REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2023

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2023

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Session 2023	Date : 31/05/2023	Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling à l'aide d'un développement asymptotique d'une fonction intégrale et de donner quelques applications. ***Les parties III, IV et V sont indépendantes.***

On pourra utiliser les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}}(z)$.

Notations

- On note $\mathcal{C}[0,1] = \{\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C},\ \varphi \text{ est continue}\}$ qu'on munit de la norme
$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|, \qquad \varphi \in \mathcal{C}[0,1].$$
- On note $C_0(\mathbb{R}^+) = \{\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C} \text{ continue},\ \lim_{+\infty} \varphi = 0\}$ qu'on munit de la norme
$$N_\infty(\varphi) = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |\varphi(t)|, \qquad \varphi \in C_0(\mathbb{R}^+).$$
- On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynomiales. Par abus de language, la locution "fonction polynomiale" est parfois remplacée par polynôme.
- Si E est un espace vectoriel normé et F une partie de E, l'adhérence de F sera notée $\overline{F}$.

- On rappelle que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction génératrice G_X est définie par : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\, t^n, \quad t \in [-1,1]$. Cette série converge pour tout nombre complexe z de module ≤ 1 et on peut donc définir

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\, z^n, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1.$$

Partie I : Préliminaires

Q.1 ▷ Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin x$ est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans la suite, on désigne par f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = e^{it} - 1 - it \quad \text{pour tout réel } t.$$

Q.2 ▷ Montrer qu'au voisinage de 0 on a : $f(t) \sim -\frac{t^2}{2}$.

Q.3 ▷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in \mathbb{R}$, $\left|e^{xf(t)}\right| = e^{-2x\sin^2(\frac{t}{2})}$.

Q.4 ▷ En déduire que pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\left|e^{xf(t)}\right| \leq e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}}.$$

Q.5 ▷ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_X(e^{it}) e^{-ikt} dt.$$

Q.6 ▷ Soit E un espace vectoriel normé et F est un sous espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est un sous espace vectoriel de E.

Partie II : Une preuve de la formule de Stirling

On désigne par Φ la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\Phi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{xf(t)} dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+,$$

où f est la fonction définie plus haut.

Q.7 ▷ Montrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et qu'elle vérifie

$$|\Phi(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}} dt, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

En déduire que $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^+)$.

On se propose de déterminer un équivalent de Φ en $+\infty$.

Q.8 ▷ Montrer que pour $x > 0$ on a :

$$\sqrt{x}\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(u)du, \quad \text{où} \quad h_x(u) = \begin{cases} e^{xf(\frac{u}{\sqrt{x}})} & \text{si } |u| < \sqrt{x}\pi, \\ 0 & \text{si } |u| \geq \sqrt{x}\pi. \end{cases}$$

Q.9 ▷ Montrer que pour tout réel u, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h_x(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Q.10 ▷ En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\Phi(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

On se propose dans la suite de cette partie de démontrer la formule de Stirling. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$.

Q.11 ▷ Expliciter la fonction génératrice G_X de X.

Q.12 ▷ Montrer alors que : $\dfrac{n^n e^{-n}}{n!} = \dfrac{1}{2\pi}\Phi(n)$.

Q.13 ▷ En déduire la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

Partie III : Un exemple d'une partie dense

Soit $\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{C}[0,1] : g(0) = 0\}$ et on désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynomiales.

Q.14 ▷ Montrer que $\mathcal{F}$ est un hyperplan fermé de $\mathcal{C}[0,1]$.
Indication : On pourra utiliser l'application $g \longmapsto g(0)$.

On note $\mathcal{P}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \{f \in \mathcal{P} \ : \ f(0) = 0\}$ et on fixe $g \in \mathcal{F}$.

Q.15 ▷ Justifier qu'il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$.
En déduire que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Q_n = P_n - P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers g sur $[0,1]$ et que $\overline{\mathcal{P}_0} = \mathcal{F}$.

On fixe $h \in C_0(\mathbb{R}^+)$ et on pose $g(t) = h(-\ln t), \quad t \in]0,1]$.

Q.16 ▷ Justifier que g se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, notée encore par g, et qui appartient à $\mathcal{F}$. Comparer $N_\infty(h)$ et $\|g\|_\infty$.

Q.17 ▷ En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(x \longmapsto e^{-x}P_n(e^{-x}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers h.

Soit $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $C_0(\mathbb{R}^+)$ formé des fonctions de la forme $h(x) = e^{-x}P(x)$ où $P \in \mathcal{P}$. On souhaite montrer dans la suite que $\mathcal{D}$ est une partie dense de $C_0(\mathbb{R}^+)$. On pose $e_k(x) = e^{-kx}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad k \in \mathbb{N}^*$.

Q.18 ▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$. Justifier l'inégalité suivante :

$$\left| e^{-2x} - e^{-x} A_n(x) \right| \leq \frac{x^n e^{-x}}{n!}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Q.19 ▷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x^n e^{-x} \leq n^n e^{-n}$. En déduire que $e_2 \in \overline{\mathcal{D}}$.

Soit n un entier ≥ 2 tel que $e_n \in \overline{\mathcal{D}}$. On se propose de démontrer que $e_{n+1} \in \overline{\mathcal{D}}$. On fixe $\varepsilon > 0$, il résulte de la question **Q.18** qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}$ vérifiant

$$\left| e^{-2y} - e^{-y} P(y) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{pour tout } y \geq 0.$$

On pose $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |e^{-x} P(x)|$.

Q.20 ▷ Justifier qu'il existe un polynôme B_n vérifiant

$$\left| e^{-(n+1)x} - e^{-nx/2} e^{-x/2} B_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Q.21 ▷ Montrer qu'il existe un polynôme Q vérifiant

$$\left| e^{-nx/2} - e^{-x/2} Q(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2M+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Indication : Remarquer que $e_n \in \overline{\mathcal{D}}$.

Q.22 ▷ En déduire qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}$ tel que $\left| e^{-(n+1)x} - \varphi(x) \right| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et conclure que $e_{n+1} \in \overline{\mathcal{D}}$.

Q.23 ▷ Monter alors que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$.

Partie IV : Application à une marche aléatoire

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi définie par :

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et on prend $S_0 = 0$.

Q.24 ▷ Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

Q.25 ▷ Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$P\left(\left| \frac{S_n}{n} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Q.26 ▷ Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$. En déduire que $P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Q.27 ▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par α_n la probabilité conditionnelle $P\left(\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) | S_{2n} = 0\right)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Dans la suite, on considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} P(S_{2n} = 0)x^{2n}$ et on désigne par H sa somme.

Q.28 ▷ Déterminer le rayon de convergence R de cette série. A-t-on convergence au point $x = R$?

Q.29 ▷ Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $\left(2n, \frac{1}{2}\right)$. Expliciter la fonction génératrice G_Y de Y.

Q.30 ▷ En utilisant la question **Q.5**, montrer que

$$P(S_{2n} = 0) = P(Y = n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(u)du.$$

Q.31 ▷ En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$H(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 - x^2\cos^2(u)}.$$

Q.32 ▷ Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Partie V : Une Série de fonctions

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{\pi e^{-x}}{2n\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)}\right).$$

Q.33 ▷ Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-1} \ln\left(1 + \frac{\pi e^{-x}}{2k\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{2}{(n+1)\pi}\right).$$

Q.34 ▷ En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q.35 ▷ Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!}\right)$.

En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

⋆ **Fin de l'épreuve** ⋆

REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2023

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2023

Concours Mathématiques et Physique

Corrigé de l'Epreuve de Mathématiques I

Session 2023	Date : 31/05/2023	Durée : 4 heures

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling à l'aide d'un développement asymptotique d'une fonction intégrale et de donner quelques applications. ***Les parties III, IV et V sont indépendantes.***

On pourra utiliser les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}}(z)$.

Notations

- On note $\mathcal{C}[0,1] = \{\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C},\ \varphi \text{ est continue}\}$ qu'on munit de la norme
$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|, \qquad \varphi \in \mathcal{C}[0,1].$$
- On note $C_0(\mathbb{R}^+) = \{\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C} \text{ continue}, \lim_{+\infty} \varphi = 0\}$ qu'on munit de la norme
$$N_\infty(\varphi) = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |\varphi(t)|, \qquad \varphi \in C_0(\mathbb{R}^+).$$
- On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynomiales. Par abus de language, la locution "fonction polynomiale" est parfois remplacée par polynôme.
- Si E est un espace vectoriel normé et F une partie de E, l'adhérence de F sera notée $\overline{F}$.
- On rappelle que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction génératrice G_X est définie par : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\,t^n, \quad t \in [-1,1]$. Cette série converge pour tout nombre complexe z de module ≤ 1 et on peut donc définir
$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\,z^n, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1.$$

Partie I : Préliminaires

Q.1 ▷ Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin x$ est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction sin est C^2 sur $[0, \pi/2]$ dont la dérivée seconde est négative, donc sin est concave. Tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, s'écrit $x = \frac{2}{\pi}x \cdot \frac{\pi}{2} + (1 - \frac{2}{\pi}x)0$. D'où par concavité on obtient

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x \sin(\frac{\pi}{2}) + (1 - \frac{2}{\pi}x) \sin 0 = \frac{2}{\pi}x.$$

On pourra aussi utiliser la position de la courbe $y = \sin x$ par rapport à la corde passant par les deux points $(0,0)$ et $(\pi/2, 1)$.

Dans la suite, on désigne par f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = e^{it} - 1 - it \quad \text{pour tout réel } t.$$

Q.2 ▷ Montrer qu'au voisinage de 0 on a : $f(t) \sim -\dfrac{t^2}{2}$.

En utilisant le devéloppement limité de la fonction exp on obtient : $e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + o(x^2)$.

Q.3 ▷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in \mathbb{R}$, $\left|e^{xf(t)}\right| = e^{-2x\sin^2(\frac{t}{2})}$.

On a : $\left|e^{xf(t)}\right| = e^{\mathrm{Re}(xf(t)} = e^{x\,\mathrm{Re}(f(t))} = e^{x(\cos t - 1)} = e^{-2x\sin^2(\frac{t}{2})}$.

Q.4 ▷ En déduire que pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\left|e^{xf(t)}\right| \leq e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}}.$$

Pour $t \in [-\pi, \pi]$, on a $\left|\frac{t}{2}\right| \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\sin^2(\frac{t}{2}) = \sin^2(\left|\frac{t}{2}\right|)$ et $\sin(\left|\frac{t}{2}\right|) \geq \frac{1}{\pi}|t| \geq 0$, on obtient $\sin^2(\frac{t}{2}) \geq \frac{t^2}{\pi^2}$ et l'inégalité s'ensuit.

Q.5 ▷ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_X(e^{it})e^{-ikt}dt.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$G_X(e^{it})e^{-ikt} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)e^{i(n-k)t} \quad \text{pour tout réel } t.$$

Comme la suite de fonctions $t \longmapsto P(X = n)e^{i(n-k)t}$ est continue sur $[-\pi, \pi]$; la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)e^{i(n-k)t}$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$ (puisque $\left|P(X = n)e^{i(n-k)t}\right| \leq P(X = n)$); la série $\sum P(X = n)$ converge et le fait que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}dt = \delta_{n,k}$, on peut écrie

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_X(e^{it})e^{-ikt}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}dt = P(X = k).$$

Q.6 ▷ Soit E un espace vectoriel normé et F est un sous espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est un sous espace vectoriel de E.

On a $0 \in \overline{F}$. Si $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe deux suites d'élements de F, (x_n) et (y_n) qui convergent vers x et y respectivement. La suite $(x_n + \lambda y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ et converge vers $x + \lambda y$ ce qui montre que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel.

Partie II : Une preuve de la formule de Stirling

On désigne par Φ la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\Phi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{xf(t)}dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+,$$

où f est la fonction définie plus haut.

Q.7 ▷ Montrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et qu'elle vérifie

$$|\Phi(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}}dt, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

En déduire que $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^+)$.

Soit $h : (x,t) \longmapsto e^{xf(t)}$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times [-\pi,\pi]$.
On a $t \longmapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. $x \longmapsto h(x,t)$ est continie sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $t \in [-\pi,\pi]$. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi,\pi]$, on a $|h(x,t)| \leq e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}} \leq 1$ et la fonction $t \longmapsto 1$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]$. Le théorème de continuité sous le signe intégral s'applique.
On a $|\Phi(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{xf(t)}\right| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}}dt$ d'après **Q.4**.
On a $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}} = 0$ pour tout t et $\left|e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}}\right| \leq 1$ qui est intégrable. Le TCD montre que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \Phi(x) = 0$. Par suite $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^+)$. De plus on a $|\Phi(x)| \leq 2\pi = |\Phi(0)|$ donc $N_\infty(\Phi) = 2\pi$.

On se propose de déterminer un équivalent de Φ en $+\infty$.

Q.8 ▷ Montrer que pour $x > 0$ on a :

$$\sqrt{x}\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(u)du, \quad \text{où} \quad h_x(u) = \begin{cases} e^{xf(\frac{u}{\sqrt{x}})} & \text{si } |u| < \sqrt{x}\pi, \\ 0 & \text{si } |u| \geq \sqrt{x}\pi. \end{cases}$$

En utilisant le changement de variable bijectif $u = \sqrt{x}t$ on obtient

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\pi\sqrt{x}}^{\pi\sqrt{x}} e^{xf(\frac{u}{\sqrt{x}})}du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(u)du.$$

Q.9 ▷ Montrer que pour tout réel u, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} h_x(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Soit $u \in \mathbb{R}$. Il existe $a > 0$ tel que pour tout $x > a$, $|u| < \sqrt{x}\pi$ donc $h_x(u) = e^{xf(\frac{u}{\sqrt{x}})}$ pour x assez grand. D'après **Q.2**, $f(\frac{u}{\sqrt{x}}) \sim -\frac{u^2}{2x}$ donc $\lim_{x\longrightarrow+\infty} xf(\frac{u}{\sqrt{x}}) = -\frac{u^2}{2}$. Par composition des limites, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} h_x(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Q.10 ▷ En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\Phi(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

On a $u \mapsto h_x(u)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} h_x(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$ pour tout u et $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue par morceaux. Pour tout $(x,u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $|h_x(u)| \leq \left|e^{xf(\frac{u}{\sqrt{x}})}\right| \leq e^{-2x(\frac{u}{\sqrt{x}})^2} = e^{-2u^2}$ et $u \mapsto e^{-2u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par TCD on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}.$$

On se propose dans la suite de cette partie de démontrer la formule de Stirling. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$.

Q.11 ▷ Expliciter la fonction génératrice G_X de X.

On a $G_X(t) = e^{n(t-1)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q.12 ▷ Montrer alors que : $\dfrac{n^n e^{-n}}{n!} = \dfrac{1}{2\pi}\Phi(n)$.

D'après la question **Q.5** on a

$$\begin{aligned}\frac{n^n e^{-n}}{n!} &= P(x=n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_X(e^{it})e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}dt = \frac{1}{2\pi}\Phi(n).\end{aligned}$$

Q.13 ▷ En déduire la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$.

D'après la question **Q.10** on a $\dfrac{1}{2\pi}\Phi(n) \sim \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. Par suite on a : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Partie III : Un exemple d'une partie dense

Soit $\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{C}[0,1] : g(0) = 0\}$ et on désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynomiales.

Q.14 ▷ Montrer que $\mathcal{F}$ est un hyperplan fermé de $\mathcal{C}[0,1]$.

Indication : On pourra utiliser l'application $g \longmapsto g(0)$.

La forme linéaire sur $\mathcal{C}[0,1]$, $\psi : g \longmapsto g(0)$ est continue puisque $|\psi(g)| \leq \|g\|_\infty$ et $F = \ker\psi$ donc F est fermé comme étant image réciproque d'un fermé par une application continue.

On note $\mathcal{P}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \{f \in \mathcal{P} \ : \ f(0) = 0\}$ et on fixe $g \in \mathcal{F}$.

Q.15 ▷ Justifier qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$.

En déduire que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Q_n = P_n - P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers g sur $[0,1]$ et que $\overline{\mathcal{P}_0} = \mathcal{F}$.

Comme g est continue sur $[0,1]$, le théorème de Weirstrass montre l'existence de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tq pour tout $n \geq N$, $\|P_n - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ en particulier $|P_n(0)| = |P_n(0) - g(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Par suite pour tout $n \geq N$, $\|Q_n - g\|_\infty \leq \|P_n - g\|_\infty + |P_n(0)| < \varepsilon$. Ce qui montre la convergence de (Q_n). Comme $(Q_n) \in \mathcal{P}$, alors $g \in \overline{\mathcal{P}_0}$.
On a donc montré que $F \subset \overline{\mathcal{P}_0}$. Or $\mathcal{P}_0 \subset F$ donc $\overline{\mathcal{P}_0} \subset F$ (car F est fermé).

On fixe $h \in C_0(\mathbb{R}^+)$ et on pose $g(t) = h(-\ln t), \quad t \in]0,1]$.

Q.16 ▷ Justifier que g se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, notée encore par g, et qui appartient à $\mathcal{F}$. Comparer $N_\infty(h)$ et $\|g\|_\infty$.

La fonction h est continue sur $]0,1]$ comme étant composée de deux fonctions continues. Par composition de la limite on a $\lim\limits_{t \longmapsto +\infty} g(t) = \lim\limits_{x \longmapsto +\infty} h(x) = 0$, donc g se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ avec $g(0) = 0$ par suite $g \in F$.
On a $|g(t)| = |h(-\ln t)| \leq N_\infty(h)$ donc $\|g\|_\infty \leq N_\infty(h)$. De même si $x \in \mathbb{R}^+$.

Q.17 ▷ En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(x \longmapsto e^{-x}P_n(e^{-x}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers h.

D'après la question **Q.15** il existe une suite de polynômes $(Q_n) \in \mathcal{P}_0$ telle que $\|Q_n - g\|_\infty \to 0$. Or Q_n s'ecrit $XP_n(X)$. On a

$$N_\infty(e^{-x}P_n(e^{-x}) - h) = \|XP_n - g\|_\infty \|Q_n - g\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Soit $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $C_0(\mathbb{R}^+)$ formé des fonctions de la forme $h(x) = e^{-x}P(x)$ où $P \in \mathcal{P}$. On souhaite montrer dans la suite que $\mathcal{D}$ est une partie dense de $C_0(\mathbb{R}^+)$. On pose $e_k(x) = e^{-kx}$, $x \in \mathbb{R}^+, \quad k \in \mathbb{N}^*$.

Q.18 ▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$. Justifier l'inégalité suivante :

$$\left|e^{-2x} - e^{-x}A_n(x)\right| \leq \frac{x^n e^{-x}}{n!}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

On pose $f : x \mapsto e^{-x}$, f est de classe C^n et $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^{-x} \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. De l'inégalité de Taylor-Lagrange on en déduit que $|e^{-x} - P_n(x)| \leq \frac{x^n}{n!}$. Le resultat s'ensuit en multipliant par e^{-x}.

Q.19 ▷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x^n e^{-x} \leq n^n e^{-n}$. En déduire que $e_2 \in \overline{\mathcal{D}}$.

Une étude de fonction montre que $x^n e^{-x} \leq n^n e^{-n}$. Donc

$$\left|e^{-2x} - e^{-x}P_n(x)\right| \leq \frac{n^n e^{-n}}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

Par la formule de Stirling $\frac{n^n e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \longmapsto 0$, ce qui montre que la suite $(e^{-x}P_n(x))$ converge uniformément vers e_2. Par suite $e_2 \in \overline{D}$.

Soit n un entier ≥ 2 tel que $e_n \in \overline{\mathcal{D}}$. On se propose de démontrer que $e_{n+1} \in \overline{\mathcal{D}}$. On fixe $\varepsilon > 0$, il résulte de la question **Q.18** qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}$ vérifiant

$$\left|e^{-2y} - e^{-y}P(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pour tout } y \geq 0.$$

On pose $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |e^{-x}P(x)|$.

Q.20 ▷ Justifier qu'il existe un polynôme B_n vérifiant

$$\left|e^{-(n+1)x} - e^{-nx/2}e^{-x/2}B_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Il suffit de remplacer y par $(n+1)\frac{x}{2}$ et de prendre $B_n(x) = P((n+1)\frac{x}{2})$.

Q.21 ▷ Montrer qu'il existe un polynôme Q vérifiant

$$\left|e^{-nx/2} - e^{-x/2}Q(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2M+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Indication : Remarquer que $e_n \in \overline{\mathcal{D}}$.

Comme $e_n \in \overline{D}$, alors il existe un polynôme R vérifiant

$$\left|e^{-ny} - e^{-y}R(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^+.$$

Il suffit de remplacer y par $x/2$ et de poser $Q = R(x/2)$.

Q.22 ▷ En déduire qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}$ tel que $\left|e^{-(n+1)x} - \varphi(x)\right| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et conclure que $e_{n+1} \in \overline{\mathcal{D}}$.

En multipliant l'inégalité

$$\left|e^{-nx/2} - e^{-x/2}Q(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

par $e^{-x/2}P_n(x)$ on obtient

$$\left|e^{-nx/2}e^{-x/2}P_n(x) - e^{-x}P_n(x)Q(x)\right| < \frac{\varepsilon\left|e^{-x/2}P_n(x)\right|}{2M} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En utilisant la dernière inégalité et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left|e^{-(n+1)x} - e^{-x}P_n(x)Q(x)\right| < \varepsilon, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Soit $\varphi : x \longmapsto e^{-x}P_n(x)Q(x) \in D$. Alors

$$\left|e^{-(n+1)x} - \varphi(x)\right| < \varepsilon \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Ce qui montre que $e_{n+1} \in \overline{D}$.

Q.23 ▷ Monter alors que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$.

Comme $e_k \in \overline{D}$ pour tout $k \geq 1$ alors pour tout polynôme P on a $x \longmapsto e^{-x}P(e^{-x}) \in \overline{D}$. Soit $h \in C_0(\mathbb{R}^+)$, d'après la question **Q.17**, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $|h(x) - e^{-x}P(x)| < \varepsilon$ par suite $h \in \overline{\overline{D}} = \overline{D}$. Donc $\overline{D} = C_0(\mathbb{R}^+)$.

Partie IV : Application à une marche aléatoire

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi définie par :

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et on prend $S_0 = 0$.

Q.24 ▷ Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

On a $E(X_n) = 0$ et $V(X_n) = 1$. Par linéarité de l'espérance on a $E(S_n) = 0$. Par indépendance on obtient $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_i) = n$.

Q.25 ▷ Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Comme S_n admet une variance. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(|S_n - E(S_n)| > n\varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Q.26 ▷ Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$. En déduire que $P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Soit l'événement

$$(S_{2n} = 0) = \bigcup_{\substack{A \subset \{1,2,\ldots,n\} \\ \mathrm{card}(A) = n}} (X_k = 1, k \in A) \cap (X_i = -1, i \in A^c).$$

Pour chaque sous ensemble d'indices A, $P((X_k = 1, k \in A) \cap (X_i = -1, i \in A^c)) = (\frac{1}{2})^{2n}$. Par σ-additivité on obtient $P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

Méthode 2 : On écrit $X_n = 2Y_n - 1$ où $Y_n \sim \beta(\frac{1}{2})$.

Par la formule de Stirling on a

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{2\pi n(\frac{n}{e})^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Donc, $P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Q.27 ▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par α_n la probabilité conditionnelle $P\left(\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) | S_{2n} = 0\right)$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

On a

$$\alpha_n = P\left(\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) | S_{2n} = 0\right) = \frac{P\left(\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \cap (S_{2n} = 0)\right)}{P(S_{2n} = 0)}$$
$$\leq \frac{P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right)}{P(S_{2n} = 0)} = \frac{1}{n\varepsilon^2 P(S_{2n} = 0)} \sim_\infty \frac{\sqrt{\pi n}}{n\varepsilon^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}\varepsilon}.$$

D'où $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Dans la suite, on considère la série entière $\sum_{n\geq 0} P(S_{2n} = 0)x^{2n}$ et on désigne par H sa somme.

Q.28 ▷ Déterminer le rayon de convergence R de cette série. A-t-on convergence au point $x = R$?

D'après la question 14, $P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Donc, par application de la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{\pi n}} x^{2n}$ est $R = 1$. Comme la série $\sum \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ diverge donc la série $\sum_{n \geq 0} P(S_{2n} = 0)$ diverge par comparaison des séries à termes positifs.

Q.29 ▷ Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $(2n, \frac{1}{2})$. Expliciter la fonction génératrice G_Y de Y.

On a $G_Y(t) = (\frac{1}{2}t + \frac{1}{2})^{2n} = (\frac{t+1}{2})^{2n}$.

Q.30 ▷ En utilisant la question **Q.5**, montrer que

$$P(S_{2n} = 0) = P(Y = n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(u) du.$$

On a $P(S_{2n} = 0) = P(Y = n) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$. D'après la question **Q.5**

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{e^{it} + 1}{2})^{2n} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}}}{2})^{2n} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\frac{t}{2})^{2n} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\frac{t}{2})^{2n} dt \qquad \text{(Par parité)} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(u) du \qquad \text{(Par le changement de variable } u = \frac{t}{2}). \end{aligned}$$

Q.31 ▷ En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$H(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 - x^2 \cos^2(u)}.$$

On écrit

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_{2n} = 0) x^{2n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(u) du x^{2n} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}(u) x^{2n} du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \cos^2(u) x^2} du. \end{aligned}$$

Q.32 ▷ Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En calculant $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos^2(u)x^2} du$ à l'aide du changement de variable bijectif $t = \mathrm{tg}(u)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos^2(u)x^2} du &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{1-x^2+t^2} \\ &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{1-x^2}})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Par suite $H(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Partie V : Une Série de fonctions

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{\pi e^{-x}}{2n \sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)}\right).$$

Q.33 ▷ Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \ln\left(1 + \frac{\pi e^{-x}}{2k \sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{\pi}{2(n+1)}\right).$$

Soit $f_n : x \longmapsto (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{\pi e^{-x}}{2n \sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. On a $|f_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} |f_n(x)| = 0$. Donc la série définissant S converge simplement comme une série alternée vérifiant CSSA. On a donc

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| = \ln\left(1 + \frac{\pi e^{-x}}{2(n+1)\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{\pi}{2(n+1)}\right)$$

car, $\frac{\pi}{2}e^{-x} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $x \geq 0$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \geq \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}e^{-x} = e^{-x}$.

Q.34 ▷ En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout n, f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.
La série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, car pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \ln\left(1 + \frac{\pi}{2(n+1)}\right) \longrightarrow 0.$$

Par le théorème de continuité sous le signe somme, S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q.35 ▷ Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!}\right)$.

En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

La formule s'établit directement, ou par récurrence.

La formule est valable pour $n = 1$. Supposons que le résultat est vrai pour $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k-1}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \ln\left(\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!}\right) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - \ln\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!}\frac{(2n+2)^4}{2n+1}\frac{1}{(2n+2)^2(2n+3}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2^{4n+4}((n+1)!)^4}{(2n+3)!(2n+2)!}\right).\end{aligned}$$

Par la formule de Stirling

$$\frac{2^{4n}\,(n!)^4}{(2n!)\,(2n+1)!} \sim \frac{\pi}{2}e\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^{2n} \to \frac{\pi}{2}.$$

Il reste à appliquer le théorème d'interversion série-limite en l'infini : il y a convergence uniforme et

$$(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{\pi e^{-x}}{2n\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)}\right) \to (-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ quand } x \longmapsto +\infty$$

car $\dfrac{\pi e^{-x}}{2n\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)} \sim_\infty \dfrac{\pi e^{-x}}{2n(\frac{\pi}{2}e^{-x})} \longrightarrow \frac{1}{n}$.

⋆ Fin de l'épreuve ⋆