Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2013
Concours Physique et Chimie, et Technologie
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

problème 1
Partie I

Pour $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,avec $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ on a $AB=(c_{ij})$,et $BA=(d_{ij})$ avec $\forall i,j \in \{1..n\}$, $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ et $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$.Ainsi $Tr(AB)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n} d_{kk}=Tr(BA)$.

$Tr(^tA)=Tr(A)$ car $^tA=(a_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$, donc A et ^tA ont la mÃªme diagonale.

Si A et B sont semblables alors il existe Pdans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$tq $A=P^{-1}BP$, donc $Tr(A)$ $Tr(P^{-1}BP)=Tr(P(P^{-1}B))$ d'après 1) .D'où $Tr(A)=Tr(I_n.B)=Tr(B)$.

(a) On a bien $\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda A+B)=Tr(\lambda A+B)=\lambda Tr(A)+Tr(B)$ .Donc f est une application linéaire à termes dans $\mathbb{R}$, c'est donc une forme linéaire.

(b) f est une forme linéaire , de plus f est non nulle car $f(I_n)=n\neq 0$. Donc $dim(Im(f))=1$, par suite $dim(\mathcal{F})=dim(Ker(f))=dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))-1=n^2-1$.

(a) Soit $A\in\mathcal{F}\cap\mathcal{H}$; donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tq $A=\lambda.I_n$ et $A\in\mathcal{F}=Ker(f)$ donc $Tr(A)=0=\lambda Tr(I_n)=\lambda.n$, d'où$\lambda=0$ et par suite $A=0$ i.e $\mathcal{F}\cap\mathcal{H}=\{0\}$.

(b) $\mathcal{H}$ est une droite vectorielle donc de dimension 1, donc $dim(\mathcal{F})+dim(\mathcal{H})=n^2-1+1=n^2=dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, d'où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{F}\oplus\mathcal{H}$.

(c) Il existe $M\in\mathcal{F}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tq $A=M+\lambda.I_n$, donc $Tr(A)=Tr(M)+\lambda.n=0+n\lambda$,par suite $\lambda=\frac{Tr(A)}{n}$ et $M=A-\frac{Tr(A)}{n}.I_n$.

Partie II : Une norme matricielle

A.Quelques propriétés

On a $<A,\lambda.B+B'>=Tr(^tA.(\lambda.B+B'))=Tr(\lambda(^tA.B)+^tA.B'))=\lambda<A,B>+<A,B'>$ car Tr est linéaire.De plus , on a $<B,A>=Tr(^tBA)=Tr(^t(^tBA))=Tr(^tA^t(^tB))=Tr(^tAB)=<A,B>$ .Ainsi , $<.,.>$ est symétrique et bilinéaire . D'autre part , si $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on a $<A,A>=Tr(^tA.A)$ .Les coefficients de $^tA.A$ sont $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$, donc $<A,A>=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ki})^2$. Ceci donne : $<A,A>\geqslant 0$ et $<A,A>=0$ ssi $\forall k,i\in\{1...n\}$, $a_{ki}=0$ ssi $A=0$.
Finalement ,$<.,.>$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{O}$ une matrice orthogonale i.e $^t\mathcal{O}.\mathcal{O}=I_n$. Pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\| A\mathcal{O}\|_s^2=<A\mathcal{O},A\mathcal{O}>=Tr(^t(A\mathcal{O}).(A\mathcal{O}))=Tr(^t\mathcal{O}.^tA.A.\mathcal{O})$ .Or $^t\mathcal{O}=\mathcal{O}^{-1}$, donc $\| A\mathcal{O}\|_s^2=Tr(\mathcal{O}^{-1}.(^tAA).\mathcal{O})=Tr(^tAA)$ d'après I/2.D'où $\| A\mathcal{O}\|_s^2=\| A\|_s$. D'autre part , $\|\mathcal{O}A\|_s=<\mathcal{O}A,\mathcal{O}A>=Tr(^t(\mathcal{O}A).(\mathcal{O}A))=Tr(^tA.^t\mathcal{O}\mathcal{O}.A)=Tr(^tA.I_n.A)=Tr(^tAA)=\| A\|_s$.

(a) Pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $^t(A+^tA)=^tA+^t(^tA)=^tA+A=A+^tA$, donc $(A+^tA)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

5) D'abord , si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tA = A = -A$ donc $A = 0$. D'autre ... que ${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA)$, ce qui donne $(A - \ldots$ suite , pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $A = A_1 + A_2$ avec $A_1 = \frac{1}{2}(A \ldots$ $A_2 = \frac{1}{2}(A - {}^tA) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que la somme est orthogonale, çàd $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Si $A_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \ldots$, alors $< A_1, A_2 >= Tr({}^tA_1.A_2) = Tr(A_1.A_2)$ et $< A_2, A_1 >= Tr({}^tA_2.A_1) = \ldots$ $-Tr(A_2.A_1) = -Tr(A_1.A_2) = - < A_1, A_2 >$ .Or $< A_2, A_1 >=< A_1, A_2 > \ldots$ $< A_1, A_2 >= - < A_1, A_2 > \Rightarrow < A_1, A_2 >= 0$.

On sait que si $p(A)$ est le projeté orthogonal de A sur F ,alors $\| A - p(A) \|_s = \min\limits_{M \in F} \| A - M \|_s = d(A, F)$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,$A = A_1 + A_2$ avec $A_1 = \frac{1}{2}(A + {}^tA) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A_2 = \frac{1}{2}(A - {}^tA) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. De plus $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi , si p_1 est la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $p_1(A) = A_1 = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, donc d'après 4. $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \| A - p_1(A) \|_s = \| A - A_1 \|_s = \| A_2 \|_s = \frac{1}{2} \| A - {}^tA \|_s$

De même , d'après ce qui précède , $p_2(A) = A_2$, où p_2 est la projection orthogonale sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ Donc $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \| A - p_2(A) \|_s = \| A - A_2 \|_s = \| A_1 \|_s = \frac{1}{2} \| A + {}^tA \|_s$.

B.Étude d'un exemple

D'après ce qui précède et d'après l'expression de $\| A \|_s$ dans A.1., on a : $d(A, \mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2} \| A + {}^tA \|_s$

$$\ldots \|_s = \| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \|_s = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et } d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2} \| A - {}^tA \|_s = \| \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \|_s = \sqrt{10}.$$

a) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$ et $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

On remarque que : $\mathrm{J}.v_1 = 0$, $\mathrm{J}.v_2 = 0$ et $\mathrm{J}.v_3 = 3v_3$. Ainsi v_1 et v_2 sont des vecteurs propres associés à 0 et v_3 est un vecteur propre associé à 3.Comme (v_1, v_2) est libre, alors les sous-espaces propres de J sont :

$E_1 = Ker(\mathrm{J}) = Vect(v_1, v_2)$ de dimension 2 et $E_2 = Ker(\mathrm{J} - 3.I_3) = Vect(v_3)$de dimension 1 .

Remarquons que $v_1 \perp v_3$ et $v_2 \perp v_3$, donc $Ker(\mathrm{J})$ et $Ker(\mathrm{J} - 3.I_3)$ sont orthogonaux.

b) (v_1, v_2, v_3) est libre , c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de J , on peut donc conclure que J est diagonalisable.

c) On a $(v_1/u_2) = (v_1/v_1) + \alpha(v_1/v_2) = 2 + \alpha = 0$,donc $\alpha = -2$. Ainsi $u_2 = -e_1 - e_2 + 2e_3$.

d) Posons $\epsilon_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{2}}$, $\epsilon_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{u_2}{\sqrt{6}}$ et $\epsilon_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{v_3}{\sqrt{3}}$. On a :

$v_1 \perp v_3$ et $v_2 \perp v_3$, donc $u_2 \perp v_3$, par suite $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ sont 2 à 2 orthogonaux et en plus unitaires.D'où une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de J ,puisque : $\mathrm{J}.\epsilon_1 = 0$, $\mathrm{J}.\epsilon_2 = 0$(car $u_2 \in Ker(\mathrm{J})$), et $\mathrm{J}.\epsilon_3 = 3\epsilon_3$.

e) Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$.

P est orthogonale car $\mathcal{B}'$ est orthonormée . On a alors : $P^{-1}\mathrm{J}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \Delta$.

$\ldots {}^tAA = \ldots = I_3 + 5.\mathrm{J}$, donc $P^{-1}MP = P^{-1}I_3P + 5.P^{-1}\mathrm{J}P = I_3 + 5.\Delta =$

$$\begin{pmatrix} \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & 0 & 16 \end{pmatrix} \ldots D^2, \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\|_s = \| P^{-1}MP \|_s = \| P^{-1}M \|_s = \| M \|_s$ d'apres A.2 car P et P^{-1} sont orthogonales.

Problème 2

PARTIE I

$\gamma_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1}) = O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\gamma_{n+1} - \gamma_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge alors la série télescopique $\sum(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ converge. D'où la suite (γ_n) est convergente. On note $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(\Gamma_n(x)) &= x\ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k) \\
&= -\ln(x) + x\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - \ln(1 + \frac{x}{k})\right) \\
&= -\ln(x) - \gamma_n x + \sum_{k=1}^{n} g_k(x),
\end{aligned}$$

où $g_k(x) = \frac{x}{k} - \ln(1 + \frac{x}{k})$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. $g_n(x) = \frac{x}{n} - \ln(1 + \frac{x}{n}) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Alors $\sum g_n(x)$ converge $\forall x \in]0, +\infty[$. D'où $\sum g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

On note $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x), \ \forall x \in]0, +\infty[$.

On a $\forall n \geq 1$, g_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\sum g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
Soit $a > 0$ et $x \in]0, a]$. $|g_n'(x)| = \frac{x}{n(n+x)} \leq \frac{a}{n^2}$.
Alors $\sum g_n'$ converge uniformément sur $]0, a]$, ceci $\forall a > 0$. D'où G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}, \ \forall x \in]0, +\infty[$.

Comme $\sum g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, alors la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^{n} g_k(x))$ converge, et par suite $(\ln(\Gamma_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Ainsi la suite $(\Gamma_n(x))$ converge, $\forall x \in]0, +\infty[$.
Par conséquent, $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
On note $H(x) = \lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x)$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

$H(1) = \lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nn!}{(n+1)!} = 1.$

$H(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x + G(x)}$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

G étant de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, alors H est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$\Gamma_n(x+1) = \frac{nx}{x+n+1}\Gamma_n(x)$ pour tous $x \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\forall x \in]0, +\infty[$, $H(x+1) = xH(x)$.

Par récurrence, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n+1) = n!$

$\lim_{x\to 0^+} xH(x) = \lim_{x\to 0^+} H(x+1) = H(1) = 1$. D'où $H(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+.

PARTIE II

A. Relation entre les fonctions Gamma et Zêta

(a) En 0, $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$, alors $t \mapsto f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x \in]0,+\infty[$

En $+\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(x,t) = 0$, alors $t \mapsto f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

(b) $\Gamma(2) = 1$.

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$, $\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

(a) On a $\varphi_0 \in \mathcal{CM}(]0,+\infty[,\mathbb{R}_+)$ et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit $k \in \{1,2\}$. $\varphi_k \in \mathcal{CM}(]0,+\infty[,\mathbb{R}_+)$. Soit α tel que $1-a < \alpha < 1$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha \varphi_k(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \varphi_k(t) = 0$, alors φ_k est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(b) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $k \in \{0,1,2\}$ et $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$. On a $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$. Comme $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existe et continue sur $(]0,+\infty[)^2$ et que $|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi_k(t)$, alors Γ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $\forall k \in \{0,1,2\}$, $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(c) Soit $x \in]0,+\infty[$. On a $(\ln(\Gamma))''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x)-(\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}$. Or $(\Gamma'(x))^2 = (\int_0^{+\infty}(\ln t)\, t^{x-1}e^{-t}dt)^2 = (\int_0^{+\infty}(\ln t)\, t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}dt)^2$, alors on déduit à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $(\Gamma'(x))^2 \leq (\int_0^{+\infty}(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt)(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt) - \Gamma''(x)\Gamma(x)$. Ainsi, $\ln(\Gamma)$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

(a) La fonction $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

En 0, $\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1} \sim t^{\alpha-2}$, alors $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

En $+\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1} = 0$, alors $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. D'où $\forall \alpha > 1$, I_α existe.

(b) i. On a :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}dt.$$

Posons, pour $t \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} t^{\alpha-1}e^{-kt}$. On a :

$|S_n(t)| = |t^{\alpha-1}\frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}}e^{-t}| = |t^{\alpha-1}\frac{1-e^{-nt}}{e^t-1}| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1} = \varphi(t)$.

Or φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = \varphi(t)$. φ étant continue sur $]0,+\infty[$ et S_n l'est aussi, alors d'aprés le théorème de convergence dominée, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_n(t)dt = \int_0^{+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t)dt$. Ou encore, $I_\alpha = \int_0^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-nt}dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-nt}dt$

ii. Posons $u = nt$ dans $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-nt}dt$, on obtient $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-nt}dt = \int_0^{+\infty} (\frac{u}{n})^{\alpha-1}\frac{e^{-u}}{n}du = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$.

iii. Comme $I_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-nt}dt$, on déduit que $I_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha} = \Gamma(\alpha).\zeta(\alpha)$.

Soit g la fonction réelle 2π-périodique définie par : $g(x) = x^2 - \pi^2$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

(a) On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(g) = 0$ et $a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos(nx)dx$. Alors $a_0(g) = -\frac{4}{3}\pi^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(g) = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$.

(b) g étant continue, 2π-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors d'aprés le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g converge normalement sur $\mathbb{R}$ et admet pour somme la fonction g. D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\cos(nx) = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

(c) $g(\pi) = 0 = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. D'où, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2)$. Ainsi, $I_2 = \Gamma(2)\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

B. Convergence simple de $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Γ

Soit B la fonction définie par : $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

(a) On a : $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim t^{x-1}$ quand $t \to 0$, d'où $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$ si et seulement si $x > 0$.
$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim (1-t)^{y-1}$ quand $t \to 1$, d'où $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$ si et seulement si $y > 0$. Ainsi, B est bien définie sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

(b) Soit $x, y \in]0,+\infty[$ et $[a,b] \subset]0,1[$. Posons $u = 1-t$.
$\int_a^b t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_{1-b}^{1-a} u^{y-1}(1-u)^{x-1}dt$. quand $a \to 0$ et $b \to 1$, on obtient $B(x,y) = B(y,x)$.

(c) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,+\infty[$. $B(x,n+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n dt$. Soit $a > 0$. En faisant une intégration par parties, on obtient $\int_a^1 t^{x-1}(1-t)^n dt = -\frac{a^x(1-a)^n}{x} + \frac{n}{x}\int_a^1 t^x(1-t)^{n-1}dt$. Ceci prouve que $B(x,n+1) = \frac{n}{x}B(x+1,n)$.

ii. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, en faisant une intégration par parties, on obtient $B(x,2) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)dt = \frac{1!}{x(x+1)}$.
Supposons que $\forall x \in]0,+\infty[$, $B(x,n+1) = \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$.
$B(x,n+2) = \frac{n+1}{x}B(x+1,n+1) = \frac{n+1}{x}\frac{n!}{(x+1)...(x+1+n)} = \frac{(n+1)!}{x(x+1)...(x+n+1)}$.
D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $B(x,n+1) = \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

(d) i. Soit $x, y \in]0,+\infty[$ et $[a,b] \subset]0,1[$. Posons $t = (\sin\theta)^2 = \varphi(\theta)$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
$\int_a^b t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = 2\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta$.
Lorsque $a \to 0$ et $b \to 1$, on obtient $B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta$.

ii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+1}d\theta = \frac{1}{2}B(n+1,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}B(\frac{1}{2},n+1) = \frac{1}{2}\frac{n!}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)...(\frac{1}{2}+n)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

fait que $\ln(1+u)$ est concave sur $]-1,+\infty[$.

(b) On a, si $t \in [0,n[$, $f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n \leq e^{n(-\frac{t}{n})} = e^{-t}$ et si $t \geq n$, $f_n(t) = 0$.
D'où $f_n(t) \leq e^{-t}$, $\forall t \in [0,+\infty[$.

(c) Soit $t \in [0,+\infty[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t}{n} = 0$. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{t}{n} \leq 1$. Ceci implique que $\forall n \geq n_0$, $f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}$.

(d) On a $\displaystyle\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)t^{x-1}dt$. Soit $x \in]0,+\infty[$. On a $t \mapsto t^{x-1}f_n(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $t \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} t^{x-1}f_n(t) = e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Comme $|t^{x-1}f_n(t)| \leq e^{-t}t^{x-1}$ et que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on déduit à l'aide du théorème de convergence dominée que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} t^{x-1}f_n(t)dt = \Gamma(x)$.

(e) Soit $x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_a^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = n^x \int_{\frac{a}{n}}^1 (1-u)^n u^{x-1}du$.
En faisant tendre a vers 0, on obtient d'aprés 1)c)ii)
$\displaystyle\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du = n^x B(x,n+1) = \frac{n^x\, n!}{x(x+1)...(x+n)} = \Gamma_n(x)$.
D'où, $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Gamma_n(x) = H(x)$.

3. (a) D'aprés la partie I, on a : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln(\Gamma(x)) = \ln(H(x)) = -\ln(x) - \gamma x + G(x)$.
D'où, d'aprés I)2)c), on a $\displaystyle\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

(b) $\Gamma'(1) = -\gamma$, car $\Gamma(1) = 1$. D'autre part, comme $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+x)^2}$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$, alors en dérivant on obtient, $\forall x \in]0,+\infty[$,
$\displaystyle\frac{\Gamma''(x)\,\Gamma(x)-(\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$.
On déduit que $\displaystyle\Gamma''(1) - \gamma^2 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.