



Concours en Physique et Chimie  
Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures      Date : 3 Juin 2002      Heure : 8 H      Nb pages : 4  
Barème : Exercice : 7 pts      Problème : 13 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, la clarté et soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres réels définie par la donnée de  $a_0$ ,  $0 < a_0 < 1$ , et la relation de récurrence

$$a_{n+1} = a_n - a_n^2$$

)

- a) Démontrer que la suite  $(a_n)$  est décroissante, et que pour tout  $n \geq 0$ ,  $0 < a_n < 1$ .
- b) En déduire que la suite  $(a_n)$  est convergente. Trouver sa limite.

a) Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^2$  est convergente, et donner sa somme.

b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ , on a :  $\log(1 - a_n) = \log(a_{n+1}) - \log(a_n)$ .  
déduire que les séries  $\sum_{n \geq 0} \log(1 - a_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} a_n$  sont divergentes.

Prover que la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n$$

est absolument convergente pour tout  $x$  réel.

Dans la suite, pour tout  $x$  réel et  $N \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n \text{ et } G_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n.$$

Prover que, pour tout entier  $N$  et tout  $x \geq 0$ , on a :

$$0 \leq G(x) - G_N(x) \leq a_{N+1}$$

Prover que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ , et que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

5) Montrer que pour tout  $s \in ]0, 1[$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{(s-1)t} G(st) = 0$$

et en déduire que la fonction  $t \mapsto e^{(s-1)t} G(st)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  pour tout  $s \in ]0, 1[$ .

6) Prouver que pour tout  $s \in ]0, 1[$ ,

$$\int_0^{+\infty} e^{(s-1)t} G(st) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

## Problème

### Partie 1

Soit  $\varphi$  une fonction définie et continue sur  $[-1, 1]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On pose pour tout entier  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} f_n &: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(n\varphi(x)) \end{aligned}$$

1) Vérifier les relations de récurrences suivantes :  $\forall x \in [-1, 1], \forall n \geq 1$  :

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2 \cos(\varphi(x)) f_n(x).$$

2) Plus généralement vérifier que :  $\forall x \in [-1, 1], \forall m \geq n$  :

$$f_{m+n}(x) + f_{m-n}(x) = 2f_m(x)f_n(x).$$

Dans la suite du problème, on pose  $\varphi(x) = \arccos(x)$ , et on désigne par  $T_n$  l'application :

$$\begin{aligned} T_n &: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(n \arccos(x)) \end{aligned}$$

3) Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$  et pour tout entier  $n \geq 0$  :

$$e^{in \arccos(x)} = \sum_{k=0}^n C_n^k i^k (\sqrt{1-x^2})^k x^{n-k}.$$

4) En déduire que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $T_n$  est une fonction polynôme définie pour tout  $x \in [-1, 1]$  par :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} (x^2 - 1)^k x^{n-2k} \quad \text{où } E(\frac{n}{2}) \text{ désigne la partie entière de } \frac{n}{2}.$$

5) Déterminer le degré et la parité de  $T_n$ .

### Partie 2

Pour tout entier  $n \geq 2$ , et  $x \in [-1, 1]$ , on pose :

$$M_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad V_n(x) = \begin{pmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_{n-2}(x) \\ T_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

1) Vérifier les relations de récurrence suivantes :  $\forall x \in [-1, 1], \forall n \geq 1$  :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) .$$

Préciser  $T_0(x)$  et  $T_1(x)$  .

2) Calculer le produit  $(M_n - xI_n)V_n(x)$ , où  $I_n$  est l'identité de  $M_n(\mathbb{R})$  .

3) Soit  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , montrer que  $x_{k,n} = \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$  est une racine de  $T_n$ .

En déduire toutes les racines de  $T_n$ .

4) Montrer que pour tout  $0 \leq k \leq n-1$ ,

$$(M_n - x_{k,n}I_n)V_n(x_{k,n}) = 0 .$$

5) Montrer que les valeurs propres de  $M_n$  sont les  $n$  racines de  $T_n$  .

Quels sont les vecteurs propres associés ?

6) Montrer que la matrice  $M_n$  est diagonalisable.

### Partie 3

On désigne par  $E$  l'espace vectoriel des applications continues sur  $[-1, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On munit  $E$  du produit scalaire  $\langle, \rangle$ , défini par :

$$\langle, \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

1) Vérifier que pour tout  $f, g \in E$ ,

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos(\theta))g(\cos(\theta))d\theta .$$

2) Prouver que les  $T_n$  sont orthogonaux deux à deux .

Montrer que

$$\forall n \geq 1, \langle T_n, T_n \rangle = 1 \text{ et } \langle T_0, T_0 \rangle = 2 .$$

3) En déduire que  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  forme une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$  .

Soit  $f \in E$ , pour tout entier  $N \geq 1$ , on note :

$$S_N(f) = \frac{1}{2} \langle f, T_0 \rangle + \sum_{n=1}^N \langle f, T_n \rangle T_n$$

et soit  $g$  l'application paire définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(\theta) = f(\cos(\theta))$ .

4) Montrer que pour tout entier  $n$ ,

$$a_n(g) = \langle f, T_n \rangle, \text{ où } a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\theta) \cos(n\theta) d\theta .$$

5) Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $N \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n=1}^N a_n(g) \cos(n\theta) = S_N(f)(\cos(\theta)) .$$

6) Montrer que si  $f$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[-1, 1]$ , alors la série  $\frac{1}{2} \langle f, T_0 \rangle + \sum_{n \geq 1} \langle f, T_n \rangle T_n$  converge normalement sur  $[-1, 1]$  et que :

$$\frac{1}{2} \langle f, T_0 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, T_n \rangle T_n = f .$$

7) Réciproquement, on suppose que  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$  est absolument convergente,

7-a) Montrer que la série de fonctions  $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \alpha_n T_n$  converge normalement sur  $[-1, 1]$ .

7-b) Montrer que si  $f$  est sa somme, alors,  $\forall n \geq 0, \alpha_n = \langle f, T_n \rangle$  .

#### Partie 4

Soit  $h$  l'application  $2\pi$ -périodique, paire, définie sur  $[0, \pi]$  par  $h(\theta) = \theta$  .

1)

1-a) Tracer le graphe de  $h$  .

1-b) Déterminer la série de Fourier de  $h$  .

1-c) Etudier la convergence de la série de Fourier de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  .

1-d) En déduire que pour tout  $\theta \in [0, \pi]$  ,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\theta)}{(2n+1)^2} .$$

2) Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$  ,

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} .$$

3) En posant  $\theta = \arccos(x)$ , montrer que  $\forall x \in [-1, 1]$  ,

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} T_{2n+1}(x)$$

$$\arcsin(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} T_{2n+1}(x) .$$

4) Trouver la valeur de la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  .

5) Montrer que

$$\langle \arccos(x), T_n \rangle = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n = 2p, p \geq 1 \\ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2p+1)^2} & \text{si } n = 2p+1, p \geq 0 \end{cases}$$

6) Montrer que :

$$\int_{-1}^1 \frac{\arcsin(x) \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\arccos(x) T_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

7) En déduire que :

$$\int_{-1}^1 \frac{\arcsin(x) \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} .$$