Correction de l'épreuve de Mathématiques
Concours en Physique et Chimie

Partie I :

A)

1. a) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{(x+n)^2} \underset{n\to+\infty}{\approx} \dfrac{1}{n^2}$, donc f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. De plus

$$f(-x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(-x+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$ Donc f est paire.

$$f(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n+1)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$ Donc f est 1-périodique.

---

b) Il suffit de montrer que f est continue sur $]0,1[$. De plus il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,b] \subset]0,1[$. Pour $x \in [a,b]$, $\dfrac{1}{(x+n)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, pour $n \geq 1$ et $\dfrac{1}{(x+n)^2} \leq \dfrac{1}{(n-a)^2}$, pour $n \leq -1$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ converge uniformément sur $[a,b]$ et f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

---

2. $\displaystyle f(\frac{x}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(x+2n)^2}$, $\displaystyle f(\frac{x+1}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(x+2n+1)^2}$.

Donc $4f(x) = f(\dfrac{x}{2}) + f(\dfrac{1+x}{2})$.

---

3. a) Pour $|x| \geq 1$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\Big)$ converge uniformément sur tout intervalle $[-a,a]$, avec $0 < a < 1$. Donc $f(x) - \dfrac{1}{x^2}$ se prolonge par continuité sur $]-1,1[$. De plus $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \frac{-\pi^2}{3}$. Donc l'application $g\colon x \longmapsto f(x) - \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$ se prolonge par continuité en 0.

---

b) Comme g est 1−périodique, alors g se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une application h continue bornée sur $\mathbb{R}$.

---

4. a) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, l'application $x \longmapsto S(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$ vérifie la même relation que f à

savoir $4S(x) = S(\frac{x}{2}) + S(\frac{1+x}{2})$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $4h(x) = h(\frac{x}{2}) + h(\frac{1+x}{2})$. Le résultat est obtenu par passage à la limite car h est continue sur $\mathbb{R}$.

---

b) Soit $x_0 \in [0,1]$ tel que $|h(x_0)| = Sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)| = M$. Alors d'après la relation précédente appliquée au point x_0, on aura $4M \leq 2M$, donc $M = 0$. Donc h est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

B)

---

1. a) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(tx)dt = \frac{2\sin \pi x}{\pi x}$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos tx \cos ntdt = \frac{(-1)^n 2x \sin \pi x}{\pi(x^2-n^2)}$.

Comme la fonction F est continue et de classe C^1 par morceaux, alors pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos tx = \frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2x^2}{x^2 - n^2} \cos nt\Big).$$

---

b) On applique la relation précédente pour $t = 0$, on aura pour $x \notin \mathbb{Z}$:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2}.$$

On applique la relation au point $t = \pi$, on aura:

$$\pi \text{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

---

2. On calcule les deux sommes précédentes pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on aura: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-2n^2} = \frac{\pi \text{cotg}\frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-2n^2} = \Big(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{2}\Big)\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

---

3. a) Pour $x \in]-1,1[$, $\log(1 - \frac{x^2}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\approx} \frac{-x^2}{n^2}$, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 - \frac{x^2}{n^2})$ converge absolument sur $]-1,1[$.

On pose $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 - \frac{x^2}{n^2})$, pour $x \in]-1, 1[$.

---

b) $\Phi(0) = 0$. Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 - \frac{x^2}{n^2})$ converge sur $]-1, 1[$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$ converge uniformément sur tout $[a, b] \subset]-1, 1[$, alors et $\Phi'(x) = \pi \text{cotg}(\pi x) - \frac{1}{x}$, pour $x \in]-1, 1[\backslash\{0\}$.

---

c) Il en résulte que $\Phi(x) = \log(\frac{\sin \pi x}{\pi x})$, pour $x \in]-1, 1[\backslash\{0\}$, et la relation se prolonge en 0.

---

d) $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{x^2}{k^2}) = e^{\Phi(x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$.

C)

---

1. Au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \approx t^{x-1}$ qui est intégrable ssi $x > 0$, et pour tout $x > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^2 t^{x-1} e^{-t} = 0$. Donc au voisinage de $+\infty$, $t^{x-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$. Il en résulte que la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, pour tout $x > 0$.

---

2. a) Par une intégration par parties, dans

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt,$$

on aura: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

---

b) Comme $\Gamma(1) = 1$, alors $\Gamma(n) = (n-1)!$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

---

3. L'application $t \longmapsto f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. De plus pour tout $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| = \left|(\log t)^n f(x,t)\right| \leq \varphi(t)$, avec $\varphi(t) = |\log t|^n t^{a-1}$, pour $t \leq 1$ et $\varphi(t) = |\log t|^n t^{b-1} e^{-t}$, pour $t \geq 1$, qui est intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^n t^{x-1} e^{-t} dt$.

---

4. a) D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $0 < u < 1$, il existe $0 < c < u$ tel que $\log(1-u) = -\frac{u}{1-c} \leq -u$.

---

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \chi_n(t)(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}$, avec $\chi_n(t)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,n]$. La fonction f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie par: $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$. De plus $f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}$ qui est une fonction intégrable. Donc d'après le théorème de convergence dominée

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt, \quad \forall x > 0$$

---

c) Pour $n = 1$, $\int_0^1 (1-t)t^{x-1}dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$, donc la formule est vraie pour $n = 1$. On suppose la relation est vraie pour n. Par une intégration par partie $\int_0^1 (1-t)^{n+1}t^{x-1}dt = \frac{n+1}{x}\int_0^1 (1-t)^n t^x dt$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

---

d) Avec le changement de variable $t = nu$, $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}dt$. Donc

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}, \quad \forall x > 0.$$

---

5. Pour tout $x \in]0,1[$,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \frac{n^{1-x}n!}{\prod_{k=0}^n (k+1-x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1-\frac{x^2}{k^2})} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

---

6. a) $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$. donc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

---

b) On fait le changement de variable $x^2 = 2t$ dans l'intégrale, $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$, on aura: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}dt = \sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2\pi}$.

---

7. a) Par une intégration par partie dans l'intégrale définissant I_k, on aura: $I_{k+1} = (2k+1)I_k$.

b) $I_k = \frac{(2k)!}{k!2^k} I_0 = \frac{(2k)!}{k!2^k}\sqrt{2\pi}$.

Partie II :

A)

1. a) Soient $f, g \in E$, d'après l'"inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)g(x)|e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Donc la fonction $x \longmapsto f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) $E \neq \emptyset$ car il contient l'application nulle. De plus si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(f(x) + \lambda g(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + \lambda^2 g^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + 2\lambda f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. L'application $(f, g) \longmapsto \langle f, g\rangle$ définie sur $E \times E$ est une forme bilinéaire symétrique. Si $f \in E$, alors $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx \geq 0$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0 \iff f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \iff f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Donc $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

3. a) L'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\varphi(f) = f(0)$ est une forme linéaire non nulle, donc $\operatorname{Ker}\varphi = F$ est un hyperplan de E.
Toute fonction qui n'est pas dans F engendre un supplémentaire de F. Il suffit de prendre l'application constante 1.

b) i) Soit $f \in F^\perp$. L'application g définie par: $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}f(x)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $g(0) = 0$ et $g^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \leq f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Donc $g^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $g \in F$.

ii) On a $0 = \langle f, g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 f^2(x)}{1+x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, donc $xf(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Donc $F^\perp = \{0\}$.

iii) La décomposition $E = F \oplus F^\perp$ n'est plus valable car $F \neq E$ et $F^\perp = \emptyset$.

c) Soit ψ la forme linéaire sur E définie par $\psi(f) = f(0)$.

i) Supposons qu'il existe une fonction $g \in E$ telle que $\psi(f) = \langle f, g\rangle$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\psi(f_n) = \langle f_n, g\rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $1 = |f_n(0)|^2 \leq ||f_n||^2\ ||g||^2 = \dfrac{||g||^2}{\sqrt{1+4n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde.

---

ii) Soit $Q(X) = aX^2 + bX + c$ tel que $\psi(P) = \langle P, Q\rangle$, $\quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors pour $P = 1$, on aura: $a + c = 1$, pour $P(X) = X$, on aura: $b = 0$ et pour $P(X) = X^2$, on aura: $3a + c = 0$. Le polynôme Q est donné par: $Q(X) = \dfrac{-1}{2}X^2 + \dfrac{3}{2}$.

B) On considère la fonction h sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

---

1. a) $h'(x) = -xh(x)$. On suppose qu'il existe un polynôme P_n tel que $h^{(n)}(x) = P_n(x)h(x)$. Alors $h^{(n+1)}(x) = (P_n'(x) - xP_n(x))h(x)$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $h^{(n)}(x) = P_n(x)h(x)$ et la suite $(P_n)_n$ vérifie $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - XP_n(X)$.

---

b) $P_0 = 1$, $P_1 = -X$, $P_2 = X^2 - 1$ et $P_3 = -X^3 + 3X$.

---

c) Le degré de P_0 est 0. Si $\deg P_n = n$, alors comme $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - XP_n(X)$, donc $\deg P_{n+1} = n + 1$. Le coefficient de plus haut degré de P_0 est 1. On suppose que le coefficient de plus haut degré de P_n est $(-1)^n$, alors comme $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - XP_n(X)$, alors le coefficient de plus haut degré de P_{n+1} est $(-1)^{n+1}$.

le polynôme P_0 est pair. Si P_n a la même parité que n, alors P_n' a la même parité que $n + 1$. Comme $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - XP_n(X)$, alors P_{n+1} a la même parité que $n + 1$.

---

2. a) $h^{(n+2)} = (P_n''(x) - 2xP_n'(x) + (x^2 - 1)P_n(x))h(x)$. D'autre part:

$$\begin{aligned} h^{(n+2)}(x) &= (-xh(x))^{(n+1)} = -(xh^{(n+1)} + (n+1)h^{(n)}) = -(xP_{n+1}(x)h(x) + (n+1)P_n(x)h(x)) \\ &= -(x(-xP_n(x) + P_n'(x)) - (n+1)P_n(x))h(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $P_n''(x) - 2xP_n'(x) + (x^2 - 1)P_n(x) = x^2P_n - xP_n'(x) - (n+1)P_n(x)$. Donc $P_n''(x) - xP_n'(x) + nP_n(x) = 0$

---

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$P_n'(x) = (P_{n-1}'(x) - xP_{n-1}(x))' = P_{n-1}''(x) - xP_{n-1}'(x) - P_{n-1}(x) = -nP_{n-1}$.

---

3. Soit $N \geq 2$ un entier naturel. On considère l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^N\}$. Soit $\psi \colon \mathbb{R}_N[X] \longrightarrow \mathbb{R}_N[X]$ définie par: $\psi(P) = P'' - XP'$.

a) ψ est linéaire et si $P \in \mathbb{R}_N[X]$, alors $\deg(P'' - XP') \leq N$, donc ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.

---

b) La matrice de ψ dans $\mathcal{B}$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & k(k-1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & N(N-1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -N \end{pmatrix}.$$

---

c) Les valeurs propres de ψ sont $\{-k;\ 0 \leq k \leq N\}$ et elles sont simples. Donc ψ est diagonalisable.

---

d)

$$\begin{aligned} \langle \psi(P), Q \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(P)(x) Q(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (P'(x) e^{-\frac{x^2}{2}})' Q(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) Q'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) (Q'(x) e^{-\frac{x^2}{2}})' dx = \langle P, \psi(Q) \rangle \end{aligned}$$

---

e) On a $\psi(H_k) = H_k'' - XH_k' = -kH_k$. Donc H_k est un vecteur propre de ψ associé à la valeur propre $-k$, pour tout $0 \leq k \leq N$. Comme ψ est un endomorphisme auto-adjoint, alors les sous-espaces propres sont orthogonaux et par suite la famille $\{H_0, H_1, \dots, H_N\}$ est orthogonale.

---

4. a)

$$\begin{aligned} ||H_k||^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_k^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(x) h^{(k)}(x) dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_k'(x) h^{(k-1)}(x) dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k-1}^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = k||H_{k-1}||^2. \end{aligned}$$

b) Comme $||H_0|| = 1$, alors $||H_k|| = \sqrt{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

c) $\{H_0, H_1, \frac{H_2}{2!}, \ldots, \frac{H_N}{N!}\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}_N[X]$.

5. a) La projection orthogonale du polynôme X^{N+1} sur le sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\langle X^{N+1}, H_k\rangle}{k!} H_k$.

Donc $X^{N+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\langle X^{N+1}, H_k\rangle}{k!} H_k$ est orthogonal à $\{H_0, H_1, \ldots, H_N\}$. Donc il existe une constante α telle que $X^{N+1} = \alpha H_{k+1}$. Comme X^{N+1} et H_{N+1} sont unitaires, alors $\alpha = 1$.

Autre méthode:

$\{H_0, H_1, \ldots, H_{N+1}\}$ est une base de $\mathbb{R}_{N+1}[X]$, donc il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que

$$X^{N+1} = \sum_{j=0}^{N+1} \alpha_j H_j.$$

On a: $\langle X^{N+1}, H_j\rangle = \alpha_j ||H_j||^2 = \alpha_j j!$, donc $\alpha_j = \dfrac{\langle X^{N+1}, H_j\rangle}{j!}$. Donc

$$X^{N+1} = \sum_{j=0}^{N+1} \frac{\langle X^{N+1}, H_j\rangle}{j!} H_j.$$

Comme X^{N+1} et H_{N+1} sont unitaires, alors $\alpha_{N+1} = 1$. D'où

$$H_{N+1} = X^{N+1} - \sum_{k=0}^{N} \frac{\langle X^{N+1}, H_k\rangle}{k!} H_k.$$

b) La projection orthogonale du polynôme X^{N+1} sur le sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$ est $R_N(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\langle X^{N+1}, H_k\rangle}{k!} H_k$. Donc

$$\underset{P \in \mathbb{R}_N[X]}{Inf} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^{N+1} - P(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}||X^{N+1} - R_N(X)||^2 = \sqrt{2\pi}||H_{N+1}||^2 = \sqrt{2\pi}(N+1)!$$

6. *On suppose que n est pair.*

a) Soit $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$ de rayon de convergence $R > 0$. y est solution de l'équation différentielle (E_n) ssi $a_{2k+3} = \frac{(2k+1)-n}{(2k+3)(2k+2)} a_{2k+1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

---

b) Comme n est pair, alors $a_{2k+1} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $R = +\infty$.

---

c) Si f_n la solution donnée par la série entière précédente. f_n est impaire et H_n est une solution paire. Donc (f_n, H_n) est une base de solutions de (E_n).