Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session: Juin 2014

Concours en Physique Chimie

Correction de l'épreuve de Mathématiques

PROBLEME 1

Partie 1

1. (a) $y_h(x) = k\exp^{-\int x dx} = k\exp^{\frac{x^2}{2}} \quad k \in \mathbb{R}$ et $y_p(x) = k(x)\exp^{\frac{x^2}{2}}$

   où $k(x) = \int_\alpha^x \exp^{\frac{-t^2}{2}} dt$. et $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque.

$$y_G(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

   (b) pour $k = 0$ et $\alpha = 0$ on trouve $y(x) = f(x) = \exp(\frac{x^2}{2}) \int_0^x \exp(\frac{-t^2}{2})dt$ est la solution de (E) qui vérifie : $f(0) = 0$

2. (a)

$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p \quad \text{et donc } y'_p = \sum_{p=1}^{+\infty} p a_p x^{p-1}$$

   ainsi l'équation (E) donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{+\infty} p a_p x^{p-1} - \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^{p+1} = 1 \\ \text{ssi} \quad & \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) a_{p+1} x^p - \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^{p+1} = 1 \\ \text{ssi} \quad & \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) a_{p+1} x^p - \sum_{p=1}^{+\infty} a_{p-1} x^p = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ (p+1)\, a_{p+1} - a_{p-1} = 0, \quad \forall p \geqslant 1. \end{cases}$$

   d'où soit $k \geqslant 0$ posons $p = 2k + 1$

   - Pour $k = 0$ donne $p = 1$ et donc $2a_2 = a_0$
   - Pour $k = 1$ donne $p = 3$ et donc $4a_4 = a_2$
   - Pour $k - 1$ on aura $p = 2k - 1$ et donc $2ka_{2k} = a_{2k-2}$

d'o'u : $2^k k! a_{2k} = a_0$ et par suite $a_{2k} = \dfrac{a_0}{2^k k!}$

de même pour $k = 0$ on aura $a_1 = 1$ ce qui est vrai.
Soit $k \geqslant 1$ posons $p = 2k$

- Pour $k = 1$ donne $p = 2$ et donc $3a_3 = a_1 = 1$
- Pour $k = 2$ donne $p = 4$ et donc $5a_5 = a_3$
- Pour k quelconque on aura $p = 2k$ et donc $(2k+1)a_{2k+1} = a_{2k-1}$.

d'o'u :

$$3.5....(2k+1)a_{2k+1} = 1 \quad \text{et par suite} \quad a_{2k+1} = \frac{2^k k!}{(2k+1)!}$$

(b) $f(0) = 0$ et donc $a_0 = 0$ et par suite :

$$\begin{cases} a_{2k} = 0 & \forall k \geqslant 0, \\ a_{2k+1} = \dfrac{2^k k!}{(2k+1)!} & \forall k \geqslant 0. \end{cases}$$

(c) Ce qui donne le développement en série entière de f au voisinage de 0 suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

(d) La série entière $\displaystyle\sum_{k\leqslant 0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ possède le même rayon de convergence R_x que la série $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2k+1)!} x^{2k}$

et donc on posant $X = x^2$ on aura la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2k+1)!} X^k$ de rayon de convergence R_X
En utilisant la règle d'Alembert on aura $R_X = +\infty$ et par suite $R_x = +\infty$.

(e) $g(x) = \exp(\dfrac{-x^2}{2})$

i. $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\frac{-x^2}{2})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}$ et donc en posant $X = x^2$ on aura la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k X^k}{2^k k!}$ et qui a $+\infty$ comme rayon de convergence (d'après la règle d'Alembert) et par suite le rayon de convergence cherché vaut $+\infty$

ii. Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}$ a $+\infty$ comme rayon de convergence alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ la primitive de g qui s'annule en 0 s'écrira :

$$\int_0^x g(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k (2k+1) k!}$$

(f) On a d'une part d'après $(1) f(1) = \sqrt{e} g(1)$
ce qui donne

$$f(1) = \sqrt{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k (2k+1) k!})$$

Et d'autre part d'après (c)

$$f(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2k+1)!}$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}.$$

Partie 2

1. (a) En utilisant la règle d'Alembert on aura $R = 1$

   (b))Pour tout $x \in [-1,1]$ on a $\frac{|x^n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$
   Comme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente alors la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement et par suite uniformément sur $[-1,1]$, de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a la fonction $\frac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1,1]$ et donc d'après le théorème de continuité, on aura la somme h de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1,1]$.

   (c) Pour $x \in]-1,1[$,le théorème de dérivation des séries entières donne :

$$h'(x) \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

   or on sait que : $\forall t \in]-1,1[; log(1-t) = -\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ ce qui donne :

$$\frac{log(1-t)}{t} = -\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$$

   et donc :

$$\forall t \in]-1,1[\text{ on a:} h'(t) = \frac{-log(1-t)}{t}$$

   (d) Par suite on conclut, comme $h(0) = 0$, :

$$\forall x \in]-1,1[; h(x) = -\int_0^x \frac{ln(1-t)}{t} dt$$

2. (a) Par simple intégration par partie, on obtient :

$$a_n(u) = 0 \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } b_n(u) = \frac{1}{n}$$

   (b) En utilisant l'identité de Parseval :

$$\frac{1}{T}\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \frac{(a_0)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty}((a_n)^2 + (b_n)^2) \text{ (avec } T = 2\pi$$

On aura :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}=h(1)$$

3.

$$\forall x\in]0,1[\text{ on a } \Phi(x)=h(x)+h(1-x)+(Log(x))Log(1-x))$$

Φ est C^1 sur$]0,1[$ car $hetLog$ le sont $et\forall x\in]0,1[$ on a $(1-x)\in]0,1[$

4.

$$\forall x\in]0,1[,\Phi'(x)=h'(x)+h'(1-x)+\frac{Log(1-x)}{x}-\frac{Log(x))}{1-x}$$

or d'après 1)d) on a :$h'(x)=-\dfrac{Log(1-x)}{x}$ et donc $h'(1-x)=-\dfrac{Log(x)}{1-x}$ d'o'u :

$$\Phi'(x)=0,\forall x\in]0,1[\text{ et donc } \Phi(x)=cte \text{ sur }]0,1[$$

En calculant la limite en 1^- de Φ on aura $cte=h(1)+h(0)$ car h est continue en 0 et en 1 et car $(Log(x))(Log(1-x))$ admet 0 comme limite en 1^-
Enfin sachant que $h(0)=0$ on conclut le résultat.

5. En utilisant 2)b) et en remplaçant x par $\dfrac{1}{2}$ dans Φ on aura le résultat demandé.

PROBLÈME 2

PARTIE *I*

Soit $(a,b)\in\mathbb{K}^2$, $a\neq 0$ et $b\neq 0$. On pose :

$$E=\{(u_k)_k\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ telque : u_{k+2}=au_{k+1}+bu_k,\ \forall k\in\mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
   - Clairement, la suite nulle de $\mathbb{K}$ est dans E, donc $E\neq\emptyset$.
   - Soit $((u_k)_k,(v_k)_k)\in E^2$ et $\alpha\in\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{rcl}(\alpha u+v)_{k+2} & = & \alpha u_{k+2}+v_{k+2}\\ & = & \alpha(au_{k+1}+bu_k)+av_{k+1}+bv_k\\ & = & a(\alpha u_{k+1}+v_{k+1})+b(\alpha u_k+v_k)\\ & = & a(\alpha u+v)_{k+1}+b(\alpha u+v)_k,\end{array}$$

   donc $\alpha(u_k)_k+(v_k)_k\in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit $\Phi : E\to\mathbb{K}^2$ l'application définie par : $\Phi((u_k)_k)=(u_0,u_1)$.
   (a) Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.
   - Soit $((u_k)_k,(v_k)_k)\in E^2$ et $\alpha\in\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{rcl}\Phi(\alpha(u_k)_k+(v_k)_k) & = & \Phi(((\alpha u+v)_k)_k)\\ & = & ((\alpha u+v)_0,(\alpha u+v)_1)\\ & = & (\alpha u_0+v_0,\alpha u_1+v_1)\\ & = & \alpha(u_0,u_1)+(v_0,v_1)\\ & = & \alpha\Phi((u_k)_k)+\Phi((v_k)_k).\end{array}$$

   Ainsi Φ est linéaire.
   - $\Phi((u_k)_k)=(0,0)\Rightarrow(u_0,u_1)=(0,0)\Rightarrow u_0=u_1=0$.

   Par récurrence $u_k=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Ainsi Φ est injective.
   - $\forall(x,y)\in\mathbb{K}^2$, la suite $(v_k)_k$ de E définie par $v_0=x$ et $v_1=y$ vérifie bien $\Phi((v_k)_k)=(x,y)$.

   Il s'en suit que Φ est surjective.
   On en conclut que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

(b) En déduire que E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et donner $dim(E)$.

• E est isomorphe à $\mathbb{K}^2$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, donc E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $dim_{\mathbb{K}}(E) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2) = 2$.

3. Soit $r \in \mathbb{K}$, $r \neq 0$. Montrer que les deux relations suivantes sont équivalentes :

(a) $(r^k)_k \in E$..

(b) r est une solution de l'équation : $t^2 - at - b = 0 \quad (\star)$.

• Puisque $r \neq 0$ alors, on a :

$$\begin{aligned}(r^k)_k \in E &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ r^{k+2} = ar^{k+1} + br^k \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ r^{k+2} = (ar+b)r^k \\ &\Leftrightarrow r^2 = ar + b.\end{aligned}$$

4. On suppose que l'équation $(\star)$ admet deux racines distibctes $r_1 \in \mathbb{K}$ et $r_2 \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $((r_1^k)_k,(r_2^k)_k)$ est une base de E.

• Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned}\alpha(r_1^k)_k + \beta(r_2^k)_k = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \alpha r_1^k + \beta r_2^k = 0 \\ &\Rightarrow \alpha + \beta = 0 \ \ et \ \ \alpha r_1 + \beta r_2 = 0 \\ &\Rightarrow \beta = -\alpha \ \ et \ \ \alpha(r_1 - r_2) = 0.\end{aligned}$$

Comme $r_1 \neq r_2$ alors $\alpha = \beta = 0$.

Ainsi la famille $(r_1^k)_k,(r_2^k)_k)$ est libre.

• $Card((r_1^k)_k,(r_2^k)_k)) = 2 = dim_{\mathbb{K}}(E)$, donc la famille $((r_1^k)_k,(r_2^k)_k)$ est génératrice.

On en conclut que la famille $((r_1^k)_k,(r_2^k)_k)$ est une base de E.

5. On suppose que l'équation $(\star)$ admet une racine double $r_1 \in \mathbb{K}$.

(a) Montrer que la suite $(kr_1^k)_k$ esu un élément de E.

• En remarquant que $r_1 = \dfrac{a}{2}$ et en utilisant le fait que

$$r_1^{k+2} - ar_1^{k+1} - br_1^k = 0,$$

(voir la question précédente) alors, on a :

$$(k+2)r_1^{k+2} - a(k+1)r_1^{k+1} - bkr_1^k = k(r_1^{k+2} - ar_1^{k+1} - br_1^k) + r_1^{k+1}(2r_1 - a) = 0,$$

donc la suite $(kr_1^k)_k$ est un élément de E.

(b) Montrer que la famille $((r_1^k)_k,(kr_1^k)_k)$ est une base de E.

• Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$. Puisque $r_1 \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}\alpha(r_1^k)_k + \beta(kr_1^k)_k = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \alpha r_1^k + \beta kr_1^k = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \alpha + k\beta = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0.\end{aligned}$$

Ainsi la famille $(r_1^k)_k,(r_2^k)_k)$ est libre.

• $Card((r_1^k)_k,(kr_1^k)_k)) = 2 = dim_{\mathbb{K}}(E)$, donc la famille $((r_1^k)_k,(kr_1^k)_k)$ est génératrice.

On en conclut que la famille $((r_1^k)_k,(kr_1^k)_k)$ est une base de E.

6. Calculer le terme général de la suite $(d_k)_k$ définie par : $\begin{cases} d_0 = 1,\ d_1 = 2, \\ d_{k+2} = 2d_{k+1} - d_k,\ \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

• L'équation $r^2 - 2r + 1 = 0$ admet une racine double $r_1 = 1$. D'aprés 5)b), il existe un unique couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $(d_k)_k = \alpha(1)_k + \beta(k)_k$ donc $d_k = \alpha + k\beta$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Avec $d_0 = 1$ et $d_1 = 2$, on obtient $\alpha = \beta = 1$ et par suite

$$d_k = k + 1,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

PARTIE *II*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On posr : $L_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i} |a_{i,j}|$ et $L = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n}(L_i + |a_{i,i}|)$.

1. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ et $X \in E_\lambda(A)$.

(a) Montrer qu'il existe $k \in \{1,2,...,n\}$ tel que : $|x_k| = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i|)$.

• L'ensemble $\{|x_1|,|x_2|,...,|x_n|\}$ est fini, donc il admet un maximum et par suite, il existe $k \in \{1,2,...,n\}$ tel que : $|x_k| = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i|)$.

(b) Soit k l'entier trouvé dans la question précédente. Montrer qu'on a :

$$|\lambda - a_{k,k}| \leqslant L_k.$$

• Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Comme $AX = \lambda X$ alors pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$,

$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}x_j = (\lambda - a_{i,i})x_i$ et donc $\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{k,j}x_j = (\lambda - a_{k,k})x_k$.

D'où :

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{k,k}||x_k| &= |\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{k,j}x_j| \\ &\leqslant \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{k,j}||x_j| \\ &\leqslant L_k|x_k|. \end{aligned}$$

Comme $|x_k| > 0$, alors $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant L_k$.

(c) En déduire que : $|\lambda| \leqslant L$.

• $\begin{aligned} |\lambda| &\leqslant |\lambda - a_{k,k}| + |a_{k,k}| \\ &\leqslant L_k + |a_{k,k}| \\ &\leqslant L. \end{aligned}$

2. On suppose que pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$, on a $|a_{i,i}| \geqslant L_i$.

(a) Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de A.

• Si 0 est une valeur propre de A, alors d'aprés la question précédente, il existe $k \in \{1,2,...,n\}$ tel que $|0 - a_{k,k}| = |a_{k,k}| \leqslant L_k$, ce qui est absurde, donc 0 n'est pas une valeur propre de A.

(b) En déduire que A est inversible.

• 0 n'est pas une valeur propre de A donc $det(A) \neq 0$ et par suite A est inversible.

PARTIE *III*

$(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $A_n(\alpha,\beta) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} \alpha, & si\ \ i = j, \\ \beta, & si\ \ |i-j| = 1, \\ 0, & si\ \ non. \end{cases}$

1. Vérifier que : $A_n(\alpha,\beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0,1)$.

• C'est clair que $\alpha I_n + \beta A_n(0,1) = A_n(\alpha,\beta)$.

2. On pose : $B_n = A_n(2,1)$.

(a) Calculer $det(B_1)$ et $det(B_2)$.

• Comme $B_1 = (2)$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, alors $det(B_1) = 2$ et $det(B_2) = 3$.

(b) Montrer que $det(B_n) = 2det(B_{n-1}) - det(B_{n-2})$ poor tout $n \geqslant 3$.

• En développant suivant la première colonne, on obtient :

$$det(B_n) = 2det(B_{n-1}) - \Delta_n \text{ avec } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

En développant suivant la première ligne, on obtient $\Delta_n = det(B_{n-2})$. D'où le résultat.

(c) En utilisant la question 6, partie I, calculer $det(B_n)$.

• En posant $d_n = det(B_n)$, alors d'aprés la question 6, partie I, il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $d_n = a + bn$, $\forall n \geqslant 1$. Avec $d_1 = 2$ et $d_2 = 3$, on trouve $a = 1$ et $b = 1$ et par suite $d_n = n + 1$.

3. Déterminer $ker(A_n(-2,1))$.

Soit $X =^t (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$. En posant $A_n(-2,1)X =^t (a_1,...,a_n)$ alors un calcul simple montre que $a_1 = -2x_1 + x_2$, $a_k = x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}$ pour tout $2 \leqslant k \leqslant n-1$ et $a_n = x_{n-1} - 2x_n$.

Si $A_n(-2,1)X = 0$ alors les $(n-1)$ premières équations donnent $x_k = kx_1$ pour tout $2 \leqslant k \leqslant n$ et la dernière donne $(n-1)x_1 = 2nx_1$ donc $x_1 = 0$ et par suite $x_k = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$. Ainsi : $ker(A_n(-2,1)) = \{0\}$.

4. On pose : $D_n = A_n(0,1)$. On admet que $Sp_{\mathbb{C}}(D_n) = Sp_{\mathbb{R}}(D_n)$.
Soit $\mu \in Sp_{\mathbb{R}}(D_n)$ et $X \in E_\mu(D_n)$.

(a) Montrer, en utilisant la question 1.c) de la partie II, que $|\mu| \leqslant 2$.
• Pour la matrice D_n, on a : $L_1 + |a_{1,1}| = 1$, $L_i + |a_{i,i}| = 2$ pour tout $2 \leqslant i \leqslant n-1$ et $L_n + |a_{n,n}| = 1$. D'où $L = 2$ et par suite $|\mu| \leqslant 2$, d'aprés la question 1)c) de la partie II.

(b) Montrer que $|\mu| < 2$ et en déduire qu'il existe $\theta \in]0,\pi[$ tel que $\mu = 2\cos(\theta)$.
• Puisque $ker(A_n(-2,1)) = \{0\}$ alors la matrice $D_n - 2I_n$ est inversible et par suite 2 n'est pas une valeur propre de D_n.
De même $det(D_n + 2I_n) = det(B_n) \neq 0$ donc (-2) n'est pas une valeur propre de D_n.
Il s'en suit que $|\mu| < 2$.
L'application $2\cos$ est une bijection de $]0.\pi[$ sur $]-2,2[$ donc il existe $\theta \in]0,\pi[$ tel que $\mu = 2\cos(\theta)$.

(c) Montrer que les composantes de X sont solutions de la récurrence : $\begin{cases} x_{k+1} - 2\cos(\theta)x_k + x_{k-1} = 0, \ 1 \leqslant k \leqslant \\ x_0 = 0, \ x_{n+1} = 0. \end{cases}$
• On a $D_nX = 2\cos(\theta)X$ donc les composantes de X sont solutions du système :

$$\begin{cases} -2\cos(\theta)x_1 + x_2 = 0, \\ x_{k+1} - 2\cos(\theta)x_k + x_{k-1} = 0, \ 2 \leqslant k \leqslant n-1, \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta)x_n = 0. \end{cases}$$

Si on impose les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, on trouve le système demandé.

(d) En utilisant la question 6, de la partie I, calculer x_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
• Les solutions de l'équation $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ donc il existe un unique couple $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$x_k = ue^{ik\theta} + ve^{-ik\theta}.$$

Comme $x_k \in \mathbb{R}$, alors $v = \overline{u}$.

(e) En déduire que les valeurs possibles pour θ sont : $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$, $1 \leqslant j \leqslant n$.
• la condition $x_0 = 0$ donne $\overline{u} = -u$ donc $u \in i\mathbb{R}$ et la condition $x_{n+1} = 0$ donne $u\sin((n+1)\theta) = 0$.
Si $X \neq 0$ alors $u \neq 0$ et par suite $\sin((n+1)\theta) = 0$. Il s'en suit que $\theta = \dfrac{j\pi}{n+1} = \theta_j$, $j \in \mathbb{Z}$.
Comme $\theta_j \in]0,\pi[$ alors $1 \leqslant j \leqslant n$.

(f) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de D_n.
• Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} x_k &= u(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) \\ &= 2iu\sin(k\theta), \end{aligned}$$

donc le vecteur V de compsantes $v_k = \sin(k\theta)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ est un vecteur propre de D_n associé à la valeur propre $\mu = 2\cos(\theta)$.
Il s'en suit que pour chaque $1 \leqslant j \leqslant n$, le vecteur V_j de composantes $v_k^{(j)} = \sin(k\theta_j)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ est un vecteur propre de D_n associé à la valeur propre $\mu_j = 2\cos(\theta_j)$. Comme les θ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ sont distinctes deux à deux et la fonction cos est bijective sur l'intervalle $]0,\pi[$, alors les valeurs propres μ_j sont distinctes deux à deux.
Puisque $Card\{\mu_j, \ 1 \leqslant j \leqslant n\} = n$, alors on en conclut que

$$Sp_{\mathbb{R}}(D_n) = \{\mu_j, \ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

et les X_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, sont les vecteurs propres de D_n.

(g) En déduire que D_n est diagonalisable.
• D_n admet n valeurs propres simples donc elle est diagonalisable.

5. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence :

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(D_n) \Leftrightarrow (\lambda+2) \in Sp_{\mathbb{R}}(B_n).$$

$$\begin{aligned} \bullet\ \lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(D_n) &\Leftrightarrow det(D_n - \lambda I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow det(B_n - 2I_n - \lambda I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow det(B_n - (\lambda+2)I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda+2) \in Sp_{\mathbb{R}}(B_n). \end{aligned}$$

(b) Montrer que : $Sp_{\mathbb{R}}(B_n) = \{4\cos^2(\frac{j\pi}{2(n+1)});\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

$$\begin{aligned} \bullet\ Sp_{\mathbb{R}}(B_n) &= \{\lambda+2,\ \lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(D_n)\} \\ &= \{\mu_j+2,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ &= \{2\cos(\frac{j\pi}{n+1})+2,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ &= \{4\cos^2(\frac{j\pi}{2(n+1)}),\ 1 \leqslant j \leqslant n\}. \end{aligned}$$

6. Etablir les identités suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} \cos(\frac{j\pi}{n+1}) = 0,$$

$$\prod_{j=1}^{n} \cos^2(\frac{j\pi}{2(n+1)}) = \frac{n+1}{4^n}.$$

• Comme D_n est diagonalisable, alors $Tr(D_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$. Il s'en suit que :

$$\sum_{j=1}^{n} \cos(\frac{j\pi}{n+1}) = 0.$$

• De même, B_n est diagonalsable car elle admet n valeurs propres simples, donc $det(B_n) = \prod_{j=1}^{n}(4\cos^2(\frac{j\pi}{2(n+1)}))$. Avec $det(B_n) = n+1$, on obtient :

$$\prod_{j=1}^{n} \cos^2(\frac{j\pi}{2(n+1)}) = \frac{n+1}{4^n}.$$

■■■★★★★★■■■