REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2013

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2013

Concours Technologie /PC
Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 3 Juin 2013	**Heure :** 8 H	**Durée:** 4 heures	**Nb pages:** 5
Barème:			

e grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la sentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

st rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même n'a pu être démontré.

Problème 1

ns tout le problème :

- n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
- I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- ${}^tA$ est la matrice transposée de A.
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.
- On rappelle que la trace d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est : $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Partie I
Trace d'une matrice

1. Montrer que, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a:
   (a) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$,
   (b) $Tr(AB) = Tr(BA)$,
   (c) $Tr({}^tA) = Tr(A)$.
2. Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $Tr(A) = Tr(B)$.
3. (a) Vérifier que l'application $f : A \longmapsto Tr(A)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{F} = Ker(f)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathbb{R}.I_n = \{\lambda.I_n ; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(a) Montrer que la somme $\mathcal{F} + \mathcal{H}$ est directe.

(b) En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Décomposer A en somme d'un élément de $\mathcal{F}$ et d'un élément de $\mathcal{H}$.

Partie II
Une norme matricielle

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. On pose $< A, B >= Tr({}^tAB)$.

A. Norme de Schur $\| \cdot \|_s$ et distance associée

1. Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite , on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de ce produit scalaire et on note $\| \cdot \|_s$ la norme qui lui est associée. ($\| A \|_s = \sqrt{< A, A >}$), appelée norme de Schur.

2. Soit $\mathcal{O}$ une matrice orthogonale. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a:

$$\| A\mathcal{O} \|_s = \| \mathcal{O}A \|_s = \| A \|_s$$

On pose

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } {}^tA = A\}$$

et

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } {}^tA = -A\}.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A + {}^tA) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que cette somme directe est orthogonale.

4. Soit F un sous espace vectoiel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $d(A, F) = \inf\limits_{M \in F} \| A - M \|_s$.
Quelle est l'unique matrice $p(A) \in F$, telle que $d(A, F) = \| A - p(A) \|_s$.

5. En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{2} \| A - {}^tA \|_s$.

6. Déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

B. Étude d'un exemple

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base et de son produit scalaire canoniques.
On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \quad M = {}^tAA.$$

1. Calculer $d(A, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ et $d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$.

2. (a) Montrer que J admet deux sous-espaces propres E_1 et E_2 orthogonaux, avec $dim(E_2) = 1$.
   (b) Donner une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs propres de J , avec $v_3 \in E_2$.
   (c) On pose : $u_2 = v_1 + \alpha.v_2$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que v_1 et u_2 soient orthogonaux.
   (d) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de J.
   (e) Déterminer alors une matrice orthogonale P et une matrice diagonale Δ telles que :

$$\Delta = P^{-1} \mathrm{J} P.$$

3. Exprimer M à l'aide de J.

4. En déduire qu'il existe une matrice diagonale D à termes tous positifs telle que

$$D^2 = P^{-1} M P.$$

5. Comparer $\| M \|_s$ et $\| D^2 \|_s$.

Problème 2

Soit la fonction Γ (Gamma) d'Euler définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose:

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x\, n!}{x(x+1)...(x+n)}.$$

L'objet de ce problème est de donner quelques propriétés de la fonction Γ et d'établir la formule de Gauss suivante:

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \Gamma_n(x).$$

Partie I
Convergence simple de la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Soit $\gamma_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \mathrm{O}\,(\frac{1}{n^2})$.
   (b) En déduire que la suite (γ_n) est convergente. On note $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \gamma_n$.

2. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, on a:

$$\ln(\Gamma_n(x)) = -\ln(x) - \gamma_n\, x + \sum_{k=1}^{n} g_k(x),$$

où $g_k(x) = \frac{x}{k} - \ln(1 + \frac{x}{k}),\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $\sum g_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On note $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$, $\forall x \in]0,+\infty[$.

(c) Montrer que G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

(d) Prouver que la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On note $H(x) = \lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x)$, $\forall x \in]0,+\infty[$.

3. (a) Justifier que $H(1) = 1$.

(b) Exprimer la fonction H à l'aide de G.

(c) En déduire que H est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

4. (a) Donner une relation entre $\Gamma_n(x+1)$ et $\Gamma_n(x)$ pour tous $x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Etablir que $\forall x \in]0,+\infty[$, $H(x+1) = xH(x)$.

(c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n+1) = n!$

(d) Montrer que l'on a $H(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+.

Partie II

A. Relation entre les fonctions Gamma et Zêta

1. (a) Montrer que la fonction : $t \mapsto f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $x \in]0,+\infty[$.

(b) Calculer $\Gamma(2)$.

(c) Déterminer les expressions de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

2. (a) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$ et $k \in \{0,1,2\}$.

Considérons φ_k la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} (-\ln t)^k\, t^{a-1} & \text{si } t \in]0,1] \\ (\ln t)^k\, t^{b-1}\, e^{-t} & \text{si } t \in]1,+\infty[. \end{cases}$$

Montrer que φ_k est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(b) En déduire que Γ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $\forall k \in \{0,1,2\}$, $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}dt.$$

3. On rappelle que la fonction ζ (Zêta) de Riemann est définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Pour $\alpha > 1$, on pose

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1}dt.$$

(a) Montrer que: $\forall\, \alpha > 1$, I_α existe.

(b) i. Prouver que $\forall\, \alpha > 1$,

$$I_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-nt} dt.$$

ii. Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-nt} dt$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.

iii. En déduire que $I_\alpha = \Gamma(\alpha).\zeta(\alpha)$,$\forall\, \alpha > 1$.

4. Soit g la fonction réelle 2π-périodique définie par: $g(x) = x^2 - \pi^2$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques $a_n(g)$ et $b_n(g)$ de g.
(On rappelle que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(g) = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx$ et $b_n(g) = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)dx$)

(b) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -\dfrac{2}{3}\pi^2 + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

(c) En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et I_2.

B. Convergence simple de $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Γ

1. Soit B la fonction définie par: $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

(a) Montrer que B est bien définie sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

(b) Montrer que, $\forall x, y \in]0,+\infty[$, $B(x,y) = B(y,x)$.

(c) i. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $B(x, n+1) = \dfrac{n}{x} B(x+1, n)$.

ii. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $B(x, n+1) = \dfrac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

(d) i. Prouver que: $\forall x, y \in]0,+\infty[$, $B(x,y) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1} d\theta$.

ii. En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+1} d\theta = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, la fonction définie par:

$$f_n(t) = \begin{cases} (1-\frac{t}{n})^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t \geqslant n. \end{cases}$$

(a) Etablir que: $\ln(1+u) \leqslant u$, $\forall u \in]-1,+\infty[$.

(b) En déduire que: $f_n(t) \leqslant e^{-t}$, $\forall t \in [0,+\infty[$.

(c) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t}$.

(d) Montrer que: $\forall x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt = \Gamma(x)$.

(e) Déduire de ce qui précède que $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x) = H(x)$.

3. (a) Prouver que: $\forall x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

(b) En déduire que: $\Gamma'(1) = -\gamma$ et $\Gamma''(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$.