REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2023

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2023

Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax * Bibliothèque * Université de Sfax

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Session 2023	Date : 06/06/2023	Durée : 3 heures

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pas été démontré.

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Notations

- $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille 3 à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $GL_3(\mathbb{K})$ est le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique, $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre et $\mathrm{rg}(M)$ son rang.
- Pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$, la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ sera notée $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
- Une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est dite une matrice scalaire si $M = \alpha I_3$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $I_3 = \mathrm{diag}(1,1,1)$ la matrice identité.

Partie I

I-A Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et f, g deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

Q.1 ▷ Montrer que les sous-espaces propres de g sont stables par f.

Q.2 ▷ Montrer que l'endomorphisme induit par f sur chaque sous-espace propre de g est diagonalisable.

Q.3 ▷ En déduire l'existence d'une base de E formée par des vecteurs propres communs à f et g.

I-B Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$. On considère le déterminant

$$D(P) = \begin{vmatrix} c & 0 & b & 0 & 0 \\ b & c & 2a & b & 0 \\ a & b & 3 & 2a & b \\ 1 & a & 0 & 3 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Q.4 ▷ On note $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$. Montrer que $D(P)$ est le déterminant dans la base $\mathcal{B}_c$ de la famille (P, XP, P', XP', X^2P'), c'est-à-dire

$$D(P) = \det_{\mathcal{B}_c}\left(P, XP, P', XP', X^2P'\right).$$

▼ On suppose ici que $D(P) = 0$.

Q.5 ▷ Justifier que la famille (P, XP, P', XP', X^2P') est liée.

Q.6 ▷ En déduire qu'il existe $U,\ V \in \mathbb{C}[X]$ non nuls tels que $\deg U \leq 1$, $\deg V \leq 2$ et $UP + VP' = 0$.

Q.7 ▷ Montrer que P admet une racine multiple.

Q.8 ▷ Montrer que

$$D(P) = 4a^3c - 18abc + 4b^3 - a^2b^2 + 27c^2.$$

I-C On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q.9 ▷ A-t-on $AB = BA$?

Q.10 ▷ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de $zA + B$ est

$$\chi_{zA+B} = X(X - (2+z))(X - (3+2z)).$$

Q.11 ▷ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-1, -\frac{3}{2}, -2\right\}$. Montrer que $zA + B$ est diagonalisable.

Q.12 ▷ Montrer que $-A + B$ n'est pas diagonalisable.

I-D Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ deux matrices diagonalisables.

Q.13 ▷ Montrer que

$$AB = BA \iff \exists P \in GL_3(\mathbb{C}) \text{ telle que } P^{-1}AP \text{ et } P^{-1}BP \text{ soient diagonales.}$$

Q.14 ▷ Montrer que si $AB = BA$ alors $A + B$ est diagonalisable. Que peut-on dire de la réciproque ?

Q.15 ▷ Montrer que si $AB = BA$ alors, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, la matrice $xA + yB$ est diagonalisable.

Partie II

Dans toute cette partie on considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, la matrice $xA + yB$ soit diagonalisable et on se propose de montrer que $AB = BA$.

II-A On suppose qu'il existe $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ non tous deux nuls tels que $x_0A + y_0B$ admet une valeur propre triple.

Q.16 ▷ Montrer que $x_0A + y_0B$ est une matrice scalaire.

Q.17 ▷ En déduire que $AB = BA$.

II-B On suppose que $A = \operatorname{diag}(0, 0, 1)$ et que $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$.

Q.18 ▷ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par

$$\chi_{zA+B} = \chi_B - zX^2 + z(b_{11} + b_{22})X - z(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}),$$

où χ_B est le polynôme caractéristique de B.

II-C On suppose que $A = \operatorname{diag}(0, 0, 1)$ et que $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ vérifie $\operatorname{rg}(B) = 1$ et $B^2 = B$.

Q.19 ▷ Montrer que $\chi_B = X^3 - X^2$ et que $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$.

Q.20 ▷ En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par

$$\chi_{zA+B} = X\left(X^2 - (z+1)X + (b_{11} + b_{22})z\right).$$

Q.21 ▷ Montrer que si $b_{11} + b_{22} = 0$ alors $AB = BA$.
Indication : On pourra remarquer que $\chi_{-A+B} = X^3$.

▼ On suppose que $b_{11} + b_{22} \neq 0$.

Q.22 ▷ Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $z_0A + B$ admette une valeur propre double $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$.

Q.23 ▷ Montrer que $\operatorname{rg}(z_0A + B - \lambda_0 I_3) = 1$.

Q.24 ▷ En déduire que $b_{13} = b_{23} = b_{31} = b_{32} = 0$ puis que $AB = BA$.

II-D On suppose maintenant que A et B admettent chacune une valeur propre double et une valeur propre simple.

On pose $\mathrm{Sp}(A) = \{\alpha, \beta\}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{\lambda, \mu\}$, où α est la valeur propre double de A et β sa valeur propre simple ; λ est la valeur propre double de B et μ sa valeur propre simple.

Q.25 ▷ Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \beta)$. On pose

$$A_1 = \frac{1}{\beta - \alpha} P^{-1}(A - \alpha I_3) P \quad \text{et} \quad B_1 = \frac{1}{\mu - \lambda} P^{-1}(B - \lambda I_3) P.$$

Q.26 ▷ Montrer que $A_1 = \mathrm{diag}(0, 0, 1)$.

Q.27 ▷ Montrer que $(B_1)^2 = B_1$ et $\mathrm{rg}(B_1) = 1$.

Q.28 ▷ Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $xA_1 + yB_1$ est diagonalisable. En déduire que $A_1B_1 = B_1A_1$.

Q.29 ▷ Montrer que $AB = BA$.

II-E On suppose ici que $A = \mathrm{diag}(0, 0, 1)$ et que $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ vérifie $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$. On pose $\chi_B = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, le polynôme caractéristique de B.

Q.30 ▷ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par

$$\chi_{zA+B} = X^3 + (a_2 - z)X^2 + (a_1 + z(b_{11} + b_{22}))X + a_0.$$

▼ On suppose que $b_{11} + b_{22} = 0$.

Q.31 ▷ Montrer que si $a_1 = a_0 = 0$ alors $AB = BA$.

Indication : On pourra considérer la matrice $a_2A + B$.

▼ On suppose que $a_1 \neq 0$ ou $a_0 \neq 0$.

Q.32 ▷ Montrer que $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré strictement positif.

Indication : Utiliser le résultat de la question **Q.8**.

Q.33 ▷ En déduire qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0A + B$ admet une valeur propre multiple λ_0.

Q.34 ▷ Montrer que $z_0A + B$ commute avec A puis que $AB = BA$. On discutera suivant la multiplicité de la valeur propre λ_0.

▼ On suppose que $b_{11} + b_{22} \neq 0$.

Q.35 ▷ Montrer que $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré 4.

Q.36 ▷ En déduire qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0A + B$ admet une valeur propre multiple.

Q.37 ▷ Montrer que $z_0A + B$ commute avec A puis que $AB = BA$.

II-F On suppose que A admet une valeur propre double α et une valeur propre simple β.

Q.38 ▷ Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $\frac{1}{\beta-\alpha} P^{-1}(A - \alpha I_3) P = \operatorname{diag}(0,0,1)$.

Q.39 ▷ On pose $P^{-1}BP = \left(b'_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq 3}$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que

$$(b'_{11} - t)(b'_{22} - t) - b'_{12}b'_{21} = 0.$$

Q.40 ▷ Montrer que $\operatorname{diag}(0,0,1)$ et $P^{-1}BP - tI_3$ commutent. En déduire que $AB = BA$.

II-G On suppose ici que $A = \operatorname{diag}(0,1,u)$, avec $u \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$.

On admet qu'il existe $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par la formule

$$\chi_{zA+B} = X^3 - \varphi_2(z) X^2 + \varphi_1(z) X + \varphi_0(z),$$

où $\varphi_2(z) = (u+1)z + b_1$, $\varphi_1(z) = uz^2 + b_2 z + b_3$ et $\varphi_0(z) = b_4 z^2 + b_5 z + b_6$.

Q.41 ▷ Montrer que $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale de degré 6 en z.

Q.42 ▷ Montrer alors qu'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $z_1 A + B$ admet une valeur propre multiple.

Q.43 ▷ Montrer que $z_1 A + B$ commute avec A. En déduire que $AB = BA$.

II-H

Q.44 ▷ En distinguant les trois cas suivants :

- A ou B admet une valeur propre triple ;
- A et B admettent chacune une valeur propre double et une valeur propre simple ;
- A ou B admet 3 valeurs propres simples,

montrer que $AB = BA$.

Partie III

Q.45 ▷ Soient $A, B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $xA + yB$ est diagonalisable.

Q.46 ▷ Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, la matrice $xA + yB$ soit diagonalisable. A-t-on $AB = BA$? Justifier votre réponse.

⋆ **Fin de l'épreuve** ⋆

REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2023

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2023

Concours Mathématiques et Physique
Corrigé de l'Epreuve de Mathématiques II

Session 2023	Date : 06/06/2023	Durée : 3 heures

Notations

- $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille 3 à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $GL_3(\mathbb{K})$ est le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
- $S_3(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique, $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre et $\mathrm{rg}(M)$ son rang.
- Pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$, la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ sera notée $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
- Une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est dite une matrice scalaire si $M = \alpha I_3$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $I_3 = \mathrm{diag}(1,1,1)$ la matrice identité.

Partie I

I-A Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et f, g deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

Q.1 ▷ Montrer que les sous-espaces propres de g sont stables par f.

Comme f et g commutent alors les sous-espaces propres de g sont stables par f.

Q.2 ▷ Montrer que l'endomorphisme induit par f sur chaque sous-espace propre de g est diagonalisable.

Soit F un sous espace propre de g. Comme f est diagonalisable et F est stable par f alors f induit sur F un endomorphisme diagonalisable.

Q.3 ▷ En déduire l'existence d'une base de E formée par des vecteurs propres communs à f et g.

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$, l'endomorphisme f_λ induit par f sur $E_\lambda(g)$ est diagonalisable. Donc, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$, $E_\lambda(g)$ admet une base B_λ formée par des vecteurs propres de f_λ et donc de f. Par suite B_λ est une base de $E_\lambda(g)$ formée par des vecteurs propres communs à f et g. D'autre part, g est diagonalisable donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(g)} E_\lambda(g)$, et par conséquent $B = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(g)} B_\lambda$ est une base de E formée par des vecteurs propres communs à f et g.

I-B Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$. On considère le déterminant

$$D(P) = \begin{vmatrix} c & 0 & b & 0 & 0 \\ b & c & 2a & b & 0 \\ a & b & 3 & 2a & b \\ 1 & a & 0 & 3 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Q.4 ▷ On note $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$. Montrer que $D(P)$ est le déterminant dans la base $\mathcal{B}_c$ de la famille (P, XP, P', XP', X^2P'), c'est-à-dire

$$D(P) = \det_{\mathcal{B}_c}\left(P, XP, P', XP', X^2P'\right).$$

On a $\begin{cases} P = c + bX + aX^2 + X^3 + 0X^4, \\ XP = 0 + cX + bX^2 + aX^2 + X^4, \\ P' = b + 2aX + 3X^2 + 0X^3 + 0X^4, \\ XP' = 0 + bX + 2aX^2 + 3X^3 + 0X^4, \\ X^2P' = 0 + 0X + bX^2 + 2aX^3 + 3X^4. \end{cases}$

Donc la matrice de la famille (P, XP, P', XP', X^2P') dans la base conanonique est donnée par

$$M_{\mathcal{B}_c}\left(P, XP, P', XP', X^2P'\right) = \begin{pmatrix} c & 0 & b & 0 & 0 \\ b & c & 2a & b & 0 \\ a & b & 3 & 2a & b \\ 1 & a & 0 & 3 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par suite

$$\det_{\mathcal{B}_c}\left(P, XP, P', XP', X^2P'\right) = \begin{vmatrix} c & 0 & b & 0 & 0 \\ b & c & 2a & b & 0 \\ a & b & 3 & 2a & b \\ 1 & a & 0 & 3 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = D(P).$$

▼ On suppose ici que $D(P) = 0$.

Q.5 ▷ Justifier que la famille (P, XP, P', XP', X^2P') est liée.

Comme $\det_{\mathcal{B}_c}\left(P, XP, P', XP', X^2P'\right) = D(P) = 0$ alors la famille (P, XP, P', XP', X^2P') est liée.

Q.6 ▷ En déduire qu'il existe $U,\ V \in \mathbb{C}[X]$ non nuls tels que $\deg U \leq 1$, $\deg V \leq 2$ et $UP + VP' = 0$.

La famille (P, XP, P', XP', X^2P') est liée, donc il existe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\alpha_0 P + \alpha_1 XP + \alpha_2 P' + \alpha_3 XP' + \alpha_4 X^2 P' = 0.$$

On pose $U = \alpha_0 + \alpha_1 X$ et $V = \alpha_2 + \alpha_3 X + \alpha_4 X^2$, alors $U, V \in \mathbb{C}[X]$, $\deg U \leq 1$, $\deg V \leq 2$ et $UP + VP' = 0$. Comme les α_i ne sont pas tous nuls alors $U \neq 0$ ou $V \neq 0$. Si $U = 0$ alors $VP' = 0$ et comme $P' \neq 0$, on obtient $V = 0$, ce qui est absurde. Donc $U \neq 0$. De la même façon on prouve que $V \neq 0$.

Q.7 ▷ Montrer que P admet une racine multiple.

Si P admet 3 racines simples x_1, x_2 et x_3 alors, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $P(x_i) = 0$ et $P'(x_i) \neq 0$. En utilisant la relation $UP + VP' = 0$, on obtient, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $V(x_i)P'(x_i) = 0$. Donc, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $V(x_i) = 0$, ce qui est absurde car V non nul, $\deg V \leq 2$ et admet 3 racines distinctes. Donc P admet une racine multiple.

Q.8 ▷ Montrer que

$$D(P) = 4a^3c - 18abc + 4b^3 - a^2b^2 + 27c^2.$$

On a

$$D(P) = \begin{vmatrix} c & 0 & b & 0 & 0 \\ b & c & 2a & b & 0 \\ a & b & 3 & 2a & b \\ 1 & a & 0 & 3 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{(C_5 \leftarrow C_5 - 3C_2)}{=} \begin{vmatrix} c & 0 & b & 0 & 0 \\ b & c & 2a & b & -3c \\ a & b & 3 & 2a & -2b \\ 1 & a & 0 & 3 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} c & b & 0 & 0 \\ b & 2a & b & -3c \\ a & 3 & 2a & -2b \\ 1 & 0 & 3 & -a \end{vmatrix} \overset{(C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1,\, C_4 \leftarrow C_4 + aC_1)}{=} -\begin{vmatrix} c & b & -3c & ac \\ b & 2a & -2b & -3c + ab \\ a & 3 & -a & -2b + a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & -3c & ac \\ 2a & -2b & -3c + ab \\ 3 & -a & -2b + a^2 \end{vmatrix} \overset{(C_3 \leftarrow C_3 + \frac{a}{3}C_2)}{=} \begin{vmatrix} b & -3c & 0 \\ 2a & -2b & -3c + \frac{ab}{3} \\ 3 & -a & -2b + \frac{2a^2}{3} \end{vmatrix}$$

$$= b \begin{vmatrix} -2b & -3c + \frac{ab}{3} \\ -a & -2b + \frac{2a^2}{3} \end{vmatrix} + 3c \begin{vmatrix} 2a & -3c + \frac{ab}{3} \\ 3 & -2b + \frac{2a^2}{3} \end{vmatrix}$$

$$= b\left(4b^2 - 4\frac{a^2b}{3} + a\left(-3c + \frac{ab}{3}\right)\right) + 3c\left(-4ab + 4\frac{a^3}{3} - 3\left(-3c + \frac{ab}{3}\right)\right)$$

$$= 4b^3 - 4\frac{a^2b^2}{3} - 3abc + \frac{a^2b^2}{3} - 12abc + 4a^3c + 27c^2 - 3abc$$

$$= 4a^3c - 18abc + 4b^3 - a^2b^2 + 27c^2.$$

I-C On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q.9 ▷ A-t-on $AB = BA$?

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $AB \neq BA$.

Q.10 ▷ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de $zA + B$ est

$$\chi_{zA+B} = X(X - (2+z))(X - (3+2z)).$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\chi_{zA+B}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2-z & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-3-2z & 2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2-z)\begin{vmatrix} \lambda-3-2z & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda-3-2z \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2-z)\left((\lambda-3-2z)\lambda+2\right) - \lambda+2-1-(\lambda-3-2z) \\
&= (\lambda-2-z)\left(\lambda^2-(3+2z)\lambda+2\right) - 2\lambda+4+2z \\
&= (\lambda-2-z)\left(\lambda^2-(3+2z)\lambda+2-2\right) \\
&= \lambda(\lambda-(2+z))(\lambda-(3+2z)).
\end{aligned}$$

Donc $\chi_{zA+B} = X(X-(2+z))(X-(3+2z))$.

Q.11 ▷ Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\left\{-1,-\frac{3}{2},-2\right\}$. Montrer que $zA+B$ est diagonalisable.

Si $z \in \mathbb{C}\setminus\left\{-1,-\frac{3}{2},-2\right\}$ alors $2+z \neq 0$, $3+2z \neq 0$ et $2+z \neq 3+2z$, donc χ_{zA+B} est scindé à racines simples par suite $zA+B$ est diagonalisable.

Q.12 ▷ Montrer que $-A+B$ n'est pas diagonalisable.

$\chi_{-A+B} = X(X-1)^2$ donc 1 est une valeur propre double de $-A+B$. D'autre part

$$(-A+B)X = X \iff \begin{cases} y+z=0 \\ x-2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \iff y=-z \text{ et } x=2z \iff X \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\dim E_1(-A+B) = 1 \neq 2$ la multiplicité de 1 comme valeur propre de $-A+B$. Donc $-A+B$ n'est pas diagonalisable.

I-D Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ deux matrices diagonalisables.

Q.13 ▷ Montrer que

$$AB = BA \iff \exists P \in GL_3(\mathbb{C}) \text{ telle que } P^{-1}AP \text{ et } P^{-1}BP \text{ soient diagonales.}$$

$\Longleftarrow$) Supposons qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales. Donc $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$, puis $P^{-1}ABP = P^{-1}BAP$ et enfin $AB = BA$.
$\Longrightarrow$) Supposons que $AB = BA$. On note f et g les endomorphismes de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$ canoniquement associés à A et B respectivement. Alors f et g sont diagonalisables et $f \circ g = g \circ f$. D'après la partie **I-A**, $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$ admet une base B formée par des vecteurs propres communs à f et g. Donc $M_B(f)$ et $M_B(g)$ sont deux matrices diagonales. Notons P la matrice de passage de la base canonique B_c de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$ à la base B. Alors $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et

$$M_B(f) = P^{-1}M_{B_c}(f)P = P^{-1}AP \text{ et } M_B(g) = P^{-1}M_{B_c}(g)P = P^{-1}BP.$$

Donc il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

Q.14 ▷ Montrer que si $AB = BA$ alors $A + B$ est diagonalisable. Que peut-on dire de la réciproque ?

Comme $AB = BA$ alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales. Alors $P^{-1}(A+B)P = P^{-1}AP + P^{-1}BP$ est diagonale. Donc $A + B$ est diagonalisable.
La réciproque est fausse : Les matrices A et B de la partie **I-C** sont diagonalisables telles que $A + B$ est diagonalisable sans que $AB = BA$.

Q.15 ▷ Montrer que si $AB = BA$ alors, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, la matrice $xA + yB$ est diagonalisable.

Comme $AB = BA$ alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales. Donc, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $P^{-1}(xA + yB)P = xP^{-1}AP + yP^{-1}BP$ est diagonale, par suite $xA + yB$ est diagonalisable.

Partie II

Dans toute cette partie on considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, la matrice $xA + yB$ soit diagonalisable et on se propose de montrer que $AB = BA$.

II-A On suppose qu'il existe $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ non tous deux nuls tels que $x_0A + y_0B$ admet une valeur propre triple.

Q.16 ▷ Montrer que $x_0A + y_0B$ est une matrice scalaire.

Comme $x_0A + y_0B$ est diagonalisable et admet une valeur propre triple α alors

$$x_0A + y_0B = P^{-1}\operatorname{diag}(\alpha, \alpha, \alpha)P = P^{-1}(\alpha I_3)P = \alpha P^{-1}P = \alpha I_3.$$

Donc $x_0A + y_0B$ est une matrice scalaire.

Q.17 ▷ En déduire que $AB = BA$.

Comme $x_0A + y_0B$ est scalaire alors elle commute avec A et avec B : $(x_0A + y_0B)A = A(x_0A + y_0B)$ et $(x_0A + y_0B)B = B(x_0A + y_0B)$. Donc $y_0BA = y_0AB$ et $x_0AB = x_0BA$. Puisque $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$ on en déduit que $AB = BA$.

II-B On suppose que $A = \operatorname{diag}(0, 0, 1)$ et que $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$.

Q.18 ▷ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par

$$\chi_{zA+B} = \chi_B - zX^2 + z(b_{11} + b_{22})X - z(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}),$$

où χ_B est le polynôme caractéristique de B.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\chi_{zA+B}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & \lambda - b_{22} & -b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & \lambda - b_{33} - z \end{vmatrix} \\
&= \left| \begin{matrix} \lambda - b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & \lambda - b_{22} \\ -b_{31} & -b_{32} \end{matrix} \begin{pmatrix} -b_{13} \\ -b_{23} \\ \lambda - b_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -z \end{pmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda - b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & \lambda - b_{22} & -b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & \lambda - b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - b_{11} & -b_{12} & 0 \\ -b_{21} & \lambda - b_{22} & 0 \\ -b_{31} & -b_{32} & -z \end{vmatrix} \\
&= \chi_B(\lambda) - z \begin{vmatrix} \lambda - b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & \lambda - b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \chi_B(\lambda) - z\left(\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\chi_{zA+B} = \chi_B - zX^2 + z(b_{11} + b_{22})X - z(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$.

II-C On suppose que $A = \operatorname{diag}(0,0,1)$ et que $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ vérifie $\operatorname{rg}(B) = 1$ et $B^2 = B$.

Q.19 ▷ Montrer que $\chi_B = X^3 - X^2$ et que $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$.

On a $B^2 - B = 0$ donc $\operatorname{Sp}(B) \subset \{0,1\}$. Comme $\operatorname{rg}(B) = 1$ alors $\dim \operatorname{Ker}(B) = 2$ par suite 0 est une valeur propre double et 1 et une valeur propre simple (car B est diagonalisable) donc $\chi_B = X^2(X-1) = X^3 - X^2$.

On a $\operatorname{rg}(B) = 1$ donc les matrices d'ordre 2 extraites de B ne sont pas inversibles, en particulier $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ n'est ps inversible et son déterminant est donc nul : $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$.

Q.20 ▷ En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par

$$\chi_{zA+B} = X\left(X^2 - (z+1)X + (b_{11} + b_{22})z\right).$$

A l'aide de la question **Q.18**, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\chi_{zA+B} &= \chi_B - zX^2 + z(b_{11} + b_{22})X \\ &= X^3 - X^2 - zX^2 + z(b_{11} + b_{22})X \\ &= X\left(X^2 - (z+1)X + (b_{11} + b_{22})z\right).\end{aligned}$$

Q.21 ▷ Montrer que si $b_{11} + b_{22} = 0$ alors $AB = BA$.

Indication : On pourra remarquer que $\chi_{-A+B} = X^3$.

Supposons que $b_{11} + b_{22} = 0$. Alors $\chi_{zA+B} = X\left(X^2 - (z+1)X\right)$ et en particulier $\chi_{-A+B} = X^3$. Donc $-A + B$ admet une valeur propre triple 0. D'après la question **Q.17**, $AB = BA$.

▼ On suppose que $b_{11} + b_{22} \neq 0$.

Q.22 ▷ Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $z_0A + B$ admette une valeur propre double $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\chi_{zA+B} = X\left(X^2 - (z+1)X + (b_{11} + b_{22})z\right)$. Comme le discriminant $\Delta(z) = (z+1)^2 - 4(b_{11} + b_{22})z$ est une fonction polynomiale de degré 2 en z et $\Delta(0) = 1 \neq 0$ alors il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Delta(z_0) = 0$. Donc le trinôme de second degré $X^2 - (z_0+1)X + (b_{11} + b_{22})z_0$ admet une racine double $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Comme 0 n'est pas une racine de ce trinôme alors $\lambda_0 \neq 0$. Donc $\chi_{z_0A+B} = X\left(X^2 - (z_0+1)X + (b_{11} + b_{22})z_0\right)$ admet une valeur propre double $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$.

Q.23 ▷ Montrer que $\operatorname{rg}(z_0A + B - \lambda_0 I_3) = 1$.

On a $z_0A + B$ est diagonalisable et λ_0 est une valeur propre double de $z_0A + B$ donc $\dim \operatorname{Ker}(z_0A + B - \lambda_0 I_3) = 2$. On en déduit que

$$\operatorname{rg}(z_0A + B - \lambda_0 I_3) = 3 - 2 = 1.$$

Q.24 ▷ En déduire que $b_{13} = b_{23} = b_{31} = b_{32} = 0$ puis que $AB = BA$.

On a $z_0A + B - \lambda_0 I_3 = \begin{pmatrix} b_{11} - \lambda_0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda_0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & z_0 + b_{33} - \lambda_0 \end{pmatrix}$ de rang 1, donc les déterminants d'ordre 2 extraits de $z_0A + B - \lambda_0 I_3$ sont nuls. Donc $\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} - \lambda_0 \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} = 0$, c'est à dire $b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22} + b_{31}\lambda_0 = 0$. Or $b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} = 0$ (car B est de rang 1) donc $b_{31}\lambda_0 = 0$ puis $b_{31} = 0$ (car $\lambda_0 \neq 0$).

De la même façon $b_{13} = b_{23} = b_{32} = 0$.

Donc $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$ puis $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = BA$.

II-D On suppose maintenant que A et B admettent chacune une valeur propre double et une valeur propre simple. On pose $\mathrm{Sp}(A) = \{\alpha, \beta\}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{\lambda, \mu\}$, où α est la valeur propre double de A et β sa valeur propre simple ; λ est la valeur propre double de B et μ sa valeur propre simple.

Q.25 ▷ Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \beta)$. On pose

$$A_1 = \frac{1}{\beta - \alpha} P^{-1}(A - \alpha I_3) P \quad \text{et} \quad B_1 = \frac{1}{\mu - \lambda} P^{-1}(B - \lambda I_3) P.$$

La matrice A est diagonalisable avec α comme valeur propre double et β comme valeur propre simple, donc A est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \beta)$. Donc il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \beta)$.

Q.26 ▷ Montrer que $A_1 = \mathrm{diag}(0, 0, 1)$.

On a

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\beta - \alpha} P^{-1}(A - \alpha I_3) P \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha}\left(P^{-1}AP - \alpha I_3\right) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha}(\mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \beta) - \alpha I_3) = \frac{1}{\beta - \alpha}\mathrm{diag}(0, 0, \beta - \alpha) = \mathrm{diag}(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Q.27 ▷ Montrer que $(B_1)^2 = B_1$ et $\mathrm{rg}(B_1) = 1$.

$B_1 = \frac{1}{\mu - \lambda} P^{-1}(B - \lambda I_3) P = P^{-1} \frac{1}{\mu - \lambda}(B - \lambda I_3) P$. Donc B_1 est semblable à la matrice $\frac{1}{\mu - \lambda}(B - \lambda I_3)$. Comme $\mathrm{Sp}(B) = \{\lambda, \mu\}$ alors $\mathrm{Sp}\left(\frac{1}{\mu - \lambda}(B - \lambda I_3)\right) = \{0, 1\}$. Puisque B est diagonalisable alors B_1 est diagonalisable et donc le polynôme $X(X - 1)$ annule B_1. On en déduit que $(B_1)^2 = B_1$.

Comme λ est une valeur propre double de B alors 0 est une valeur propre double de B_1. Donc $\dim \mathrm{Ker}\, B_1 = 2$ et $\mathrm{rg}(B_1) = 3 - \dim \mathrm{Ker}\, B_1 = 1$.

Q.28 ▷ Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $xA_1 + yB_1$ est diagonalisable. En déduire que $A_1B_1 = B_1A_1$.

Soit $x, y \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} xA_1 + yB_1 &= x\left(\frac{1}{\beta-\alpha}P^{-1}(A-\alpha I_3)P\right) + y\left(\frac{1}{\mu-\lambda}P^{-1}(B-\lambda I_3)P\right) \\ &= P^{-1}\left(\frac{x}{\beta-\alpha}(A-\alpha I_3) + \frac{y}{\mu-\lambda}(B-\lambda I_3)\right)P \\ &= P^{-1}\left(\frac{x}{\beta-\alpha}A + \frac{y}{\mu-\lambda}B - \left(\frac{x\alpha}{\beta-\alpha} + \frac{y\lambda}{\mu-\lambda}\right)I_3\right)P. \end{aligned}$$

Comme $\frac{x}{\beta-\alpha}A + \frac{y}{\mu-\lambda}B$ est diagonalisable alors $\frac{x}{\beta-\alpha}A + \frac{y}{\mu-\lambda}B - \left(\frac{x\alpha}{\beta-\alpha} + \frac{y\lambda}{\mu-\lambda}\right)I_3$ est aussi diagonalisable. Par similitude, $xA_1 + yB_1$ est aussi diagonalisable.
On a $A_1 = \operatorname{diag}(0,0,1)$, $(B_1)^2 = B_1$, $\operatorname{rg}(B_1) = 1$ et, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $xA_1 + yB_1$ est diagonalisable donc, d'après la partie **II-C**, $A_1B_1 = B_1A_1$.

Q.29 ▷ Montrer que $AB = BA$.

On pose $A_1 = \frac{1}{\beta-\alpha}P^{-1}(A-\alpha I_3)P$ et $B_1 = \frac{1}{\mu-\lambda}P^{-1}(B-\lambda I_3)P$ et $A_1B_1 = B_1A_1$, donc $(A-\alpha I_3)(B-\lambda I_3) = (B-\lambda I_3)(A-\alpha I_3)$. En développant, on obtient $AB - \alpha B - \lambda A + \alpha\lambda I_3 = BA - \alpha B - \lambda A + \alpha\lambda I_3$ puis $AB = BA$.

II-E On suppose ici que $A = \operatorname{diag}(0,0,1)$ et que $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ vérifie $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$. On pose $\chi_B = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, le polynôme caractéristique de B.

Q.30 ▷ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par

$$\chi_{zA+B} = X^3 + (a_2 - z)X^2 + (a_1 + z(b_{11} + b_{22}))X + a_0.$$

A l'aide de la question **Q.18**, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \chi_{zA+B} &= \chi_B - zX^2 + z(b_{11} + b_{22})X \\ &= X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 - zX^2 + z(b_{11} + b_{22})X \\ &= X^3 + (a_2 - z)X^2 + (a_1 + z(b_{11} + b_{22}))X + a_0. \end{aligned}$$

▼ On suppose que $b_{11} + b_{22} = 0$.

Q.31 ▷ Montrer que si $a_1 = a_0 = 0$ alors $AB = BA$.
Indication : On pourra considérer la matrice $a_2A + B$.

Supposons que $a_1 = a_0 = 0$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\chi_{zA+B} = X^3 + (a_2 - z)X^2$ et, en particulier pour $z = a_2$, $\chi_{a_2A+B} = X^3$. Donc $a_2A + B$ admet 0 comme valeur propre triple. D'après la question **Q.17**, $AB = BA$.

▼ On suppose que $a_1 \neq 0$ ou $a_0 \neq 0$.

Q.32 ▷ Montrer que $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré strictement positif.
Indication : Utiliser le résultat de la question **Q.8**.

On a, pour $z \in \mathbb{C}$, $\chi_{zA+B} = X^3 + (a_2 - z)X^2 + a_1X + a_0$ donc, à l'aide de la question **Q.8**,

$$D(\chi_{zA+B}) = 4a_0(a_2 - z)^3 - 18a_0a_1(a_2 - z) + 4(a_1)^3 - (a_1)^2(a_2 - z)^2 + 27(a_0)^2.$$

Si $a_0 \neq 0$ alors $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré 3.
Si $a_0 = 0$ alors $a_1 \neq 0$ et $D(\chi_{zA+B}) = 4(a_1)^3 - (a_1)^2(a_2 - z)^2$ est une fonction polynomiale en z de degré 2.
Donc $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré strictement positif.

Q.33 ▷ En déduire qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0A + B$ admet une valeur propre multiple λ_0.

Comme $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré strictement positif alors $D(\chi_{zA+B})$ admet une racine z_0 dans $\mathbb{C}$. Par suite $D(\chi_{z_0A+B}) = 0$. D'après la question **Q.7**, le polynôme χ_{z_0A+B} admet une racine multiple λ_0. Donc la matrice $z_0A + B$ admet une valeur propre multiple λ_0.

Q.34 ▷ Montrer que $z_0A + B$ commute avec A puis que $AB = BA$. On discutera suivant la multiplicité de la valeur propre λ_0.

Si λ_0 est une valeur propre triple de $z_0A + B$ alors $AB = BA$ d'après la question **Q.17**.
Supposons maintenant que λ_0 est une valeur propre double de $z_0A + B$ et $B_1 = z_0A + B$. Alors, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $xA + yB_1 = xA + y(z_0A + B) = (x + yz_0)A + yB$ est diagonalisable avec $A = \operatorname{diag}(0,0,1)$ admet une valeur propre double 0 et une valeur propre simple 1 et $B_1 = z_0A + B$ admet une valeur propre double λ_0 et une valeur propre simple. D'après la question **Q.23**, $AB_1 = B_1A$. Il s'ensuit que $A(z_0A + B) = (z_0A + B)A$ et en développant on obtient $AB = BA$.

▼ On suppose que $b_{11} + b_{22} \neq 0$.

Q.35 ▷ Montrer que $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré 4.

On a, pour $z \in \mathbb{C}$, $\chi_{zA+B} = X^3 + (a_2 - z)X^2 + (a_1 + z(b_{11} + b_{22}))X + a_0$. Donc

$$\begin{aligned} D(\chi_{zA+B}) &= 4a_0(a_2 - z)^3 - 18a_0(a_1 + z(b_{11} + b_{22}))(a_2 - z) \\ &\quad + 4(a_1 + z(b_{11} + b_{22}))^3 - (a_2 - z)^2(a_1 + z(b_{11} + b_{22}))^2 + 27(a_0)^2. \end{aligned}$$

Le terme $(a_2 - z)^2(a_1 + z(b_{11} + b_{22}))^2$ est de degré 4 et tous les autres termes ont des degrés strictement inférieurs à 4, donc $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré 4.

Q.36 ▷ En déduire qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0A + B$ admet une valeur propre multiple.

Comme $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré 4 strictement positif alors $D(\chi_{zA+B})$ admet une racine z_0 dans $\mathbb{C}$. Par suite $D(\chi_{z_0A+B}) = 0$. D'après la question **Q.7**, le polynôme χ_{z_0A+B} admet une racine multiple λ_0. Donc la matrice $z_0A + B$ admet une valeur propre multiple.

Q.37 ▷ Montrer que $z_0A + B$ commute avec A puis que $AB = BA$.

Si $z_0A + B$ admet une valeur propre triple alors $AB = BA$ d'après la question **Q.17**.
Supposons que $z_0A + B$ admet une valeur propre double. Alors, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $xA + y(z_0A + B) = (x + yz_0)A + yB$ est diagonalisable avec $A = \operatorname{diag}(0,0,1)$ admet une valeur propre double et une valeur propre simple et $z_0A + B$ admet une valeur propre double et une valeur propre simple. D'après la question **Q.29**, $A(z_0A + B) = (z_0A + B)A$ et en développant on obtient $AB = BA$.

II-F On suppose que A admet une valeur propre double α et une valeur propre simple β.

Q.38 ▷ Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $\frac{1}{\beta-\alpha}P^{-1}(A - \alpha I_3)P = \operatorname{diag}(0,0,1)$.

La matrice A est diagonalisable avec α comme valeur propre double et β comme valeur propre simple, donc A est semblable à la matrice $\operatorname{diag}(\alpha,\alpha,\beta)$. Donc il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\alpha,\alpha,\beta)$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta-\alpha}P^{-1}(A - \alpha I_3)P &= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(P^{-1}AP - \alpha I_3\right) \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha}(\operatorname{diag}(\alpha,\alpha,\beta) - \alpha I_3) = \frac{1}{\beta-\alpha}\operatorname{diag}(0,0,\beta-\alpha) = \operatorname{diag}(0,0,1). \end{aligned}$$

Q.39 ▷ On pose $P^{-1}BP = \left(b'_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq 3}$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que

$$\left(b'_{11} - t\right)\left(b'_{22} - t\right) - b'_{12}b'_{21} = 0.$$

L'équation $\left(b'_{11} - t\right)\left(b'_{22} - t\right) - b'_{12}b'_{21} = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{C}$ est une équation de second degré, donc elle admet au moins une solution. Donc il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que $\left(b'_{11} - t\right)\left(b'_{22} - t\right) - b'_{12}b'_{21} = 0$.

Q.40 ▷ Montrer que $\operatorname{diag}(0,0,1)$ et $P^{-1}BP - tI_3$ commutent. En déduire que $AB = BA$.

*) Pour tout $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} x\operatorname{diag}(0,0,1) + y\left(P^{-1}BP - tI_3\right) &= x\frac{1}{\beta-\alpha}P^{-1}\left(A - \alpha I_3\right)P + y\left(P^{-1}BP - tI_3\right) \\ &= P^{-1}\left(\frac{x}{\beta-\alpha}A + yB - \left(\frac{x\alpha}{\beta-\alpha} - yt\right)I_3\right)P. \end{aligned}$$

Comme $\frac{x}{\beta-\alpha}A + yB$ est diagonalisable alors $\frac{x}{\beta-\alpha}A + yB - \left(\frac{x\alpha}{\beta-\alpha} - yt\right)I_3$ est diagonalisable. Comme $x\operatorname{diag}(0,0,1) + y\left(P^{-1}BP - tI_3\right)$ est semblable à $\frac{x}{\beta-\alpha}A + yB - \left(\frac{x\alpha}{\beta-\alpha} - yt\right)I_3$ alors elle est aussi diagonalisable.

**) On a $P^{-1}BP - tI_3 = \begin{pmatrix} b'_{11} - t & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b'_{22} - t & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} - t \end{pmatrix}$ avec $\left(b'_{11} - t\right)\left(b'_{22} - t\right) - b'_{12}b'_{21} = 0$.

Donc, d'après la partie **II-E**, $\operatorname{diag}(0,0,1)$ et $P^{-1}BP - tI_3$ commutent. Il vient que $P\operatorname{diag}(0,0,1)P^{-1} = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(A - \alpha I_3\right)$ et $P\left(P^{-1}BP - tI_3\right)P^{-1} = B - tI_3$ commutent, et on en déduit facilement que $AB = BA$.

II-G On suppose ici que $A = \operatorname{diag}(0,1,u)$, avec $u \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$.

On admet qu'il existe $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par la formule

$$\chi_{zA+B} = X^3 - \varphi_2(z)X^2 + \varphi_1(z)X + \varphi_0(z),$$

où $\varphi_2(z) = (u+1)z + b_1$, $\varphi_1(z) = uz^2 + b_2z + b_3$ et $\varphi_0(z) = b_4z^2 + b_5z + b_6$.

Q.41 ▷ Montrer que $D\left(\chi_{zA+B}\right)$ est une fonction polynomiale de degré 6 en z.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} D\left(\chi_{zA+B}\right) = {} & 4\left((u+1)z + b_1\right)^3\left(b_4z^2 + b_5z + b_6\right) - 18\left((u+1)z + b_1\right)\left(uz^2 + b_2z + b_3\right)\left(b_4z^2 + b_5z + b_6\right) \\ & + 4\left(uz^2 + b_2z + b_3\right)^3 - \left((u+1)z + b_1\right)^2\left(uz^2 + b_2z + b_3\right)^2 + 27\left(b_4z^2 + b_5z + b_6\right)^2. \end{aligned}$$

Tous les termes de cette somme sont des fonctions polynomiales de degrés strictement inférieurs à 6 sauf peut être $4\left(uz^2 + b_2z + b_3\right)^3 - \left((u+1)z + b_1\right)^2\left(uz^2 + b_2z + b_3\right)^2$ qui a un degré inférieur ou égal à 6. Le coefficient de z^6 dans ce terme est $4u^3 - (u+1)^2u^2 = u^2\left(4u - (u+1)^2\right) = -u^2(u-1)^2 \neq 0$, car $u \neq 0$ et $u \neq 1$. Donc $D\left(\chi_{zA+B}\right)$ est une fonction polynomiale de degré 6 en z.

Q.42 ▷ Montrer alors qu'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $z_1A + B$ admet une valeur propre multiple.

Comme $D\left(\chi_{zA+B}\right)$ est une fonction polynomiale en z de degré strictement positif alors il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $D\left(\chi_{z_1A+B}\right) = 0$. Donc χ_{z_1A+B} admet une racine multiple ou, de façon équivalente, $z_1A + B$ admet une valeur propre multiple.

Q.43 ▷ Montrer que $z_1 A + B$ commute avec A. En déduire que $AB = BA$.

Si $z_1 A + B$ admet une valeur propre triple alors, d'après la partie **II-A**, $AB = BA$.
Supposons que $z_1 A + B$ admet une valeur propre double. On a,

*) pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $x(z_1 A + B) + yA = (xz_1 + y)A + xB$ est diagonalisable ;

**) la matrice $z_1 A + B$ admet une valeur propre double.

D'après la question **Q.40**, $z_1 A + B$ commute avec A.
On a $(z_1 A + B)A = A(z_1 A + B)$ donc $z_1 A^2 + BA = z_1 A^2 + AB$ par suite $AB = BA$.

II-H

Q.44 ▷ En distinguant les trois cas suivants :

- A ou B admet une valeur propre triple ;
- A et B admettent chacune une valeur propre double et une valeur propre simple ;
- A ou B admet 3 valeurs propres simples,

montrer que $AB = BA$.

- Premier cas : A ou B admet une valeur propre triple alors, d'après la partie **II-A**, $AB = BA$.
- Deuxième cas : A et B admettent chacune une valeur propre double et une valeur propre simple alors, d'après la partie **II-D**, $AB = BA$.
- Troisième cas : A ou B admet 3 valeurs propres simples. Comme A et B jouent des rôles symétriques, on peut supposer sans perdre de généralité que la matrice A admet 3 valeurs propres simples α, β et γ. Comme A est diagonalisable alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$. Donc $\frac{1}{\beta-\alpha} P^{-1}(A - \alpha I_3)P = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(P^{-1}AP - \alpha I_3\right) = \operatorname{diag}(0, 1, a)$ avec $a = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \neq 0$ et $a \neq 1$ (car $\gamma \neq \alpha$ et $\gamma \neq \beta$).
  Observons maintenant que, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $x \operatorname{diag}(0, 1, a) + yP^{-1}BP = P^{-1}\left(\frac{x}{\beta-\alpha}A + yB - \frac{x\alpha}{\beta-\alpha}I_3\right)P$ est diagonalisable. D'après la partie **II-G**, $\operatorname{diag}(0, 1, a)$ et $P^{-1}BP$ commutent. Donc $P^{-1}(A - \alpha I_3)P$ et $P^{-1}BP$ commutent aussi et, par similitude $A - \alpha I_3$ et B commutent. On en déduit que $AB = BA$.

Partie III

Q.45 ▷ Soient $A, B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $xA + yB$ est diagonalisable.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. La matrice $xA + yB$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

Q.46 ▷ Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, la matrice $xA + yB$ soit diagonalisable. A-t-on $AB = BA$? Justifier votre réponse.

La réponse est "Non".

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

*) Comme $A, B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ alors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $xA + yB$ est diagonalisable.

**) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 10 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ donc $AB \neq BA$.

⋆ **Fin de l'épreuve** ⋆