts)

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On pose

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), t \longmapsto \sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k \text{ et } \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), t \longmapsto \exp(\varphi(t)).$$

1. **(3 pts)** Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{d} k a_k t^{k-1} N^k$.

   .....

   Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N^k = \left(n_{i,j}^{(k)}\right)_{1 \le i,j \le n}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \left(\varphi_{i,j}(t)\right)_{1 \le i,j \le n}$ où $\varphi_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k n_{i,j}^{(k)}$. Comme les $\varphi_{i,j}$ sont des fonctions polynômiales alors elles sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $\varphi'_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{d} k a_k t^{k-1} n_{i,j}^{(k)}$. Donc φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = \left(\varphi'_{i,j}(t)\right)_{1 \le i,j \le n} = \left(\sum_{k=1}^{d} k a_k t^{k-1} n_{i,j}^{(k)}\right)_{1 \le i,j \le n} = \sum_{k=1}^{d} k a_k t^{k-1} N^k.$$

   .....

2. **(5 pts)** Montrer, par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$, que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = \varphi'(t)\psi(t)$.

   .....

   *) Pour $d = 1$: $P = a_0 + a_1 X$ donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \exp(a_0 I_n + a_1 t N) \\ &= \exp(a_0 I_n)\exp(a_1 t N) \text{ (car les matrices } a_0 I_n \text{ et } a_1 t N \text{ commutent)} \\ &= e^{a_0}\exp(t a_1 N). \end{aligned}$$

   On en déduit que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(t) = e^{a_0} a_1 N \exp(t a_1 N) = a_1 N \psi(t) = \varphi'(t)\psi(t).$$

   Donc le résultat est vrai pour $d = 1$.

   **) Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et supposons que le résultat est vrai pour d. Soit $P = \sum_{k=0}^{d+1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \exp\left(\sum_{k=0}^{d+1} a_k t^k N^k\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k + a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k\right)\exp\left(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1}\right) \text{ (car } \sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k \text{ et } a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1} \text{ commutent).} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\psi_1 : t \longmapsto \exp\left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_1'(t) = \left(\sum_{k=1}^{d} k a_k t^{k-1} N^k\right) \exp\left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k\right).$$

D'autre part l'application $t \longmapsto t^{d+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u \longmapsto \exp\left(u a_{d+1} N^{d+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par compostion, l'application $\psi_2 : t \longmapsto \exp\left(t^{d+1} a_{d+1} N^{d+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est l'application $t \longmapsto (d+1)\, t^d a_{d+1} N^{d+1} \exp\left(t^{d+1} a_{d+1} N^{d+1}\right)$.
Comme, de plus, l'application $(M_1, M_2) \longmapsto M_1 M_2$ est bilinéaire alors l'application $t \longmapsto \psi_1(t)\,\psi_2(t) = \psi(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \psi_1'(t)\,\psi_2(t) + \psi_1(t)\,\psi_2'(t) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{d} k a_k t^{k-1} N^k\right) \exp\left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k\right) \exp\left(t^{d+1} a_{d+1} N^{d+1}\right) \\
&\quad + \exp\left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k\right) (d+1)\, t^d a_{d+1} N^{d+1} \exp\left(t^{d+1} a_{d+1} N^{d+1}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{d} k a_k t^{k-1} N^k + (d+1)\, t^d a_{d+1} N^{d+1}\right) \exp\left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k\right) \exp\left(t^{d+1} a_{d+1} N^{d+1}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{d+1} k a_k t^{k-1} N^k\right) \exp\left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k N^k + t^{d+1} a_{d+1} N^{d+1}\right) \text{(ces matrices commutent)} \\
&= \varphi'(t) \exp(\varphi(t)) \\
&= \varphi'(t)\,\psi(t).
\end{aligned}$$

donc le résultat est vrai pour l'ordre $d+1$.
D'après le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

.....

3. **(2 pts)** Montrer que ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

.....

D'après la question précédente, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\psi' = \varphi'\psi$. Comme φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) et ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'application $(M_1, M_2) \longmapsto M_1 M_2$ est bilinéaire alors $\psi' = \varphi'\psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En d'autres termes ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

.....

Partie I : L'image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par la fonction exponentielle (27 pts)

Dans cette partie on se propose de montrer que l'image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par la fonction exponentielle est égale à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$:

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

1. **(3 pts)** Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $\exp(M)$ est inversible ; en déduire que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

.....

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme M et $-M$ commutent alors $\exp(M)\exp(-M) = \exp(M + (-M)) = \exp\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right) = I_n$. Donc $\exp(M)$ est inversible (son inverse est $\exp(-M)$). On en déduit que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

.....

Dans la suite de cette partie on veut montrer l'inclusion réciproque.

2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente et $A = I_n + N$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k N^k.$$

(a) **(4 pts)** Montrer φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(I_n + tN)\varphi'(t) = N$.

.....

D'après la question **1)** de la partie préliminaire, la fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} N^k$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(I_n + tN)\varphi'(t) &= (I_n + tN)\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} N^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} (I_n + tN) N^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} t^{k-1} N^k - (-1)^k t^k N^{k+1} \right) \\
&= (-1)^{1-1} t^{1-1} N^1 - (-1)^n t^n N^{n+1} \text{ (téléscopage)} \\
&= N. \quad (N^{n+1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \text{ car } N \text{ est nilpotente.})
\end{aligned}$$

.....

(b) On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \exp(\varphi(t))$.

i. **(3 pts)** Montrer que ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(I_n + tN)\psi'(t) = N\psi(t) \text{ et } (I_n + tN)\psi''(t) = 0.$$

.....

D'après les questions **2)** et **3)** de la partie préliminaire, la fonction ψ est deux fois dérivable et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = \varphi'(t)\psi(t)$. En utilisant la question **1)** de la partie préliminaire, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(I_n + tN)\psi'(t) = (I_n + tN)\varphi'(t)\psi(t) = N\psi(t).$$

En dérivant cette dernière relation, il vient que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(I_n + tN)\psi''(t) + N\psi'(t) = N\psi'(t)$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(I_n + tN)\psi''(t) = 0$.

.....

ii. **(4 pts)** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi''(t) = 0$.

.....

Pour $t = 0$ on a $I_n + tN = I_n$ est inversible.
Pour $t \neq 0$ on a $\det(I_n + tN) = t^n \det\left(\frac{1}{t} I_n + N\right) = t^n P_N\left(-\frac{1}{t}\right)$ où P_N désigne le polynôme caractéristique de N. Comme N est nilpotente alors $P_N = X^n$ donc $\det(I_n + tN) = t^n \left(-\frac{1}{t}\right)^n = (-1)^n \neq 0$ par suite $I_n + tN$ est inversible.
On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(I_n + tN)\psi''(t) = 0$ avec $I_n + tN$ inversible, donc $\psi''(t) = 0$.

.....

iii. **(2pts)** En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = tN + I_n$.

.....

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi''(t) = 0$ donc il existe $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = tC_1 + C_2$. Comme $\psi(0) = \exp(\varphi(0)) = \exp\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right) = I_n$ alors $C_2 = I_n$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(I_n + tN)\psi'(t) = N\psi(t)$ donc, pour $t = 0$, il vient que $\psi'(0) = N\psi(0) = N$ donc $C_1 = N$. On en déduit alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = tN + I_n$.

.....

(c) **(2 pts)** Montrer alors qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(B) = A$.

.....

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = tN + I_n$. Donc $A = I_n + N = \psi(1) = \exp(\varphi(1)) = \exp(B)$ avec $B = \varphi(1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

.....

3. **(3 pts)** Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $A = \lambda I_n + N$. En remarquant que $A = \lambda(I_n + \frac{1}{\lambda}N)$, montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(B) = A$.

.....

On a $A = \lambda(I_n + \frac{1}{\lambda}N)$. Comme la matrice $\frac{1}{\lambda}N$ est nilpotente alors, d'après la question précédente, il existe $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $I_n + \frac{1}{\lambda}N = \exp(B_1)$. D'autre part $\lambda \in \mathbb{C}^*$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = |\lambda|\exp(i\theta) = \exp(\ln|\lambda| + i\theta)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} A &= \exp(\ln|\lambda| + i\theta)\exp(B_1) \\ &= \exp((\ln|\lambda| + i\theta)I_n)\exp(B_1) \\ &= \exp((\ln|\lambda| + i\theta)I_n + B_1) \text{ , car les matrices } (\ln|\lambda| + i\theta)I_n \text{ et } B_1 \text{ commutent.} \\ &= \exp(B) \text{ avec } B = (\ln|\lambda| + i\theta)I_n + B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

.....

4. **(4 pts)** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On rappelle qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}P.$$

où $k \in \mathbb{N}^*$, les matrices A_j, $j \in \{1,\dots,k\}$, sont de la forme $\lambda_j I_{n_j} + N_j$ avec $n_j \in \mathbb{N}^*$, $N_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})$ est une matrice nilpotente et $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$.
En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(B) = A$.

.....

Soit $j \in \langle 1,k \rangle$; comme $A_j = \lambda_j I_{n_j} + N_j$ avec $N_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})$ est nilpotente et $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ alors, d'après la

question précédente, il existe $B_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})$ telle que $A_j = \exp(B_j)$. Donc

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \exp(B_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(B_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(B_k) \end{pmatrix} P$$

$$= P^{-1}\exp\left(\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_k \end{pmatrix}\right) P = \exp\left(P^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_k \end{pmatrix} P\right).$$

On déduit alors que $A = \exp(B)$ où $B = P^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_k \end{pmatrix} P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

.....

5. **(2pts)** Montrer alors $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

.....

*) D'après la question **1)** de cette partie $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
) D'après la question **4) de cette partie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.
Donc $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Partie II : Une caractérisation du rang d'une matrice carrée (20 pts)

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\sigma_R(M) = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \lambda R - M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}.$$

1. **(2 pts)** Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on a
   (a) $\sigma_R(M) = \mathrm{Sp}(R^{-1}M) \cap \mathbb{C}^*$.
   (b) $\mathrm{rg}(R^{-1}M) = \mathrm{rg}(M)$.

.....

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(a) On a

$$\begin{aligned}\sigma_R(M) &= \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \lambda R - M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\} \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{C}^* : R\left(\lambda I_n - R^{-1}M\right) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\} \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{C}^* : \lambda I_n - R^{-1}M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\} \\ &= \mathrm{Sp}\left(R^{-1}M\right) \cap \mathbb{C}^*.\end{aligned}$$

(b) Comme R^{-1} est inversible alors $\mathrm{rg}\left(R^{-1}M\right) = \mathrm{rg}(M)$.

.....

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $r = \mathrm{rg}(M)$.

(a) **(3 pts)** Montrer que, pour tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\sigma_R(M)$ est un ensemble fini et $\mathrm{card}(\sigma_R(M)) \leq r$.

.....

Soit $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Si $\sigma_R(M) = \emptyset$ alors $\mathrm{card}(\sigma_R(M)) = 0 \leq r$.
Si $\sigma_R(M) \neq \emptyset$ alors $\sigma_R(M) = \mathrm{Sp}\left(R^{-1}M\right) \cap \mathbb{C}^* = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$ où $\lambda_1, ..., \lambda_s$ sont les valeurs propres non nulles de $R^{-1}M$. Soient $m_1, ..., m_s$ leurs multilicités respectives. On note aussi m_0 la multiplicité de 0 comme valeur propre de $R^{-1}M$, ($m_0 = 0$ si 0 n'est pas une valeur propre de $R^{-1}M$). Alors

$$\mathrm{card}(\sigma_R(M)) = s \leq m_1 + ... + m_s = n - m_0 \leq n - \dim\left(\ker\left(R^{-1}M\right)\right) = \mathrm{rg}\left(R^{-1}M\right) = \mathrm{rg}(M).$$

.....

(b) **(2 pts)** Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PDQ$ avec $D = \mathrm{diag}(1, 2, ...r, 0, ...0)$.

.....

Comme $\mathrm{rg}(D) = r = \mathrm{rg}(M)$ alors il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PDQ$.

.....

(c) **(2 pts)** Montrer que $\mathrm{card}(\sigma_{PQ}(M)) = r$.

.....

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned}\lambda PQ - M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff P(\lambda I_n - D)Q \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ &\iff \lambda I_n - D \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ &\iff \mathrm{diag}(\lambda - 1, \lambda - 2, ..., \lambda - r, \lambda, ...\lambda) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ &\iff \lambda \in \{1, 2, ..., r\}.\end{aligned}$$

Donc $\sigma_{PQ}(M) = \{1, 2, ..., r\}$ et, par conséquent, $\mathrm{card}(\sigma_{PQ}(M)) = r$.

.....

3. **(3 pts)** Montrer alors que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\mathrm{rg}(M) = \max_{R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathrm{card}(\sigma_R(M)).$$

.....

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

*) D'après la question **1)** de cette partie, $\operatorname{card}(\sigma_R(M)) \leq \operatorname{rg}(M)$, pour tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

) D'après la question **2) de cette partie, il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{card}(\sigma_R(M)) = \operatorname{rg}(M)$.

*) et **) donnent le résultat voulu : $\operatorname{rg}(M) = \max\limits_{R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \operatorname{card}(\sigma_R(M))$.

.....

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non inversible et $r = \operatorname{rg}(M)$.

   (a) **(2 pts)** Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PNQ$ où $N = (n_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \text{ et } i \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

.....

On a $N = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}

.....

5. **(4 pts)** Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \min_{R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathrm{card}(\sigma_R(M)) = 0.$$

.....

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
$\Longrightarrow$) Supposons que $M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'après **b)** de cette question, il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{card}(\sigma_R(M)) = 0$. Comme de plus, pour tout $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{card}(\sigma_R(M)) \geq 0$ alors $\min_{R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathrm{card}(\sigma_R(M)) = 0$.
$\Longleftarrow$) Supposons que $\min_{R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathrm{card}(\sigma_R(M)) = 0$. Donc il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{card}(\sigma_R(M)) = 0$. Donc $\mathrm{Sp}(R^{-1}M) \cap \mathbb{C}^* = \sigma_R(M) = \emptyset$. En d'autres termes $\mathrm{Sp}(R^{-1}M) \subset \{0\}$. Comme $\mathrm{Sp}(R^{-1}M) \neq \emptyset$ (car $\mathbb{C}$ est algébrique clos) alors $\mathrm{Sp}(R^{-1}M) = \{0\}$. En particulier la matrice $R^{-1}M$ n'est pas inversible, et donc M n'est pas inversible (car R^{-1} est inversible). Donc $M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

.....

Partie III : Conservation du rang VS conservation de l'inversibilité (27 pts)

Soit $U \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On dit que U conserve le rang si et seulement si, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{rg}(U(M)) = \mathrm{rg}(M)$.
On dit que U conserve l'inversibilité si et seulement si, pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $U(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
On veut montrer le résultat suivant :

U conserve le rang si seulement si U conserve l'inversibilité.

1. **(3pts)** Montrer que si U conserve le rang alors U conserve l'inversibilité.

.....

Supposons que U conserve le rang. Pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(U(M)) &= \mathrm{rg}(M) \text{ (car } U \text{ conserve le rang)} \\ &= n \text{ (car } M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $U(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Cela signifie que U conserve l'inversibilité.

.....

Dans la suite de cette partie on suppose que U conserve l'inversibilité.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non inversible.

   (a) **(2 pts)** Soit $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $\lambda R - M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\lambda U(R) - U(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

   .....

   Comme U conserve l'inversibilité et $\lambda R - M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ alors $U(\lambda R - M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Or, par linéarité de U, $U(\lambda R - M) = \lambda U(R) - U(M)$, donc $\lambda U(R) - U(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

   .....

   (b) **(3 pts)** En déduire que $U(M)$ est non inversible.

   .....

   Comme $M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ alors il existe $R_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda R_1 - M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'après **a)** de cette question, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda U(R_1) - U(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Etant donné que $U(R_1) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on peut écrire $\sigma_{U(R_1)}(U(M)) = \emptyset$ et, par conséquent,

$\min\limits_{R\in GL_n(\mathbb{C})} \operatorname{card}(\sigma_R(U(M))) = 0$. D'après la question **4)** de la partie **II)** on peut conclure que $U(M)$ est non inversible.

.....

3. **(2pts)** Montrer alors que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow U(M) \in GL_n(\mathbb{C})$.

.....

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\Longrightarrow$) Puisque U conserve l'inversibilité alors on a l'implication : $M \in GL_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow U(M) \in GL_n(\mathbb{C})$.

$\Longleftarrow$) D'après la question précédente, on a l'implication : $M \notin GL_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow U(M) \notin GL_n(\mathbb{C})$. Par contraposition, on obtient l'implication $U(M) \in GL_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow M \in GL_n(\mathbb{C})$.

Donc on a l'équivalence voulue.

.....

4. **(3pts)** Soit $M \in \ker U$. En remarquant que, pour tout $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $U(\lambda R - M) = \lambda U(R)$, montrer que $\operatorname{rg}(M) = 0$ puis que $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

.....

Pour tout $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $U(\lambda R - M) = \lambda U(R) \in GL_n(\mathbb{C})$. Donc, pour tout $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda R - M \in GL_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, pour tout $R \in GL_n(\mathbb{C})$, $\sigma_R(M) = \emptyset$. On en déduit que

$$\operatorname{rg}(M) = \max_{R\in GL_n(\mathbb{C})} \{\operatorname{card}(\sigma_R(M))\} = \max_{R\in GL_n(\mathbb{C})} \{0\} = 0.$$

Comme toute matrice de rang 0 est nulle alors $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

.....

5. **(2 pts)** Montrer que U est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

.....

D'après la question précédente, $\ker U = \left\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right\}$ et donc U est un endomorphisme injectif. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie alors U est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

.....

6. **(2pts)** Montrer que U^{-1} conserve l'inversibilité.

.....

Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $U\left(U^{-1}(M)\right) = M \in GL_n(\mathbb{C})$. D'après la question **3)** de cette partie $U^{-1}(M) \in GL_n(\mathbb{C})$. Donc U^{-1} conserve l'inversibilité.

.....

7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r et $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{card}(\sigma_S(M)) = r$.

   (a) **(2 pts)** Montrer que $\operatorname{card}\left(\sigma_{U(S)}(U(M))\right) = r$.

   .....

   On a

$$\begin{aligned}
\sigma_{U(S)}(U(M)) &= \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \lambda U(S) - U(M) \notin GL_n(\mathbb{C})\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \lambda S - M \notin GL_n(\mathbb{C})\} \\
&= \sigma_S(M).
\end{aligned}$$

   Donc $\operatorname{card}\left(\sigma_{U(S)}(U(M))\right) = \operatorname{card}(\sigma_S(M)) = r$.

   .....

(b) **(3 pts)** En déduire que $\mathrm{rg}(M) \leq \mathrm{rg}(U(M))$.

.....

D'après la question précédente, il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (on prend par exemple $R = U(S)$) telle que $\mathrm{card}(\sigma_R(U(M))) = r$. Donc

$$\mathrm{rg}(U(M)) = \max_{R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \{\mathrm{card}(\sigma_R(U(M)))\} \geq r = \mathrm{rg}(M).$$

.....

8. **(3 pts)** Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{rg}(U(M)) = \mathrm{rg}(M)$.

.....

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On vient de prouver que $\mathrm{rg}(U(M)) \geq \mathrm{rg}(M)$ (1).
Comme, d'après la question **6)** de cette partie, U^{-1} conserve l'inversibilité alors $\mathrm{rg}(U^{-1}(N)) \geq \mathrm{rg}(N)$, pour tout $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En particulier si $N = U(M)$ on obtient $\mathrm{rg}(M) \geq \mathrm{rg}(U(M))$ (2).
(1) et (2) donnent bien l'égalité demandée.

.....

9. **(2 pts)** Conclure.

.....

Dans la question **1)** on a montré que si U conserve le rang alors U conserve l'inversibilité.
De la question **2)** à la question **8)** on a montré que si U conserve l'inversibilité alors U conserve le rang.
En conclusion, on vient de montrer que U conserve le rang si et seulement si U conserve l'inversibilité.

.....

Partie IV : Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec l'exponentielle (16 pts)

Pour toutes matrices $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ on note $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi_{P,Q}(M) = PMQ \text{ et } \Psi_{P,Q}(M) = P\,{}^tMQ.$$

1. **(2pts)** Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

.....

*) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{rg}(\Phi_{P,Q}(M)) = \mathrm{rg}(PMQ)) = \mathrm{rg}(M)$ car P et Q sont inversibles. Donc $\Phi_{P,Q}$ conserve le rang.
**) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\mathrm{rg}(\Psi_{P,Q}(M)) = \mathrm{rg}(P\,{}^tMQ)) = \mathrm{rg}({}^tM) = \mathrm{rg}(M),$$

donc $\Psi_{P,Q}$ conserve le rang.

.....

On admettra, dans la suite, que la réciproque du dernier résultat est vrai, c'est à dire :
Si un endomorphisme U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ conserve le rang alors il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $U = \Phi_{P,Q}$ ou $U = \Psi_{P,Q}$.

2. **(2pts)** Montrer que l'endomorphisme U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ conserve l'inversibilité si et seulement si il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $U = \Phi_{P,Q}$ ou $U = \Psi_{P,Q}$.

.....

D'après la partie **III)** U conserve l'inversibilité si et seulement si U conserve le rang.

D'après la question précédente et le résultat admis, U conserve le rang si et seulement si il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $U = \Phi_{P,Q}$ ou $U = \Psi_{P,Q}$.
Donc U conserve l'inversibilité si et seulement il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $U = \Phi_{P,Q}$ ou $U = \Psi_{P,Q}$.

.....

On dit que l'endomorphisme U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commute avec l'exponentielle si et seulement si

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ U(\exp(M)) = \exp(U(M)).$$

3. **(2 pts)** Vérifier que, pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ commutent avec l'exponentielle.

.....

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\Phi_{P,P^{-1}}(\exp(M)) = P\exp(M)P^{-1} = \exp\left(PMP^{-1}\right) = \exp\left(\Phi_{P,P^{-1}}(M)\right).$$

et

$$\Psi_{P,P^{-1}}(\exp(M)) = P\,{}^t(\exp(M))\,P^{-1} = P\left(\exp\left({}^tM\right)\right)P^{-1} = \exp\left(P\,{}^tMP^{-1}\right) = \exp\left(\Psi_{P,P^{-1}}(M)\right).$$

Donc $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ commutent avec l'exponentielle.

.....

4. Soit U un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commute avec l'exponentielle.
   (a) **(3 pts)** Montrer que U conserve l'inversibilité.

   .....

   Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'après la partie **I)** il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = \exp(N)$. Donc $U(M) = U(\exp(N)) = \exp(U(N)) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par suite U conserve l'inversibilité.

   .....

   (b) **(2pts)** Montrer que $U(I_n) = I_n$.

   .....

   On a

   $$U(I_n) = U\left(\exp\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right)\right) = \exp\left(U\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right)\right) = \exp\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right) = I_n.$$

   .....

   (c) **(3pts)** En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $U = \Phi_{P,P^{-1}}$ ou $U = \Psi_{P,P^{-1}}$.

   .....

   D'après **a)** de cette question U conserve l'inversibilité donc, en utilisant la question **2)** de cette partie, il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $U = \Phi_{P,Q}$ ou $U = \Psi_{P,Q}$.
   D'après **b)** de cette question $U(I_n) = I_n$ donc
   Si $U = \Phi_{P,Q}$ alors $\Phi_{P,Q}(I_n) = PI_nQ = PQ = I_n$ donc $Q = P^{-1}$ par suite $U = \Phi_{P,P^{-1}}$
   Si $U = \Psi_{P,Q}$ alors $\Psi_{P,Q}(I_n) = P\,{}^tI_nQ = PI_nQ = PQ = I_n$ donc $Q = P^{-1}$ par suite $U = \Psi_{P,P^{-1}}$.
   Donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $U = \Phi_{P,P^{-1}}$ ou $U = \Psi_{P,P^{-1}}$.

   .....

5. **(2pts)** Déterminer alors tous les endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec l'exponentielle.

.....

On déduit des questions précédentes que les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec l'exponentielles sont les endomorphismes $\Phi_{P,P^{-1}}$ ou $\Psi_{P,P^{-1}}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

.....