REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique, des Technologies de
l'Information et de la Communication

Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2014

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
وتكنولوجيا المعلومات و الاتصال

المناظرات الوطنية لدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2014

Concours Physique et Chimie
Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 2 Juin 2014	Heure : 8 H	Durée: 4 heures	Nb pages: 5

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

N.B. Le sujet comporte deux problèmes totalement indépendants.

Problème 1

Rappels et Notations

Soit f une fonction 2π périodique continue par morçeaux. Les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont définis par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Partie I

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'espace vectoriel des fonctions développables en série entière en x et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante :

$$y' - xy = 1. \tag{1}$$

où y est une fonction inconnue continûment dérivable de la variable x.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (1) (*On donnera une solution particulière sous forme intégrale*).

   (b) En déduire que la solution f de l'équation différentielle (1) telle que $f(0) = 0$ s'écrit sous la forme :
$$f(x) = \exp(\frac{x^2}{2})\int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2})dt. \tag{2}$$

2. Dans cette question, y désigne une fonction de la variable réelle x, admettant un développement en série entière $y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p\, x^p$ sur $]-R, R[$ avec $R > 0$.

   (a) Montrer que, pour que y soit solution de (1) sur $]-R, R[$, il faut et il suffit que l'on ait :
$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ (p+1)\, a_{p+1} - a_{p-1} = 0, \quad \forall p \geqslant 1. \end{cases}$$

(b) En déduire que, si y est une solution de (1), on a :

$$\begin{cases} a_{2k} = \dfrac{1}{2^k k!} a_0, & \forall k \geqslant 0, \\ a_{2k+1} = \dfrac{2^k k!}{(2k+1)!}, & \forall k \geqslant 0. \end{cases}$$

(c) En déduire le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f donnée dans l'équation (2).

(d) Donner le rayon de convergence de la série associée à la fonction f.

(e) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = exp(-\frac{x^2}{2}).$$

i. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de g ainsi que son rayon de convergence.

ii. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $\displaystyle\int_0^x g(t)dt$ comme somme d'une série entière.

(f) En écrivant $f(1)$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}.$$

Partie II

Soit h la somme de la série entière définie par

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}. \tag{3}$$

L'objet de cette partie est de donner quelques propriétés de h.

1. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière (3).

   (b) En considérant la série de fonction de terme général $\dfrac{x^n}{n^2}$, montrer que la fonction h est continue sur $[-1, 1]$.

   (c) Calculer $h'(x)$ sous forme de série entière sur $]-1, 1[$.

   (d) En déduire, que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$h(x) = -\int_0^x \frac{ln(1-t)}{t} dt.$$

2. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $u(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, pour tout $x \in [0, 2\pi[$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(u) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(u) = \dfrac{1}{n}$.

   (b) En déduire que $h(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Montrer que la fonction Φ définie par :

$$\forall x \in]0,1[,\ \Phi(x) = h(x) + h(1-x) + \ln(x).\ln(1-x).$$

est de classe C^1 sur $]0,1[$.

4. Montrer que la fonction Φ est constante sur $]0,1[$ et vaut $h(1)$.

5. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln(2))^2.$$

Problème 2

Rappels et notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des nombres complexes.

Dans tout ce qui suit, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on adopte les notations suivantes :

- $\mathbb{R}^n$ est l'espace vectoriels des n-uplets à coefficients réels.
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(u_k)_k,\ \text{tel que } u_k \in \mathbb{K},\ \forall k \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des suites de $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}^n$ est l'espace vectoriels des n-uplets à coefficients réels ou complexes.
- Pour $X \in \mathbb{K}^n$, on note par $x_1, \cdots, x_n$ ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note par :
  - ⋆ $\det(A)$ le déterminant de A.
  - ⋆ $\ker(A) = \{X \in \mathbb{R}^n, AX = 0\}$.
  - ⋆ $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$.
  - ⋆ $Sp_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$.

Partie I

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On pose :

$$\mathbb{E} = \{(u_k)_k \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \text{tel que}\quad u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k,\quad \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Soit $\Phi : \mathbb{E} \to \mathbb{K}^2$ l'application définie par: $\Phi((u_k)_k) = (u_0, u_1)$.
   (a) Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et donner $\dim(\mathbb{E})$.
3. Soit $r \in \mathbb{K}$, $r \neq 0$. Montrer que les deux relations suivantes sont équivalentes :

(a) $(r^k)_k \in \mathbb{E}$.

(b) r est une solution de l'équation : $t^2 - at - b = 0 \quad (*)$.

4. On suppose que l'équation $(*)$ admet deux racines distinctes $r_1 \in \mathbb{K}$ et $r_2 \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $((r_1^k)_k, (r_2^k)_k)$ est une base de $\mathbb{E}$.

5. On suppose que l'équation $(*)$ admet une racine double $r_1 \in \mathbb{K}$.

   (a) Montrer que la suite $(kr_1^k)_k$ est un élément de $\mathbb{E}$.
   (Ind: on exprimera r_1 en fonction de a).

   (b) Montrer que la famille $((r_1^k)_k, (kr_1^k)_k)$ est une base de $\mathbb{E}$.

6. Calculer le terme général de la suite $(d_k)_k$ définie par :

$$\begin{cases} d_0 = 1,\ d_1 = 2, \\ d_{k+2} = 2d_{k+1} - d_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Partie II

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad \text{et} \quad L = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (L_i + |a_{i,i}|).$$

1. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ et $X \in E_\lambda(A)$.

   (a) Montrer qu'il existe $k \in \{1,\ 2, \cdots, n\}$ tel que :

$$|x_k| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i|).$$

   (b) Soit k l'entier trouvé dans la question précédente. Montrer que :

$$|\lambda - a_{k,k}| \leqslant L_k.$$

   (c) En déduire que $|\lambda| \leqslant L$.

2. On suppose que, pour tout $i \in \{1,\ 2, \cdots, n\}$, on a $|a_{i,i}| > L_i$.

   (a) Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de A.

   (b) En déduire que A est inversible.

Partie III

Soit $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A_n(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par :

$$A_n(\alpha,\ \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A_n(\alpha,\ \beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0,1)$.

2. On pose $B_n = A_n(2,1)$.

   (a) Calculer $\det(B_1)$ et $\det(B_2)$.

   (b) Montrer que $\det(B_n) = 2\det(B_{n-1}) - \det(B_{n-2})$ pour tout $n \geqslant 3$.

   (c) En utilisant la question 6. partie I, calculer $\det(B_n)$.

3. Déterminer $\ker(A_n(-2,1))$.

4. On pose $D_n = A_n(0,1)$. On admet que le $Sp_{\mathbb{C}}(D_n) = Sp_{\mathbb{R}}(D_n)$. Soit $\mu \in Sp_{\mathbb{R}}(D_n)$ et $X \in E_\mu(D_n)$.

   (a) Montrer, en utilisant la question 1.(c) de la partie II, que $|\mu| \leqslant 2$.

   (b) Montrer que $|\mu| < 2$ et en déduire qu'il existe $\theta \in]0,\pi[$ tel que $\mu = 2\cos(\theta)$.

   (c) Montrer que les composantes de X sont solutions de la récurrence :

$$\begin{cases} x_{k+1} - 2\cos(\theta)x_k + x_{k-1} = 0, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ x_0 = 0, x_{n+1} = 0. \end{cases}$$

   (d) En utilisant la question 6. de la partie I, exprimer x_k en fonction de θ et k, pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

   (e) En déduire que les valeurs possibles pour θ sont :

$$\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

   (f) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de D_n.

   (g) En déduire que D_n est diagonalisable.

5. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence :

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(D_n) \quad \text{si et seulement si } (\lambda + 2) \in Sp_{\mathbb{R}}(B_n).$$

   (b) Montrer que :

$$Sp_{\mathbb{R}}(B_n) = \left\{ 4\cos^2\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right);\quad 1 \leqslant j \leqslant n \right\}.$$

6. Etablir les identités suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) = 0,$$

$$\prod_{j=1}^{n} \cos^2\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{n+1}{4^n}.$$