



Concours Physique et Chimie  
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 06 Juin 2013      Heure : 8 H      Durée : 4 H      Nbre pages : 08  
Barème :      Problème I : 10 pts      Problème II : 10 pts

*L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.*

*On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier d'indiquer avec précision les références des questions.*

*Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.*

*L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants*

Problème I  
ÉCOULEMENT DE POISEUILLE PLAN

Le problème concerne l'étude de l'écoulement de Poiseuille plan d'un liquide et ses applications dans l'industrie.

Dans cette étude l'action du champ de la pesanteur sera négligée et l'espace sera rapporté au référentiel galiléen  $\mathcal{R}(Oxyz)$  de base orthonormée directe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

Donnée : théorème du gradient :  $\oint_S f \, d\vec{S} = \iiint_V \text{grad} f \, d\tau$  avec  $S$  la surface qui délimite le volume  $V$ .

I- Loi de Hagen-Poiseuille

On considère l'écoulement d'un liquide confiné entre deux plaques, rigides, horizontales, parallèles au plan  $(xOz)$ , séparées d'une distance  $h$  et fixes dans  $\mathcal{R}$  (Figure-1-).

Soit  $L$  la longueur des plaques selon  $(Ox)$  et soit  $\ell$  leur largeur selon  $(Oz)$ . On suppose  $L \gg h$  et  $\ell \gg h$ .

Une pompe située en amont ( $x = 0$ ) crée un gradient

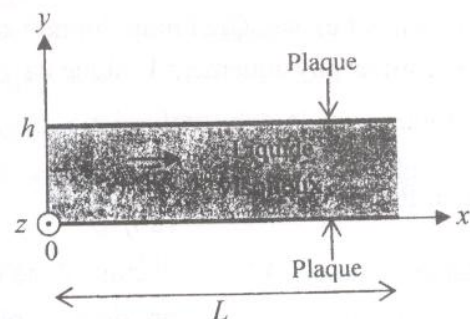


Figure-1-

horizontal de pression et réalise ainsi un écoulement laminaire, unidirectionnel, incompressible et stationnaire dont le champ de vitesse s'écrit :  $\vec{v}(M,t) = v(y) \vec{u}_x$ . On note  $p_0$  la pression au niveau du plan  $x = 0$  et  $p_0 - \Delta p$  la pression au niveau du plan  $x = L$ ,  $\Delta p$  est appelée perte de charge.

Le sens de l'écoulement du liquide est indiqué sur la figure 1.

Le liquide considéré est un fluide visqueux, homogène et newtonien. On note  $\rho$  sa masse volumique et  $\eta$  sa viscosité dynamique.

1- Décrire brièvement l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux.

2- Justifier que le champ de vitesse ne dépend que de la coordonnée  $y$ .

3- Soit un volume  $V$  du fluide limité par la surface fermée  $S_f$ . Donner l'expression de la force de pression que subit un élément de surface  $dS_f$ . En déduire la force volumique de pression.

4- Soit un fluide newtonien en écoulement unidirectionnel et permanent tel que le champ de vitesse s'écrit  $\vec{v}(M) = v(y) \vec{u}_x$ . La force de viscosité exercée, par la couche inférieure sur la couche

supérieure, à travers une surface  $S$  située dans le plan  $y = y_0$  est  $\vec{F}_{vis} = -\eta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y_0} S \vec{u}_x$ . Dans le

cas où  $\frac{\partial v}{\partial y} > 0$ , représenter sur un schéma les différentes forces de viscosité qui s'exercent sur une particule parallélépipédique du fluide de cotés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  située entre les plan d'altitudes  $y$  et  $y + dy$ . En déduire l'expression de la force volumique de viscosité.

5-1) On rappelle l'équation de Navier Stokes :  $\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v - \overrightarrow{grad} p + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v}$ ,

où  $\overrightarrow{\Delta}$  est le laplacien vectoriel. Que représente cette équation ? Interpréter chacun de ses termes.

5-2) Réécrire l'équation de Navier-Stokes dans les conditions de l'écoulement considéré.

6-1) Montrer que la composante selon  $\vec{u}_x$  du gradient de pression est une constante qu'on exprimera en fonction de  $\Delta p$  et  $L$ . En déduire l'expression du champ de vitesse. On fera apparaître deux constantes.

6-2) En précisant les conditions aux limites imposées par les plaques en  $y = 0$  et  $y = h$ , déterminer l'expression du champ de vitesse.

6-3) Montrer qu'il est nécessaire d'imposer un gradient de pression suivant  $(Ox)$  pour que l'écoulement existe. Quel nom donne-t-on à ce type d'écoulement ?

6-4) Justifier physiquement le signe de  $\Delta p$  et tracer le profil de la vitesse.

7- Montrer que le débit volumique  $D_{v0}$  à travers une section orthogonale  $x = C^{te}$  obéit à la loi de

$$\text{Hagen-Poiseuille : } D_{v0} = \frac{h^3 \ell}{12 \eta L} \Delta p.$$

8- Déterminer la vitesse moyenne  $\bar{v}$  de l'écoulement.

9- On rappelle que le nombre de Reynolds  $R_e$  est défini comme le rapport du terme convectif et du terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes. En déduire que  $R_e = \frac{\rho \bar{v} h}{\eta}$  dans le cas de l'écoulement étudié.



## II- Moulage des liquides visqueux

Le remplissage des moules par un fluide visqueux intervient dans de nombreux procédés de fabrication industriels (agroalimentaire, l'industrie verrière, ...). On se propose d'évaluer la perte de charge  $\Delta p$  nécessaire au remplissage d'un moule par du verre fondu considéré comme un liquide visqueux newtonien. Les deux plaques fixes représentent maintenant les parois du moule.

On donne  $h = 0,25 \text{ cm}$  ;  $L = 10 \text{ cm}$  et pour le verre fondu on a  $\eta = 200 \text{ Pa.s}$  et  $\rho = 1400 \text{ kg.m}^{-3}$ .

10- Exprimer la perte de charge  $\Delta p$  en fonction de  $\eta$ ,  $h$ ,  $L$  et  $\tau$  la durée de remplissage du moule. Calculer la perte de charge  $\Delta p$  nécessaire pour remplir le moule en  $0,08 \text{ s}$ .

11- En déduire la valeur du nombre de Reynolds  $R_e$  de cet écoulement. Commenter.

12- En industrie, on prévoit une valeur de  $\Delta p$  supérieure à celle calculée car au cours de la phase de remplissage le liquide au contact de la paroi du moule se refroidit et crée une zone solidifiée appelée gaine solide (Figure-2-). En réalité, l'écoulement s'effectue dans une zone de hauteur réduite  $\tilde{h}$ . On note  $e$  l'épaisseur de la gaine solide et on suppose qu'elle est présente sur toute la longueur du moule. L'épaisseur de la gaine solide est fonction de la durée de remplissage du moule  $\tau$  tel que  $e = \sqrt{a \tau}$  où  $a$  est une constante caractéristique du liquide.

Exprimer  $\Delta p$  en fonction de  $\eta$ ,  $h$ ,  $L$ ,  $\tau$  et  $a$ . Calculer la perte de charge  $\Delta p$  pour remplir le moule en  $0,08 \text{ s}$ . On donne pour le verre fondu  $a = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

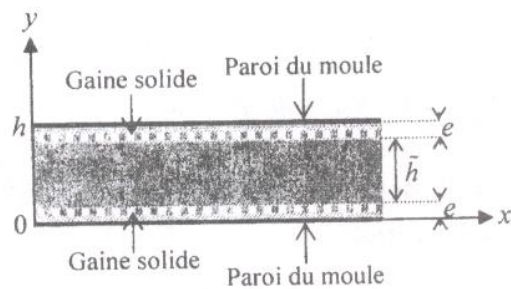


Figure-2-

## III- Régulation de débit

13- Rappeler l'analogie hydraulique de l'intensité du courant électrique et de la différence de potentiel électrique.

14- En utilisant la loi de Hagen-Poiseuille, donner l'expression de la résistance hydraulique  $R_H$ , analogue à la résistance électrique, pour la géométrie de l'écoulement étudié.

15- En hydraulique et dans l'industrie agroalimentaire on règle le débit en pratiquant une ouverture de longueur  $d$  dans la plaque supérieure du dispositif précédent (Figure-3-). Cette ouverture permet à une pièce d'étranglement de coulisser selon (Oy) et d'entraîner un rétrécissement ajustable du dispositif. Soit  $\varepsilon$  le débordement de la pièce d'étranglement de la plaque supérieure.

On admet que chaque partie du dispositif, rétrécie ou non, obéit à la loi de Hagen-Poiseuille.

15-1) Déterminer la résistance hydraulique équivalente du dispositif de la figure 3.

15-2) En déduire le débit volumique  $D_{V\varepsilon}$  du dispositif en fonction de  $\Delta p$ ,  $\eta$ ,  $L$ ,  $\ell$ ,  $h$ ,  $\varepsilon$  et  $d$ .

15-3) Sachant que  $\varepsilon \ll h$  montrer qu'au premier ordre en  $\varepsilon$ , le débit volumique s'écrit :

$D_{V\varepsilon} = D_{V0} (1 - \alpha \varepsilon)$  où  $\alpha$  est une constante positive à exprimer en fonction de  $L$ ,  $h$  et  $d$ .

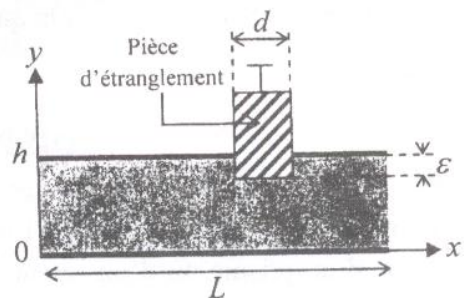


Figure-3-

#### IV- Écoulement de Poiseuille plan de deux liquides non miscibles

Dans l'industrie pétrolière une technique d'extraction du pétrole consiste à injecter de l'eau sous pression pour faire remonter le pétrole par un puits de forage.

On considère l'eau et le pétrole comme des liquides visqueux newtoniens non miscibles en écoulement ayant les mêmes caractéristiques que celui étudié dans I-.

Les deux plaques sont identiques aux précédentes, l'une est située en  $y = -h$  et l'autre en  $y = h$ . L'eau, de viscosité  $\eta_1$ , est en écoulement entre  $y = -h$  et  $y = 0$  et le pétrole, de viscosité  $\eta_2$ , est en écoulement entre  $y = 0$  et  $y = h$

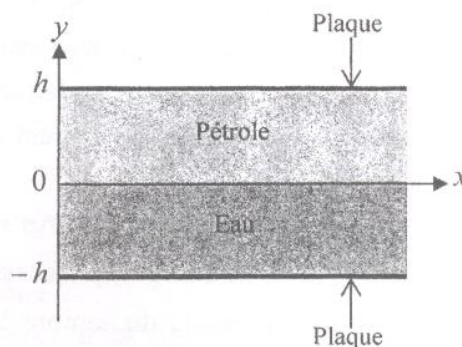


Figure-4-

(Figure-4-). On note  $K = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ .

Soient  $\vec{v}_1(M) = v_1(y) \vec{u}_x$  et  $\vec{v}_2(M) = v_2(y) \vec{u}_x$  respectivement les champs de vitesse dans l'eau et dans le pétrole.

16- En tenant compte du résultat de la question 6-1, donner les expressions des champs de vitesse  $v_1(y)$  et  $v_2(y)$ . On fera apparaître quatre constantes.

17-1) Ecrire les conditions aux limites imposées par les plaques en  $y = -h$  et  $y = h$ .

17-2) Les liquides étant non miscibles, on suppose que la face inférieure de l'interface, d'équation  $y = 0$ , se comporte comme un plan rigide pour l'eau et la face supérieure de l'interface se comporte comme un plan rigide pour le pétrole. En déduire la troisième condition aux limites vérifiée par le champ de vitesse à l'interface.

17-3) Montrer que  $\eta_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)_{y=0} = \eta_2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} \right)_{y=0}$ .

18- En déduire l'expression du champ de vitesse  $v_2(y)$  en fonction de  $\Delta p$ ,  $\eta_2$ ,  $L$ ,  $h$  et  $K$ .

19- Déterminer le débit volumique  $D_{v_2}$  du pétrole à travers une section orthogonale  $x = C^{te}$ . Comparer au résultat obtenu à la question 7 et commenter.

### Problème II DISPERSION DE LA LUMIERE

En optique, la spectrométrie est l'une des applications du phénomène de dispersion de la lumière à l'aide d'un prisme ou d'un réseau. Après étalonnage, on peut accéder à la mesure de la longueur d'onde de la lumière et plus généralement au spectre de la source utilisée.

#### I. Prisme

Un prisme dont la section droite est un triangle isocèle d'angle au sommet  $A$ , constitué d'un matériau transparent, homogène et d'indice de réfraction  $n(\lambda)$  pour une radiation de longueur d'onde  $\lambda$  donnée est plongé dans l'air d'indice de réfraction égal à 1.



1- Les orientations des angles sont choisies pour que les valeurs des angles  $i$ ,  $i'$ ,  $r$ ,  $r'$  et  $D$  soient positives (Figure 1). On se place dans le cas où les conditions d'émergence des rayons lumineux sont satisfaites.

1-1- Exprimer les lois de Descartes traduisant les réfractions à l'entrée en I et à la sortie en I' du prisme, lors du passage d'un rayon lumineux monochromatique dans le plan de section principale.

1-2- Déterminer l'angle au sommet  $A$  en fonction de  $r$  et  $r'$ .

1-3- Déterminer l'angle de déviation  $D$  en fonction de  $A$ ,  $i$  et  $i'$ .

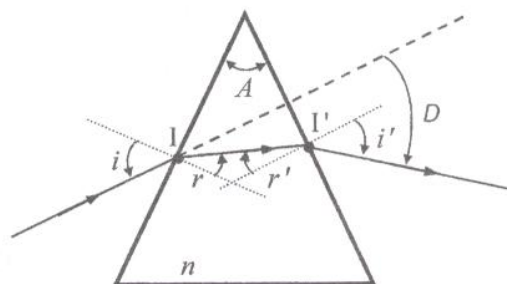


Figure 1

2- En lumière monochromatique, lorsqu'on varie l'angle d'incidence  $i$ , on met en évidence l'existence d'un minimum de déviation, noté  $D_m$ . Le tracé du rayon lumineux émergeant du prisme est alors symétrique par rapport au plan bissecteur de l'angle  $A$  du prisme. Une fois la condition de la déviation minimale est réalisée, montrer que :  $n = \sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right) / \sin\left(\frac{A}{2}\right)$ .

3- Décrire une expérience permettant de déterminer les angles  $A$  et  $D_m$ . Préciser les différents éléments constituant le dispositif réalisant les mesures.

4- Déterminer l'expression de l'incertitude relative  $\frac{\Delta n}{n}$  associée à l'indice  $n$  du prisme en fonction des angles  $A$ ,  $D_m$  et des incertitudes absolues  $\Delta A$  et  $\Delta D_m$ .

5- Pour la radiation de longueur d'onde  $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$ , on obtient  $D_m = 48^\circ 52'$ . Déterminer la valeur de l'indice du prisme qu'on présente sous la forme :  $n \pm \Delta n$ .

On donne :  $A = 60^\circ$ ,  $\Delta A = \Delta D_m = 4'$ .

## II. Spectromètre à prisme

Un spectromètre à prisme est constitué (Figure 2) :

- d'un collimateur composé d'une fente (F), placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente ( $L_1$ ) de distance focale  $f_1 = 20 \text{ cm}$  et éclairée par une source de lumière polychromatique.
- d'un prisme d'angle au sommet  $A$  dont l'indice varie en fonction de la longueur d'onde suivant la loi empirique de Cauchy qui s'écrit dans le domaine du visible :  $n(\lambda) = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$  avec  $\alpha = 1,5973$  et  $\beta = 0,0106 \mu\text{m}^2$ .
- d'un objectif assimilé à une lentille convergente ( $L_2$ ), qui donne sur un écran le spectre de la lumière émise par la source éclairant la fente. Cet écran est situé dans le plan focal image de la lentille ( $L_2$ ) de distance focale  $f_2 = 100 \text{ cm}$  et d'axe optique  $O_2F_2'$ .

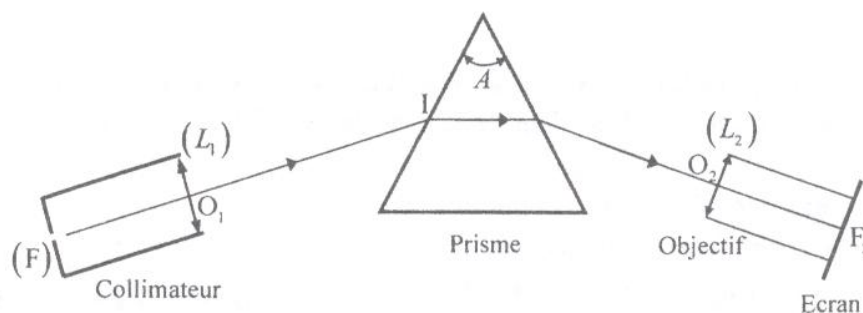


Figure 2

6- Quelle est la différence entre un spectroscopie et un spectromètre ?

7- La figure 2 représente la marche, à travers le prisme et l'objectif, d'un rayon lumineux incident  $O_1I$  pour la longueur d'onde  $\lambda_1$ . Reproduire cette figure et tracer la marche d'un rayon incident  $O_1I$  de longueur d'onde  $\lambda_2$  légèrement supérieure à  $\lambda_1$ .

8- Le prisme est réglé au minimum de déviation pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée.

8-1- Montrer que la variation de  $D_m$  en fonction de l'indice  $n$  du prisme s'écrit :

$$\frac{dD_m}{dn} = 2 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \left/ \cos\left(\frac{A + D_m}{2}\right) \right.$$

8-2- En déduire le pouvoir dispersif angulaire  $\frac{dD_m}{d\lambda}$  en fonction de  $A$ ,  $D_m$  et de la dispersion du verre  $\frac{dn}{d\lambda}$ .

9- La lumière émise par la source est composée de deux radiations jaunes du sodium de longueurs d'onde voisines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ .

9-1- Le passage d'une radiation de longueur d'onde  $\lambda$  à  $\lambda + d\lambda$  entraîne, au minimum de déviation, une variation élémentaire  $dD_m$  de la déviation. Exprimer  $dD_m$  en fonction de  $A$ ,  $D_m$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  et  $d\lambda$ .

9-2- Déterminer, sur l'écran d'observation, la distance  $d$  séparant les images de la fente (F) éclairée par les deux radiations du sodium.

9-3- Déterminer la valeur de  $d$  pour  $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$ .

10- La face d'entrée du prisme est totalement éclairée, sous une incidence  $i$  fixée, dans les conditions du minimum de déviation pour une radiation de longueur d'onde  $\lambda$  donnée. Le faisceau émergent sous l'angle  $i'$  a une largeur  $\ell$  dans la section principale du prisme. On note  $b$  la largeur de la base du prisme (Figure 3).

10-1- Exprimer le pouvoir dispersif angulaire  $\frac{dD_m}{d\lambda}$  en fonction de  $b$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  et  $\ell$ . Exprimer la distance  $d$  en fonction de  $b$ ,  $\beta$ ,  $\ell$ ,  $f_2$ ,  $\lambda$  et  $\Delta\lambda$ .

10-2- La fente (F), de largeur  $e$ , est assez large pour négliger tout phénomène de diffraction. Son image géométrique, sur l'écran d'observation, a une largeur  $e'$ .

Les angles  $\Delta i$  et  $\Delta i'$  indiqués sur la figure 4 sont les variations des angles d'incidence et d'émergence correspondant aux bords de  $e$  et de  $e'$ .

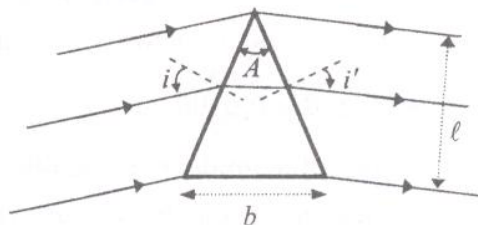


Figure 3



10-2-1- Déterminer  $e'$  en fonction de  $e$ ,  $f_1$  et  $f_2$ .

10-2-2- Quelle est la condition sur  $d$  et  $e'$  pour que les deux images de la fente source, correspondantes aux longueurs d'onde  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  soient séparées ?

10-2-3- En déduire la limite de résolution  $(\Delta\lambda)_{\min}$  du spectromètre imposée par la largeur de la fente source et l'exprimer en fonction de  $e$ ,

$b$ ,  $\ell$ ,  $f_1$  et  $\frac{dn}{d\lambda}$ .

10-2-4- Si l'on désire séparer, à l'aide de ce prisme, des raies très voisines en longueurs d'onde, quels sont les réglages à apporter ? Préciser leurs limites.

10-2-5- Calculer les valeurs de  $(\Delta\lambda)_{\min}$  et du

pouvoir de résolution  $PR = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}}$  pour la

longueur d'onde  $\lambda_1$ .

Données numériques :  $e = 40 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 2 \text{ cm}$  et  $b = 3,5 \text{ cm}$ .

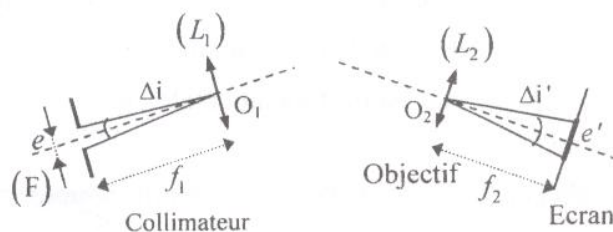


Figure 4

### III. Réseau par transmission

On considère un réseau plan constitué de  $N$  fentes identiques, fines, parallèles et régulièrement espacées. On note  $a$  la distance qui sépare les centres de deux fentes consécutives qui représente le pas de ce réseau par transmission.

11- Indiquer un procédé permettant la fabrication des réseaux optiques. Citer un autre type de réseau.

12- Le réseau est éclairé par un faisceau parallèle de lumière monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ , sous l'angle d'incidence  $i$ . On s'intéresse au faisceau diffracté à l'infini suivant la direction  $\theta$ . Les angles  $i$  et  $\theta$  sont comptés positivement (Figure 5).

12-1- Montrer que la différence de marche  $\delta$  entre deux rayons homologues diffractés suivant la direction  $\theta$  par deux fentes successives du réseau s'écrit :  $\delta = a(\sin\theta - \sin i)$ .

12-2- Déterminer la relation fondamentale du réseau précisant les directions  $\theta_k$  associées aux maxima principaux d'ordre  $k$ .

13- On suppose que le spectre de raies des radiations du mercure est limité par les radiations bleue ( $\lambda_b = 400 \text{ nm}$ ) et rouge ( $\lambda_r = 700 \text{ nm}$ ).

13-1- Déterminer les ordres observables, sous une incidence de  $30^\circ$ , pour ces deux radiations à l'aide d'un réseau de pas  $a = 2 \mu\text{m}$ .

13-2- À partir de quel ordre se produit le recouvrement des spectres ? Justifier votre réponse.

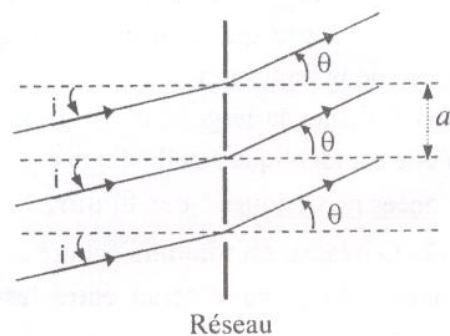


Figure 5

### IV. Spectromètre à réseau

Le prisme du montage représenté sur la figure 2 est remplacé par un réseau de pas  $a = 2 \mu\text{m}$ . Le faisceau sortant du collimateur éclaire complètement le réseau par transmission sous

une incidence  $i$ . Ce réseau peut tourner autour d'un axe parallèle aux fentes et le spectre obtenu est projeté sur un écran situé au plan focal image de la lentille convergente ( $L_2$ ) de distance focale  $f_2$ .

**14-** Pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée et un ordre  $k$  fixé, on désigne par  $D = \theta_k - i$ , la déviation entre la direction du faisceau incident reçu par le réseau et la direction du faisceau diffracté.

**14-1-** En faisant tourner le réseau la déviation  $D$  passe par une valeur minimale  $D_m$  pour une valeur particulière  $i_m$  de l'angle d'incidence  $i$ . Déterminer  $i_m$  en fonction de  $\theta_{km}$ .

**14-2-** Exprimer la relation fondamentale des réseaux (définie en 12-2-) en fonction de la déviation minimale  $D_m$ .

**14-3-** En déduire la valeur de  $i_m$ , à l'ordre 1, pour la radiation jaune de longueur d'onde moyenne  $\lambda = 589,3 \text{ nm}$  du doublet jaune du sodium.

**15-** Le réseau est maintenant placé orthogonalement au faisceau lumineux incident issu du collimateur.

**15-1-** Pour deux radiations de longueurs d'onde voisines  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  éclairant le réseau, exprimer la dispersion angulaire  $D_a = \frac{d\theta_k}{d\lambda}$  en fonction de  $k$ ,  $a$  et  $\theta_k$ .

**15-2-** En déduire la dispersion linéaire  $\frac{dX_k}{d\lambda}$  observée sur un écran placé au plan focal image de la lentille ( $L_2$ ). L'ensemble (lentille, écran) est perpendiculaire à la direction moyenne des rayons diffractés dans l'ordre  $k$ .

**15-3-** Calculer la valeur de  $\frac{dX_k}{d\lambda}$  exprimée en  $\text{mm.nm}^{-1}$ , à l'ordre 1, pour la longueur d'onde moyenne  $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ .

**16-** On admettra que la limite de résolution du spectromètre à réseau est surtout imposée par la largeur de la fente source.

**16-1-** Calculer la largeur  $e'$  de l'image de la fente source sur l'écran d'observation en supposant qu'elle est identique à celle donnée par le prisme (relation établie à la question 10-2-1).

Données numériques :  $e = 40 \text{ }\mu\text{m}$  ;  $f_1 = 20 \text{ cm}$  et  $f_2 = 100 \text{ cm}$ .

**16-2-** Le réseau est toujours éclairé sous incidence normale, déterminer, dans le spectre d'ordre 1, la distance  $\Delta X_{Na}$  sur l'écran entre les images de la fente source relatives au doublet du sodium ( $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$ ). Le spectromètre à réseau utilisé permet-il la résolution du doublet de sodium ?