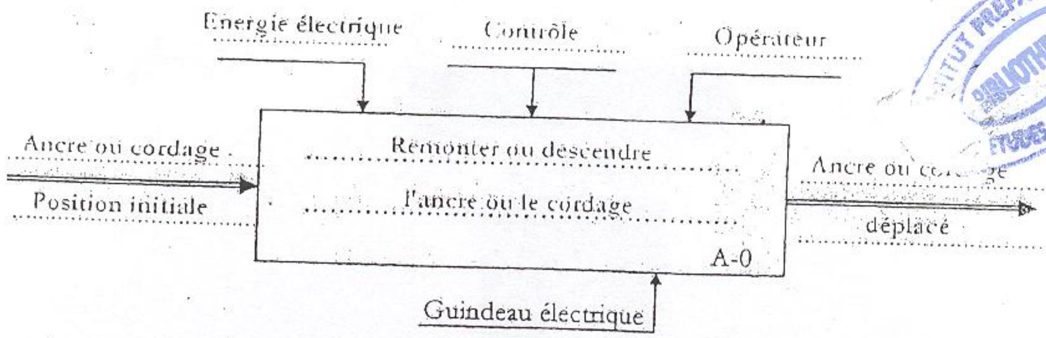
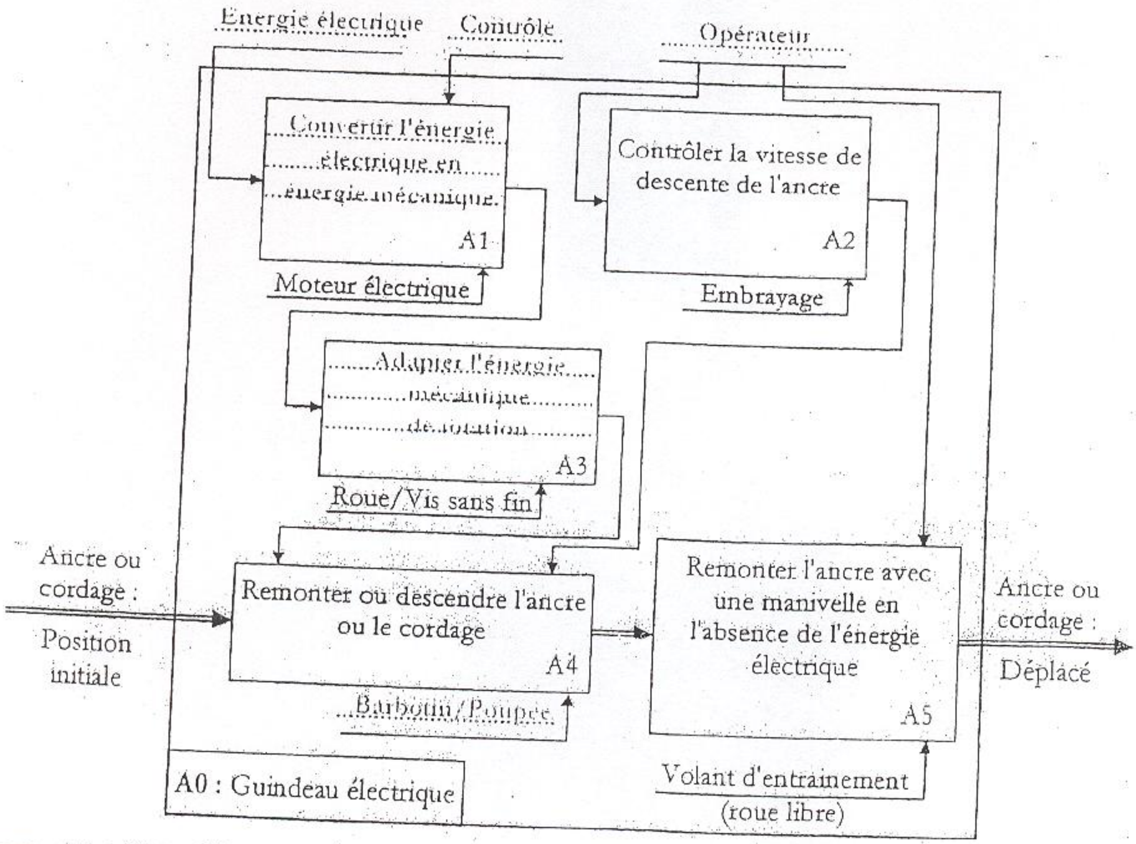
# PARTIE A : TECHNOLOGIE DE CONCEPTION

## A.1- ANALYSE FONCTIONNELLE

A.1.1- Indiquer, dans l'actigramme niveau A-0, la fonction globale du guindeau électrique.



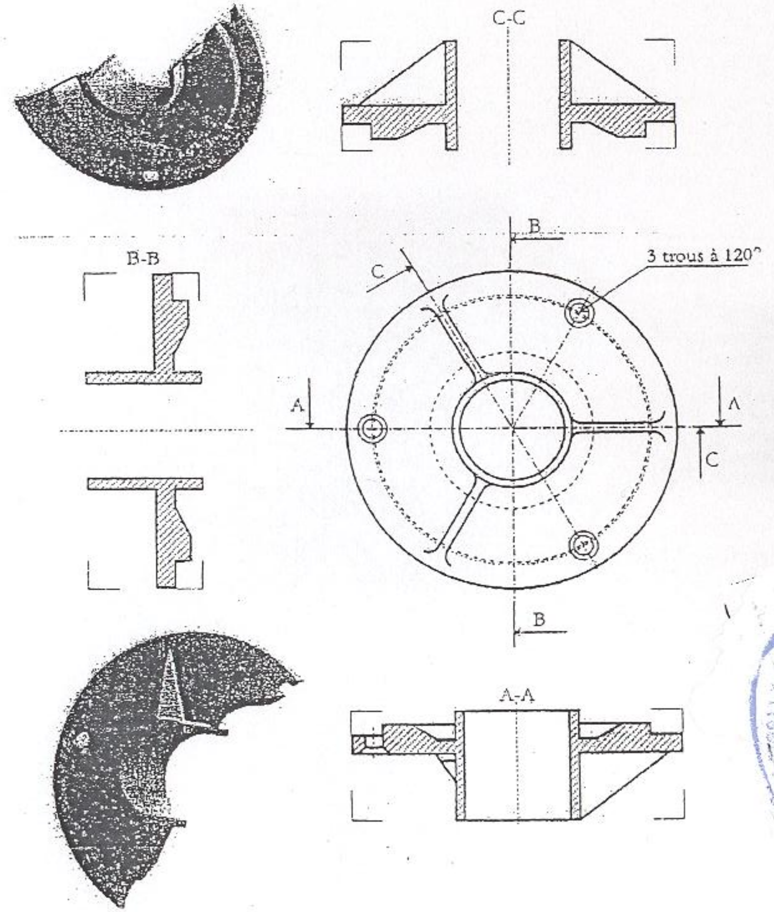

A.1.2- Indiquer, dans l'actigramme niveau A0, les différentes fonctions principales du guindeau électrique.



## A.2- ETUDE GRAPHIQUE

On donne le dessin en perspective du flasque en acier. Compléter le dessin de définition de cette pièce par :

- La vue de face ;
- La vue de dessus en coupe A-A ;
- Les sections sorties B-B et C-C.








# PARTIE B : MECANIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES

## B.1- MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

B.1.1- A partir de la figure B.5, exprimer, en fonction de $\alpha$, $\beta$ et F les composantes $F_x$, $F_y$ et $F_z$ de l'action de la vis (2) sur la roue (12).

| | | |
|---|---|---|
| $F_x$ = F cosα cosβ | $F_y$ = F sinα | $F_z$ = F cosα sinβ |

B.1.2- Identifier la nature (axiale, radiale ou tangentielle) des composantes de la force appliquée en K à la roue dentée (12) en plaçant une croix dans la case correspondant à la bonne réponse.

| *Composante de $\vec{F}$* | *Axiale* | *Radiale* | *Tangentielle* |
|---|---|---|---|
| $F_x$ | | | X |
| $F_y$ | | X | |
| $F_z$ | X | | |

B.1.3- Exprimer dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le torseur représentant l'action, au point K, de la roue dentée (12) sur la vis(2). En déduire son expression au point D.

$$\{\tau(12 \to 2)\}_K = \begin{Bmatrix} -Fx & 0 \\ -Fy & 0 \\ -Fz & 0 \end{Bmatrix}_K^{\mathcal{B}_0}$$

$$\vec{M}_D(12 \to 2) = \vec{M}_K(12 \to 2) + \overrightarrow{DK} \wedge \vec{R}(12 \to 2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} - \begin{pmatrix} d \\ R_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} \wedge \begin{pmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} -R_2\,Fz \\ d\,Fz \\ R_2\,Fx - d\,Fy \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$\{\tau(12 \to 2)\}_D = \begin{Bmatrix} -Fx & -R_2\,Fz \\ -Fy & d\,Fz \\ -Fz & R_2\,Fx - d\,Fy \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}_0}$$

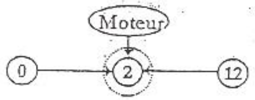
B.1.4- Identifier la nature des composantes de la résultante de l'action qu'exerce la roue dentée (12) sur la vis (2) en plaçant une croix dans la case correspondant à la bonne réponse.

| *Composante appliquée à la vis (2)* | *Axiale* | *Radiale* | *Tangentielle* |
|---|---|---|---|
| -Fx | X | | |
| -Fy | | X | |
| -Fz | | | X |

B.1.5- Déterminer, au point D, le moment dynamique de la vis (2) dans son mouvement par rapport au carter (0).

$\vec{\delta}_D(2/0) = \vec{0}$

B.1.6- Déterminer, au point D, le torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur la vis (2).




$\{\bar{2}\} = \{ 0, 12, \text{Moteur} \}$

$\{\tau(0 \to 2)\}_D = \begin{Bmatrix} X_D & 0 \\ Y_D & M_D \\ Z_D & N_D \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}_0}$ $\{\tau(\text{Moteur} \to 2)\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}_0}$ $\{\tau(12 \to 2)\}_D = \begin{Bmatrix} -F_X & -R_2 F_Z \\ -F_Y & d\,F_Z \\ -F_Z & R_2 F_X - d\,F_Y \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}_0}$

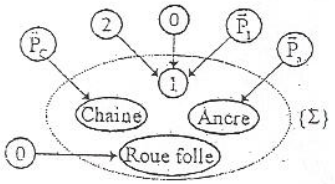
$$\Rightarrow \{\tau(\bar{2} \to 2)\}_D = \begin{Bmatrix} X_D - F_X & C_m - R_2 F_Z \\ Y_D - F_Y & M_D + d\,F_Z \\ Z_D - F_Z & N_D + R_2 F_X - d\,F_Y \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}_0}$$

B.1.7- Appliquer le théorème du moment dynamique à la vis (2) dans son mouvement par rapport au carter (0). En déduire la relation exprimant le couple moteur $C_m$ en fonction de F.

*Le TMD s'écrit :* $\vec{M}_D(\bar{2} \to 2) = \vec{\delta}_D(2/0) = \vec{0}$

$C_m = R_2\,F \cos\alpha \sin\beta$

B.1.8- Faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur $\{\Sigma\}$. Ecrire, en leurs points d'application et dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, tous les torseurs relatifs à ces actions mécaniques appliquées au système $\{\Sigma\}$.




$\{\bar{\Sigma}\} = \{ 0, 2, \text{Pesanteur} \}$

$\{\tau(\vec{P}_1 \to 1)\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -M_1 g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_1}^{\mathcal{B}_0}$ $\{\tau(\vec{P}_a \to \text{Ancre})\}_{G_a} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -M_a\,g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_a}^{\mathcal{B}_0}$





$\{\tau(\vec{P}_c \to \text{Chaine})\}_{G_c} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -M_c\,g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_c}^{\mathcal{B}_0}$

$\{\tau_1(0 \to 1)\}_O = \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ Y_O & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{B}_0}$ $\{\tau_2(0 \to 1)\}_C = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathcal{B}_0}$

$\{\tau(2 \to 12)\}_K = \begin{Bmatrix} F_X & 0 \\ F_Y & 0 \\ F_Z & 0 \end{Bmatrix}_K^{\mathcal{B}_0}$ $\{\tau(0 \to \text{Roue folle})\}_Q = \begin{Bmatrix} X_Q & L_Q \\ Y_Q & M_Q \\ Z_Q & 0 \end{Bmatrix}_Q^{\mathcal{B}_0}$

B.1.9- Déterminer, au point O et dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le moment résultant de toutes les actions mécaniques extérieures exercées sur le système $\{\Sigma\}$.

Calcul des moments au point O :

1. $\vec{M}_O(G_1, \vec{P}_1) = \overline{OG_1} \wedge \vec{P}_1 = (h\,\vec{z}_0) \wedge (-M_1\,g\,\vec{y}_0) = M_1\,g\,h\,\vec{x}_0$

2. $\vec{M}_O(G_a, \vec{P}_a) = \overline{OG_a} \wedge \vec{P}_a = [(a_0 + R)\,\vec{x}_0 - (b_0 + L)\,\vec{y}_0 + a\,\vec{z}_0] \wedge (-M_a\,g\,\vec{y}_0)$

$= M_a\,g\,a\,\vec{x}_0 - M_a\,g\,(a_0 + R)\,\vec{z}_0$

3. $\vec{M}_O(\vec{P}_c \to \text{Chaîne}) = \vec{M}_E(\vec{P}_c \to \text{Chaîne}) + \overline{OE} \wedge \vec{P}_c$

$\vec{M}_E(\vec{P}_c \to \text{Chaîne}) = \int_{P \in (\text{Chaîne})} \overline{EP} \wedge d\vec{P}_c\, d\ell = \vec{0}$ (car $\overline{EP}$ et $d\vec{P}_c$ sont colinéaires)

$\vec{M}_O(\vec{P}_c \to \text{Chaîne}) = \overline{OE} \wedge \vec{P}_c = M_c\,g\,a\,\vec{x}_0 - M_c\,g\,(a_0 + R)\,\vec{z}_0$    $M_C = \lambda\,L$

4. $\vec{M}_{2O}(0 \to 1) = \vec{M}_{2C}(0 \to 1) + \overline{OC} \wedge \vec{R}_2(0 \to 1) = \vec{0} + (c\,\vec{z}_0) \wedge (X_C\,\vec{x}_0 + Y_C\,\vec{y}_0)$

$= -c\,Y_C\,\vec{x}_0 + c\,X_C\,\vec{y}_0$

5. $\vec{M}_O(2 \to 12) = \vec{M}_K(2 \to 12) + \overline{OK} \wedge \vec{R}(2 \to 12)$

$= -(R_0\,F_Z + b\,F_Y)\,\vec{x}_0 + b\,F_X\,\vec{y}_0 + R_0\,F_X\,\vec{z}_0$

6. $\vec{M}_O(0 \to \text{Roue folle}) = \vec{M}_K(0 \to \text{Roue folle}) + \overline{OK} \wedge \vec{R}(0 \to \text{Roue folle})$

$$= \begin{pmatrix} L_Q \\ M_Q \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} + \begin{pmatrix} a_0 \\ -b_0 \\ a \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} \wedge \begin{pmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$= \begin{pmatrix} L_Q - (b_0\,Z_Q + a\,Y_Q) \\ M_Q + (a\,X_Q - a_0\,Z_Q) \\ a_0\,Y_Q + b_0\,X_Q \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$\vec{M}_O(\bar{\Sigma} \to \Sigma) = \begin{Bmatrix} [M_1 h + (M_1 + M_2) a] g - c Y_C - (R_0 F_z + h F_y) + L_G - (b_0 Z_G + a Y_G) \\ -c X_C + b F_x + M_G + (a X_G - d_0 Z_G) \\ -(M_1 + M_2) g (a_0 + R) + R_0 F_x + a_0 Y_G + b_0 X_G \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

## B.2- CINEMATIQUE ET CINETIQUE

B.2.1- Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, les torseurs cinématiques représentant les mouvements par rapport au carter (0) :

B.2.1.1- de l'ensemble {1} au point O.

- $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}\,\vec{z}_0$
- $\vec{V}(O \in 1/0) = \vec{0}$ Car O est le centre d'une liaison pivot entre (1) et (0)

$$\{\mathcal{V}(1/0)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{B}_0}$$

B.2.1.2- de la vis (2) au point D.

- $\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\varphi}\,\vec{x}_0$
- $\vec{V}(D \in 2/0) = \vec{0}$ Car D est le centre d'une liaison pivot entre (2) et (0)

$$\{\mathcal{V}(2/0)\}_D = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}_0}$$

B.2.2- Déterminer $\vec{V}(K \in 1/0)$ et $\vec{V}(K \in 2/0)$. En déduire la vitesse de glissement $\vec{V}(K \in 1/2)$.

$\vec{V}(K \in 1/0) = \vec{V}(O \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{OK}$

$= \vec{0} + (\dot{\theta}\,\vec{z}_0) \wedge (-R_0\,\vec{y}_0 + b\,\vec{z}_0) = R_0\,\dot{\theta}\,\vec{x}_0$

$$\boxed{\vec{V}(K \in 1/0) = R_0\,\dot{\theta}\,\vec{x}_0}$$

$\vec{V}(K \in 2/0) = \vec{V}(D \in 2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{DK}$

$= \vec{0} + (\dot{\varphi}\,\vec{x}_0) \wedge (d\,\vec{x}_0 + R_2\,\vec{y}_0) = R_2\,\dot{\varphi}\,\vec{z}_0$

$$\boxed{\vec{V}(K \in 2/0) = R_2\,\dot{\varphi}\,\vec{z}_0}$$

$\vec{V}(K \in 1/2) = \vec{V}(K \in 1/0) - \vec{V}(K \in 2/0)$

$= R_0\,\dot{\theta}\,\vec{x}_0 - R_2\,\dot{\varphi}\,\vec{z}_0$

$$\boxed{\vec{V}(K \in 1/2) = R_0\,\dot{\theta}\,\vec{x}_0 - R_2\,\dot{\varphi}\,\vec{z}_0}$$





La condition de roulement sans glissement est elle réalisable au point de contact K ? Justifier.

La Condition de Non Glissement s'écrit : $\vec{V}(K \in 1/2) = \vec{0}$

$\Rightarrow R_0\,\dot{\theta}\,\vec{x}_0 - R_2\,\dot{\varphi}\,\vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow R_0\,\dot{\theta} = 0$ et $R_2\,\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$ et $\dot{\varphi} = 0$

$\Rightarrow$ La vitesse ne peut être nulle qu'en cas de blocage du système

B.2.3- Déterminer la vitesse du point I du barbotin (11) dans son mouvement par rapport au carter (0) : $\vec{V}(I \in 1/0)$.

$\vec{V}(I \in 1/0) = \vec{V}(A \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{AI}$

$= \vec{0} + (\dot{\theta}\,\vec{z}_0) \wedge (R_1\,\vec{y}_0) = -R_1\,\dot{\theta}\,\vec{x}_0$

$$\boxed{\vec{V}(I \in 1/0) = -R_1\,\dot{\theta}\,\vec{x}_0}$$

B.2.4- La ligne de mouillage ne peut effectuer qu'un mouvement de translation suivant l'axe $(E, \vec{y}_0)$.

B.2.4.1- Déterminer la vitesse de translation du centre d'inertie de l'ancre $\vec{V}(G_a/0)$ dans son mouvement par rapport au carter (0).

$$\vec{V}(G_a/0) = \left(\frac{d\overrightarrow{QE}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d(R\,\vec{x}_0 - (L_0 - y)\,\vec{y}_0)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0} = \dot{y}\,\vec{y}_0$$

$$\boxed{\vec{V}(G_a/0) = \dot{y}\,\vec{y}_0}$$

B.2.4.2- Etant donné que la chaîne est inextensible et que la condition de non glissement par rapport au barbotin se traduit par : $\|\vec{V}(I \in 1/0)\| = \|\vec{V}(G_a/0)\|$, trouver la relation entre les vitesses $\dot{y}$ et $\dot{\theta}$.

$\|-R_1\,\dot{\theta}\,\vec{x}_0\| = \|\dot{y}\,\vec{y}_0\| \Rightarrow$

$$\boxed{R_1\,\dot{\theta} = \dot{y}}$$

B.2.4.3- Sachant qu'au début de la phase de levage, les conditions initiales sont : $L = L_0$, $\theta = 0$ et $\varphi = 0$, exprimer en fonction de $R_1$, $\theta$ et $L_0$ la longueur courante L de la chaîne.

$\dot{y} = R_1\,\dot{\theta} \Rightarrow y = R_1\,\theta + C^{te}$ ; Or : à $t = 0$, $y = 0$ et $\theta = 0 \Rightarrow C^{te} = 0$

$L_0 = L + y$ ; Avec $y = R_1\,\theta$

$$\boxed{L = L_0 - R_1\,\theta}$$

B.2.5- Sachant que l'axe $(O,\vec{z}_0)$ est un axe principal d'inertie de l'ensemble {1}. Donner la forme générale de la matrice d'inertie, au point O et dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$, de cet ensemble.

$$\left[I_O(1)\right]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

B.2.6- Déterminer le torseur cinétique puis le torseur dynamique au point O de l'ensemble {1} dans son mouvement par rapport au carter (0).

- $\vec{R}_c(1/0) = M_1\,\vec{V}(G_1/0) = \vec{0}$
- $\vec{\sigma}_O(1/0) = \left[I_O(1)\right]_{\mathcal{B}_1}\vec{\Omega}(1/0) = C_1\,\dot{\theta}\,\vec{z}_0$

Car $O \in (1)$ est fixe dans le repère $\mathcal{R}_0$ (cas particulier)

$$\{\mathcal{C}(1/0)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_1\,\dot{\theta} \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{R}_0}$$

- $\vec{R}_D(1/0) = M_1\,\vec{\gamma}(G_1/0) = \vec{0}$
- $\vec{\delta}_O(1/0) = \left(\dfrac{d\vec{\sigma}_O(1/0)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = C_1\,\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$

$$\{\mathcal{D}(1/0)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_1\,\ddot{\theta} \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{R}_0}$$

B.2.7- Exprimer en fonction de $L_0$, $M_a$, $\theta$, $\dot{\theta}$, $R_1$ et $\lambda$ la résultante cinétique $\vec{R}_c(\Sigma/0)$ du système {Σ} dans son mouvement par rapport au carter (0).

$\vec{R}_c(\Sigma/0) = \vec{R}_c(1/0) + \vec{R}_c(Ancre/0) + \vec{R}_c(Chaîne/0)$

- $\vec{R}_c(1/0) = M_1\,\vec{V}(G_1/0) = \vec{0}$
- $\vec{R}_c(Ancre/0) = M_a\,\vec{V}(G_a/0) = M_a\,R_1\,\dot{\theta}\,\vec{y}_0$
- $\vec{R}_c(Chaîne/0) = M_c\,\vec{V}(G_c/0) = M_c\,\dot{y}\,\vec{y}_0 = \lambda\,(L_0 - R_1\,\theta)\,R_1\,\dot{\theta}\,\vec{y}_0$

$$\boxed{\vec{R}_c(\Sigma/0) = \left[M_a + \lambda\,(L_0 - R_1\,\theta)\right]R_1\,\dot{\theta}\,\vec{y}_0}$$

B.2.8- Exprimer en fonction de $L_0$, $M_a$, $\theta$, $\ddot{\theta}$, $R_1$ et $\lambda$ la résultante dynamique $\vec{R}_D(\Sigma/0)$ du système {Σ} dans son mouvement par rapport au carter (0).

$\vec{R}_D(\Sigma/0) = \vec{R}_D(1/0) + \vec{R}_D(Ancre/0) + \vec{R}_D(Chaîne/0)$







- $\vec{R}_D(1/0) = M_1\,\vec{\gamma}(G_1/0) = \vec{0}$
- $\vec{R}_D(Ancre/0) = M_a\,\vec{\gamma}(G_a/0) = M_a\,\ddot{y}\,\vec{y}_0 = M_a\,R_1\,\ddot{\theta}\,\vec{y}_0$
- $\vec{R}_D(Chaîne/0) = M_c\,\vec{\gamma}(G_c/0) = M_c\,\ddot{y}\,\vec{y}_0 = \lambda\,(L_0 - R_1\,\theta)\,R_1\,\ddot{\theta}\,\vec{y}_0$

$$\boxed{\vec{R}_D(\Sigma/0) = \left[M_a + \lambda\,(L_0 - R_1\,\theta)\right]R_1\,\ddot{\theta}\,\vec{y}_0}$$

B.2.9- Déterminer le moment dynamique, au point O, du système {Σ} dans son mouvement par rapport au carter (0).

$\vec{\delta}_O(\Sigma/0) = \vec{\delta}_O(1/0) + \vec{\delta}_O(Ancre/0) + \vec{\delta}_O(Chaîne/0)$

- $\vec{\delta}_O(1/0) = C_1\,\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$
- $\vec{\delta}_O(Ancre/0) = \vec{\delta}_{G_a}(Ancre/0) + \overrightarrow{OG_a} \wedge \vec{R}_D(Ancre/0)$

$\vec{\delta}_{G_a}(Ancre/0) = \vec{0}$ car l'ancre est en translation par rapport à (0)

$\overrightarrow{OG_a} = (a_0 + R)\,\vec{x}_0 - (b_0 + L)\,\vec{y}_0 + a\,\vec{z}_0$

$\vec{R}_D(Ancre/0) = M_a\,R_1\,\ddot{\theta}\,\vec{y}_0$

$\Rightarrow \vec{\delta}_O(Ancre/0) = -M_a\,a\,R_1\,\ddot{\theta}\,\vec{x}_0 + M_a\,(a_0 + R)\,R_1\,\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$

- $\vec{\delta}_O(Chaîne/0) = \vec{\delta}_E(Chaîne/0) + \overrightarrow{OE} \wedge \vec{R}_D(Chaîne/0)$

$\vec{\delta}_E(Chaîne/0) = \int_{P \in (Chaîne)} \overrightarrow{EP} \wedge \vec{\gamma}(P/0)\,dm = \vec{0}$ (car $\overrightarrow{EP}$ et $\vec{\gamma}(P/0)$ sont colinéaires)

$\overrightarrow{OE} = (a_0 + R)\,\vec{x}_0 - b_0\,\vec{y}_0 + a\,\vec{z}_0$

$\vec{R}_D(Chaîne/0) = \lambda\,(L_0 - R_1\,\theta)\,R_1\,\ddot{\theta}\,\vec{y}_0$

$\Rightarrow \vec{\delta}_O(Chaîne/0) = -\lambda\,(L_0 - R_1\,\theta)\,a\,R_1\,\ddot{\theta}\,\vec{x}_0 + \lambda\,(L_0 - R_1\,\theta)\,(a_0 + R)\,R_1\,\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$

$$\boxed{\vec{\delta}_O(\Sigma/0) = -\left[M_a + \lambda\,(L_0 - R_1\,\theta)\right]a\,R_1\,\ddot{\theta}\,\vec{x}_0 + \left\{C_1 + \left[M_a + \lambda\,(L_0 - R_1\,\theta)\right](a_0 + R)\,R_1\right\}\ddot{\theta}\,\vec{z}_0}$$

## B.3- EQUATIONS DYNAMIQUES

B.3.1- Ecrire les équations dynamiques ①, ② et ③ qui découlent du théorème du moment dynamique appliqué au système {Σ} dans son mouvement par rapport au carter (0).

Le TMD au point O appliqué à (Σ) $\Rightarrow \vec{M}_O(\bar{\Sigma} \to \Sigma/0) = \vec{\delta}_O(\Sigma/0)$

Les équations dynamiques s'obtiennent par projections

succesives du TMD sur les vecteurs untiataires de la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$[M_1 h + (M_a + M_c) a] g - c Y_O - (R_0 F_z + b F_y) + L_Q - (b_Q Z_Q + a Y_Q) = -[M_a + \lambda(L_0 - R_1 \theta)] a R_1 \ddot{\theta} \quad ①$$

$$c X_O + b F_x + M_Q + a X_Q - a_Q Z_Q = 0 \quad ②$$

$$-(M_a + M_c) g (a_Q + R) + R_0 F_x + a_Q Y_Q + b_Q X_Q = \{C_r - [M_a + \lambda(L_0 - R_1 \theta)](a_Q + R) R_1\} \ddot{\theta} \quad ③$$

B.3.2- Déterminer l'énergie cinétique du système {Σ} dans son mouvement par rapport au carter (0).

$E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) + E_c(\text{Ancre}/0) + E_c(\text{Chaîne}/0)$

$E_c(1/0) = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}(1/0)\}_G \{\mathcal{V}(1/0)\}_G = \frac{1}{2} C_1 \dot{\theta}^2$

$E_c(\text{Ancre}/0) = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}(\text{Ancre}/0)\}_{G_a} \{\mathcal{V}(\text{Ancre}/0)\}_{G_a} = \frac{1}{2} M_a \dot{y}^2 = \frac{1}{2} M_a R_1^2 \dot{\theta}^2$

$E_c(\text{Chaîne}/0) = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}(\text{Chaîne}/0)\}_{G_C} \{\mathcal{V}(\text{Chaîne}/0)\}_{G_C} = \frac{1}{2} M_c \dot{y}^2 = \frac{1}{2}\lambda(L_0 - R_1\theta) R_1^2 \dot{\theta}^2$

$$\boxed{E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}\left[C_1 + (M_a + \lambda(L_0 - R_1\theta)) R_1^2\right] \dot{\theta}^2}$$

B.3.3- Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures exercées sur le système {Σ} dans son mouvement par rapport au carter (0).

Les seules actions mécaniques qui développent une puissance

sont les poids $\vec{P}_a$, $\vec{P}_C$ et l'action de (2) sur (12)





- $P(0 \to 1/0) = P(0 \to \text{Roue folle}/0) = 0$ car liaisons parfaites
- $P(2 \to 12/0) = \{\tau(2 \to 12)\}_K \{\mathcal{V}(12/0)\}_K = \vec{R}(2 \to 12) \times \vec{V}(K \in 12/0) = F_x R_0 \dot{\theta}$
- $P(\vec{P}_1 \to 1/0) = \{\tau(\vec{P}_1 \to 1)\}_{G_1} \{\mathcal{V}(1/0)\}_{G_1} = 0$
- $P(\vec{P}_a \to \text{Ancre}/0) = \{\tau(\vec{P}_a \to \text{Ancre})\}_{G_a} \{\mathcal{V}(\text{Ancre}/0)\}_{G_a} = \vec{P}_a \times \vec{V}(G_a/0) = -M_a g R_1 \dot{\theta}$
- $P(\vec{P}_C \to \text{Chaîne}/0) = \{\tau(\vec{P}_C \to \text{Chaîne})\}_{G_C} \{\mathcal{V}(\text{Chaîne}/0)\}_{G_C} = -\lambda(L_0 - R_1\theta) g R_1 \dot{\theta}$

$$\boxed{P(\bar{\Sigma} \to \Sigma/0) = \left[F_x R_0 - (M_a + \lambda(L_0 - R_1\theta)) g R_1\right] \dot{\theta}}$$

B.3.4- Ecrire l'équation qui découle de l'application du théorème de l'énergie cinétique au système {Σ} dans son mouvement par rapport au carter (0);

TEC : $\frac{dE_c(\Sigma/0)}{dt} = P(\bar{\Sigma} \to \Sigma/0) + \mathcal{P}_{int}$

- $\mathcal{P}_{int} = 0$ car toutes les liaisons intérieures sont parfaites

- $\frac{dE_c(\Sigma/0)}{dt} = \left[C_1 + (M_a + \lambda(L_0 - R_1\theta)) R_1^2\right] \dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\lambda R_1^3 \dot{\theta}^3$

$$\boxed{\left[F_x R_0 - (M_a + \lambda(L_0 - R_1\theta)) g R_1\right] \dot{\theta} = \left[C_1 + (M_a + \lambda(L_0 - R_1\theta)) R_1^2\right] \dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\lambda R_1^3 \dot{\theta}^3}$$

B.3.5- Sachant, que le rapport de transmission roue et vis est défini par la relation : $r = \frac{\theta}{\varphi} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}$, déduire l'expression du couple moteur en fonction des données du problème en régime transitoire ($\varphi$ est une variable dans le temps).

$F_x = F \cos\alpha \cos\beta = F_z \operatorname{cotg}\beta = \frac{C_m}{R_2} \operatorname{cotg}\beta$

$C_m \frac{R_0}{R_2} \operatorname{cotg}\beta = \left[C_1 + (M_a + \lambda(L_0 - R_1\theta)) R_1^2\right] \ddot{\theta} - \frac{1}{2}\lambda R_1^3 \dot{\theta}^2 + (M_a + \lambda(L_0 - R_1\theta)) g R_1$

$$\boxed{C_m = \frac{R_2}{R_0} \operatorname{tg}\beta \left\{\left[C_1 + (M_a + \lambda(L_0 - R_1\theta)) R_1^2\right] \ddot{\theta} - \frac{1}{2}\lambda R_1^3 \dot{\theta}^2 + (M_a + \lambda(L_0 - R_1\theta)) g R_1\right\}}$$

B.3.6- Que devient ce couple lors d'un régime de fonctionnement normal ($\dot{\varphi} = \omega = Cte$).

$$C_m = \frac{R_2}{R_0} tg\beta \left[ (M_a + \lambda(L_0 - R_1 r \varphi)) g R_1 - \frac{1}{2} \lambda R_1^3 r^2 \omega^2 \right]$$

B.3.7- En considérant les données numériques suivantes :

$R_0$= 50 mm, $R_1$= 45 mm, $R_2$= 18 mm, $\beta$=70°, $\alpha$= 20°,

$r = \frac{3}{56}$, $L_0$= 25 m, $\lambda$= 2,25 Kg/m, Ma= 25 Kg, g= 10 Nm$^{-2}$ ; $\omega$ = 1500 tr/min

B.3.7.1- Calculer le couple maximal développé par le moteur. A quelle position de l'ancre est-il associé ?

$$C_{max} = \frac{R_2}{R_0} tg\beta \left[ (M_a + \lambda L_0) g R_1 - \frac{\lambda}{2} R_1^3 r^2 \omega^2 \right] \Rightarrow C_{max} = 2,32 \text{ (N.m)}$$

Le couple est maximal si la longueur L est maximale $\Rightarrow L = L_0 \Rightarrow \varphi = 0$

B.3.7.2- Calculer le couple minimal développé par le moteur. A quelle position de l'ancre est-il associé ?

$$C_{min} = \frac{R_2}{R_0} tg\beta \left( M_a g R_1 - \frac{\lambda}{2} R_1^3 r^2 \omega^2 \right) \Rightarrow C_{min} = 1,6 \text{ (N.m)}$$

Le couple est minimal si la longueur L est minimale $\Rightarrow L = 0 \Rightarrow L_0 - R_1 r \varphi = 0$

B.3.7.3- Calculer le nombre de tours effectués par l'arbre moteur pour obtenir un levage total de l'ancre.

N = 1650 tours



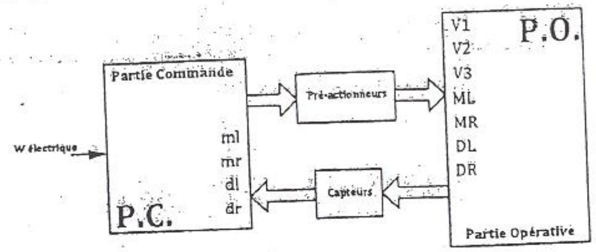




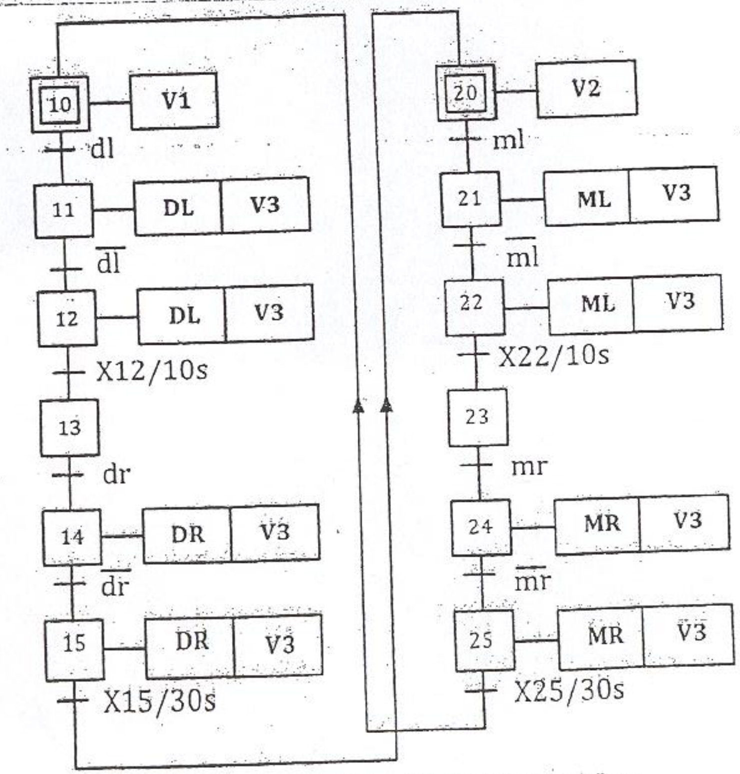
# PARTIE C : AUTOMATIQUE

## C.1- COMMANDE SEQUENTIELLE DE POSITIONNEMENT DE L'ANCRE

C.1.1- Compléter le schéma fonctionnel de l'automatisme.




C.1.2- Compléter le grafcet décrivant le fonctionnement du système.




Grafcet du système de positionnement de l'ancre

## C.2- ETUDE DE L'ASSERVISSEMENT DE POSITION DE L'ANCRE

### C.2.1 - Modélisation de l'ensemble moteur+charge

C.2.1.1- Ecrire les équations de (1) à (6) du système dans le domaine de Laplace en supposant que les conditions initiales sont nulles.

| | |
|---|---|
| $U(p) - E(p) = R + Lp \; I(p)$ (1) | $C_1(p) - C_{1r}(p) = J_1 p + f_1 \; \Omega_1(p)$ (2) |
| $E(p) = K_0 \, \Omega_1(p)$ (3) | $C_1(p) = K_1 \, I(p)$ (4) |
| $C_2(p) - C_r(p) = J_2 p + f_2 \; \Omega_2(p)$ (5) | $C_{1r}(p)\Omega_1(p) = C_2(p)\Omega_2(p)$; $r = \dfrac{\Omega_2(p)}{\Omega_1(p)} = \dfrac{C_{1r}(p)}{C_2(p)}$ (6) |

C.2.1.2- Montrer que les équations mécaniques (2), (5) et (6) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$C_1(t) - rC_r(t) = J_r \frac{d\Omega_2(t)}{dt} + f_r \, \Omega_2(t) \qquad (7)$$

Avec : $J_r = \dfrac{J_1}{r} + rJ_2$ et $f_r = \dfrac{f_1}{r} + rf_2$

On a (2) : $C_1(p) - C_{1r}(p) = J_1 p + f_1 \; \Omega_1(p)$; (6) : $C_{1r}(p) = rC_2(p)$ et $\Omega_1(p) = \dfrac{\Omega_2(p)}{r}$

$\rightarrow C_1(p) - rC_2(p) = J_1 p + f_1 \; \dfrac{\Omega_2(p)}{r}$ avec (5) : $C_2(p) = J_2 p + f_2 \; \Omega_2(p) + C_r(p)$

Donc $C_1(p) - rC_r(p) = \left[\left(\dfrac{J_1}{r} + rJ_2\right) p + \left(\dfrac{f_1}{r} + rf_2\right)\right] \Omega_2(p)$

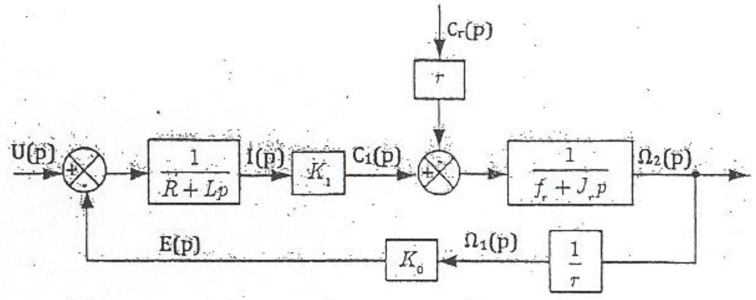
$$\boxed{\Rightarrow \quad C_1(t) - rC_r(t) = J_r \frac{d\Omega_2(t)}{dt} + f_r \Omega_2(t)}$$

| | |
|---|---|
| Avec $J_r = \dfrac{J_1}{r} + rJ_2$ | et $f_r = \dfrac{f_1}{r} + rf_2$ |



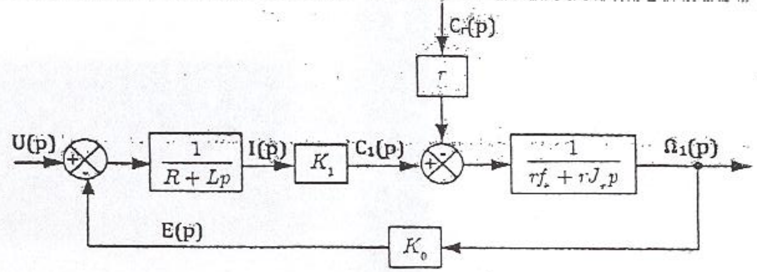


C.2.1.3- Compléter le schéma fonctionnel ci-après par les transmittances manquantes.




C.2.1.4- Montrer que le schéma fonctionnel de la question C.2.1.3. peut se mettre sous la forme suivante :

On a $\Omega_1(p) = \dfrac{\Omega_2(p)}{r} \Rightarrow \quad C_1(p) - rC_r(p) = \dfrac{1}{rJ_r p + rf_r}\Omega_1(p)$




C.2.1.5- Montrer que l'expression de la vitesse du moteur en fonction de la tension d'induit et du couple de perturbation $C_r$ s'écrit : $\Omega_1(p) = G_1(p)\; U(p) + G_2(p)\; C_r(p)$. En déduire les expressions des fonctions de transfert $G_1(p)$ et $G_2(p)$.

En appliquant le théorème de superposition, on a :

1er cas : $C_r(p) = 0$ et $U(p) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_1(p)}{U(p)} = G_1(p) = \frac{K_1}{R + Lp \;\; rJ_r p + rf_r \;\; + K_1 K_0}$$

2ème cas : $U(p) = 0$ et $C_r(p) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_1(p)}{C_r(p)} = G_2(p) = -\frac{r \;\; R + Lp}{R + Lp \;\; rJ_r p + rf_r \;\; + K_1 K_0}$$

Donc

$$\Omega_1(p) = \frac{1}{R + Lp \cdot rJ_r p + rf_r + K_1K_0}\left[K_1.U(p) - r \; R + Lp \; C_r(p)\right]$$

$$G_1(p) = \frac{K_1}{R + Lp \;\; rJ_r p + rf_r + K_1K_0} \qquad G_2(p) = -\frac{r \; R + Lp}{R + Lp \;\; rJ_r p + rf_r + K_1K_0}$$

C.2.1.6- En se référant au tableau C.2 du dossier présentation, données et hypothèses, calculer, en fonction de $J_r$ la fonction de transfert du système $G_1(p) = \frac{\Omega_1(p)}{U(p)}$ que l'on exprimera sous la forme canonique d'un système du second ordre de gain $K$, de coefficient d'amortissement $m$ et de pulsation propre non amortie $\omega_0$.

$$G_1(p) = \frac{\Omega_1(p)}{U(p)} = \frac{K_1}{R + Lp \;\; rJ_r p + rf_r + K_1K_0} \text{ ; A.N. } G_1(p) = \frac{0.25}{4J_r p^2 + \; 24J_r + 6.25.10^{-3} \;\; p + 0.1}$$

$$G_1(p) = \frac{6.25.10^{-2}/J_r}{p^2 + \left(6 + \frac{1.5625}{J_r}10^{-3}\right)p + \frac{0.025}{J_r}} = \frac{Kw_0^2}{p^2 + 2mw_0 p + w_0^2}$$

C.2.1.7- En déduire les expressions de $K$, $m$ et $\omega_0$.

| | | |
|---|---|---|
| $K = 2.5$ | $w_0 = \sqrt{\frac{0.025}{J_r}}$ | $m = \frac{24J_r + 6.25.10^{-3}}{\sqrt{1.6J_r}}$ |

C.2.1.8- Calculer, suivant l'inertie $J_{rmin}$ ou $J_{rmax}$ du système, le coefficier 'amortissement $m$ et la pulsation propre non amortie $\omega_0$.

- Pour $J_{rmin} = 0.125\ 10^{-4}\ kg.m^2$, on a $\begin{cases} w_0 = w_{0max} = 44.72rd, \\ m = m_{max} = 1.464 \end{cases}$
- Pour $J_{rmax} = 0.125\ 10^{-3}\ kg.m^2$, on a $\begin{cases} w_0 = w_{0min} = 14.14rd/s \\ m = m_{min} = 0.654 \end{cases}$

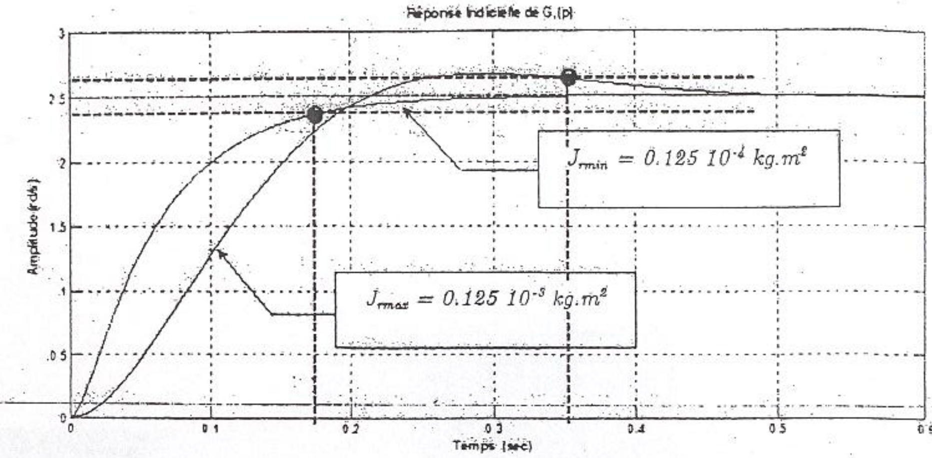
| | | | |
|---|---|---|---|
| $w_{0max} = 44.72rd/s$ | $m_{max} = 1.464$ | $w_{0min} = 14.14rd/s$ | $m_{min} = 0.654$ |







C.2.1.9- Dans la figure ci-dessous, on donne les réponses indicielles unitaires du système dans les deux cas ($J_{rmin}$ et $J_{rmax}$). Spécifier la correspondance de chacune des courbes à $J_{rmin}$ et $J_{rmax}$.




C.2.1.10- Déterminer le temps de stabilisation à ±5% correspondants. Conclure sur l'effet de $J_r$.

Pour $J_r = J_{rmin} = 0.125\ 10^{-4}\ kg.m^2$ et $J_r = J_{rmax} = 0.125\ 10^{-3}\ kg.m^2$ on a respectivement :

| | |
|---|---|
| $T_{s\,à\,\pm5\%} = 0.18s$ | $T_{s\,à\,\pm5\%} = 0.36s$ |

**Conclusion** Pour une charge légère, le système se stabilise rapidement

### C.2.2- Asservissement de vitesse du moteur

C.2.2.1- Calculer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ puis en boucle fermée $H(p)$.

Pour $J_r = J_{rmax} = 0.125\ 10^{-3}\ kg.m^2$

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par : $T(p) = \frac{500A}{p^2 + 18.5p + 200}$

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $H(p) = \frac{500A}{p^2 + 18.5p + 200 + 500A}$

C.2.2.2- Calculer en fonction de $A$, le gain statique $K$, la pulsation propre non amortie $\omega_0$ et le coefficient d'amortissement $m$ du système en boucle fermée.

$$H(p) = \frac{500A}{p^2 + 18.5p + 200 + 500A} = \frac{Kw_0^2}{p^2 + 2mw_0 p + w_0^2}$$

Par identification on a : $\begin{cases} Kw_0^2 = 500A \\ 2mw_0 = 18.5 \\ w_0^2 = 200 + 500A \end{cases}$

$\boxed{K = \frac{5A}{2+5A}}$ $\boxed{w_0 = 10\sqrt{2+5A}}$ $\boxed{m = \frac{0.925}{\sqrt{2+5A}}}$

C.2.2.3- Déterminer la valeur de $A$ qui garantit un dépassement D(%) = 16.3 %.

$D(\%) = 16.3\ \% = 100.e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} \Rightarrow m = 0.5 = \frac{0.925}{\sqrt{2+5A}}$, donc

$\boxed{A = 0.284}$

C.2.2.4- Calculer les erreurs statiques de position et de vitesse unitaires en fonction de $A$.

La fonction de Transfert B.O. est $T(p) = \frac{500A}{p^2 + 18.5p + 200}$

Système de classe 0, alors les erreurs sont données par :

$\boxed{\begin{cases} \varepsilon_p(\infty) = \frac{1}{1+2.5A} \\ \varepsilon_v(\infty) \to \infty \end{cases}}$

Dans la suite, on considère la forme suivante du correcteur : $R(p) = \frac{A}{p}$ avec $A > 0$.

C.2.2.5- Etudier la stabilité du système en boucle fermée en fonction de $A$. En déduire la valeur du gain critique $A_{osc}$ et la période d'oscillation correspondante $T_{osc}$ du système bouclé.

Pour $R(p) = \frac{A}{p}$, la fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :

$$T(p) = \frac{500A}{p\ p^2 + 18.5p + 200}$$

L'équation caractéristique du système est alors : $p^3 + 18.5p^2 + 200p + 500A = 0$

Condition 1 : Le système est stable si $A > 0$





Tableau de Routh :

| | | |
|---|---|---|
| $p^3$ | 1 | 200 |
| $p^2$ | 18.5 | 500A |
| $p^1$ | 200-27.03A | |
| $p^0$ | 500A | |

Condition 2 : Le système est stable si 200-27.03A > 0 ⇒ $A < 7.4$

Le système est alors stable ssi : $\boxed{0 < A < 7.4}$

Le gain critique est $A_{osc} = 7.4$, alors que le polynôme auxiliaire est : $18.5p^2 + 500A_{osc} = 0$

$\boxed{A_{osc} = 7.4}$ $\boxed{p_{1,2} = \pm j10\sqrt{2} \Rightarrow T_{osc} = 0.44s}$

C.2.2.6- Peut-on assurer une erreur statique de vitesse unitaire inférieure ou égale à 20% ?

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par : $T(p) = \frac{500A}{p\ p^2 + 18.5p + 200}$

Il s'agit d'un système de classe 1, alors $\varepsilon_v(\infty) = \frac{1}{2.5A}$

$$\varepsilon_v(\infty) \leq 20\% \Rightarrow \frac{1}{2.5A} \leq 20\% \Leftrightarrow A \geq 2$$

Pour que $\varepsilon_v(\infty) \leq 20\%$, il faut que $\boxed{2 \leq A < 7.4}$