Concours Physique et Chimie
Correction de l'epreuve de Mathématiques

EXERCICE

1. Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$:
   - La propriété est vraie pour $p = 0$ car $U^0 = I_n$ et $QV^0Q^{-1} = I_n$.
   - Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $U^p = QV^pQ^{-1}$. On a :
   $U^{p+1} = U^pU = (QV^pQ^{-1})(QVQ^{-1}) = QV^p(Q^{-1}Q)VQ^{-1} = QV^pVQ^{-1} = QV^{p+1}Q^{-1}$.
   La rècurrence est achevée.

2. • Il existe $Q \in GL_2(\mathbb{C})$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $M = Qdiag(\lambda,\mu)Q^{-1}$. D'aprés 1), pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M^p = Q(diag(\lambda,\mu))^pQ^{-1} = Qdiag(\lambda^p,\mu^p)Q^{-1}$.
   • $\lim\limits_{p\to+\infty} M^p = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{p\to+\infty} diag(\lambda^p,\mu^p) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{p\to+\infty} \lambda^p = \lim\limits_{p\to+\infty} \mu^p = 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$.

3. (a) Un calcul simple donne $N^2 = 0$.

   (b) Puisque I_2 et N commutent, d'aprés la formule du binôme de Newton,
   $T^p = (N+\alpha I_2)^p = \sum\limits_{i=0}^{p} C_p^i N^i(\alpha I_2)^{p-i} = \sum\limits_{i=0}^{p} C_p^i \alpha^{p-i}N^i$. Comme $N^k = 0, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$,
   alors $T^p = \alpha^{p-0}N^0 + p\alpha^{p-1}N^1 = \alpha^pI_2 + p\alpha^{p-1}N$.

   (c) On a : $T^p = \begin{pmatrix} \alpha^p & p\alpha^{p-1}\beta \\ 0 & \alpha^p \end{pmatrix}$. Donc la suite $(T^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si les suites $(\alpha^p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(p\alpha^{p-1}\beta)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $|\alpha| < 1$ ou ($\beta = 0$ et $\alpha = 1$) si et seulement si $|\alpha| < 1$ ou $T = I_2$.

4. (a) Le polynôme caractéristique de M est de degré 2 et scindé dans $\mathbb{C}$, comme M est non diagonalisable, M admet une valeur propre double dans $\mathbb{C}$.

   (b) Soit V_1 un vecteur propre associé à α_0, on le complète en une base (V_1,V_2) de $\mathbb{C}^2$. Si Q est la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base, on obtient alors : $M = Q\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}Q^{-1}$.
   $Tr(M) = 2\alpha_0$ donc $\gamma_0 = \alpha_0$.
   Si $\beta_0 = 0$, alors M est semblable à α_0I_2 donc $M = \alpha_0I_2$ et par suite diagonalisable, ce qui est absurde, donc. $\beta_0 \neq 0$.

   (c) D'aprés 3)c), La suite $(M^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si la suite $(T^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   Puisque $\beta_0 \neq 0$, d'aprés 3)c), la suite $(T^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si $|\alpha_0| < 1$.
   Dans le cas de convergence, la suite $(M^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5. (a) On a : $A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$ avec $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
   Par une récurrence sur p, et le calcul de produits de matrices définies par blocs, on trouve : $A^0 = I_3$ et $A^p = \begin{pmatrix} \gamma^p & 0 \\ 0 & T^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^p & p\alpha^{p-1}\beta \\ 0 & 0 & \alpha^p \end{pmatrix}$ pour $p \in \mathbb{N}^\star$.

   (b) La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ si et seulement si la suite $(\gamma^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ et la suite $(T^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si ($|\gamma| < 1$ ou $\gamma = 1$)

et ($T = I_2$ ou $|\alpha| < 1$) si et seulement si ($|\gamma| < 1$ et $T = I_2$) ou ($|\gamma| < 1$ et $|\alpha| < 1$) ou ($\gamma = 1$ et $T = I_2$) ou ($\gamma = 1$ et $|\alpha| < 1$).

PROBLÈME

Partie I

1.

(a) • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(2t\,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n t^n}{n!} x^n$, avec un rayon de convergence infini.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$, avec un rayon de convergence infini.

(b) • Ψ_t est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, comme étant la composée de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi_t^{(n)}(x) = (-1)^n \Phi^{(n)}(t-x)$.

$\star$ La propriété est vraie pour $n = 0$ car $\Psi_t^{(0)}(x) = \Psi_t(x)$ et $(-1)^0 \Phi^{(0)}(t-x) = \Psi_t(x)$.

$\star$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\Psi_t^{(n)}(x) = (-1)^n \Phi^{(n)}(t-x)$. On a $\Psi_t^{(n+1)}(x) = [\Psi_t^{(n)}(x)]' = (-1)^n [\Phi^{(n)}(t-x)]' = (-1)^n (-1) \Phi^{(n+1)}(t-x) = (-1)^{n+1} \Phi^{(n+1)}(t-x)$.

La rècurrence est achevée.

• En particulier, $\Psi_t^{(n)}(0) = (-1)^n \Phi^{(n)}(t)$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi_t(x) = \Phi(t-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-(t-x)^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) \exp(2t\,x) \exp(-x^2)$ $= \Phi(t) \exp(2t\,x) \exp(-x^2)$, donc Ψ_t est développable en série entière en $x = 0$ avec un rayon de convergence infini comme le produit de deux telles fonctions.

(d) Comme Ψ_t est développable en série entière en $x = 0$ avec un rayon de convergence infini, elle est égale à sa série de Taylor en 0.

(e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Psi_t^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \Phi^{(n)}(t)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \Phi(t) H_n(t)}{n!} x^n$,

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(t)}{k!} x^k = \frac{\Psi_t(x)}{\Phi(t)} = \exp(2t\,x) \exp(-x^2) = G_t(x)$.

(f) Comme la fonction $x \mapsto G_t(x)$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on peut la dériver terme à terme.

(g) En dérivant la relation (1) par rapport à x, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2(t-x)G_t(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kH_k(t)}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k(t)}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k.$$

2. (a) Comme $\Phi^{(0)}(t) = \Phi(t)$ et $\Phi^{(1)}(t) = -2t\Phi(t)$, alors $H_0(t) = 1$ et $H_1(t) = 2t$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2(t-x)G_t(x) = 2(t-x) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(t)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2tH_k(t)}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2H_k(t)}{k!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2tH_k(t)}{k!} x^k -$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2H_{k-1}(t)}{(k-1)!} x^k = 2t + \sum_{k=1}^{+\infty} [\frac{2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)}{k!}] x^k = H_1(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} [\frac{2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)}{k!}] x^k$$

et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k = H_1(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k$.

Il s'en suit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} [\frac{2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)}{k!}] x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k$.

Par identification, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $H_{k+1}(t) = 2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)$.

(c) Posons $d_k = deg(H_k)$ et a_k le coefficient dominant de H_k. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $d_k = k$ et $a_k = 2^k$.
• La propriété est vraie pour $k = 0$ car $H_0 = 1$ donc $d_0 = 0$ et $a_0 = 1 = 2^0$.
• Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Supposons $d_k = k$ et $a_k = 2^k$. On a $H_{k+1}(t) = 2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)$ donc le coefficient dominant de H_{k+1} et son degré sont ceux de $2tH_k(t)$ et par suite $d_{k+1} = d_k + 1 = k+1$ et $a_{k+1} = 2a_k = 2^{k+1}$.
La rècurrence est achevée.

Partie II

1. (a) $(1+x^2)\Phi^{(k)}(x)P(x) = (-1)^k(1+x^2)H_k(x)P(x)\Phi(x) = (-1)^k(1+x^2)H_k(x)P(x)\exp(-x^2)$.
Comme l'application : $x \mapsto (-1)^k(1+x^2)H_k(x)P(x)$ est une fonction polynôme, alors $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (1+x^2)\Phi^{(k)}(x)P(x) = 0$.

(b) L'application : $x \mapsto \Phi^{(k)}(x)P(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\Phi^{(k)}(x)P(x) = o\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ quand $|x| \to +\infty$ donc l'application : $x \mapsto \Phi^{(k)}(x)P(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(c) Une intégration par parties donne :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P(t)dt = [P(t)\Phi^{(k-1)}(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k-1)}(t)P'(t)dt.$$
Comme $\lim\limits_{|t|\to+\infty} P(t)\Phi^{(k-1)}(t) = 0$, on a bien le résultat.

2. (a) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(k)}(t)dt$.
• La propriété est vraie pour $k = 0$ car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(0)}(t)P(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P(t)dt$ et $\displaystyle(-1)^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(0)}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P(t)dt$.
• Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(k)}(t)dt$.
D'aprés 1)c), $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k+1)}(t)P(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P'(t)dt$ et d'aprés l'hypothèse de récurrence, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P'(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)(P')^{(k)}(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(k+1)}(t)dt$.
D'ou : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k+1)}(t)P(t)dt = (-1)^{k+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(k+1)}(t)dt$ et la récurrence est achevée.

(b) Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$.

i. H_nH_m est un polynôme, d'aprés 1)b), l'application $x \mapsto H_n(x)H_m(x)\Phi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |H_n(t)H_m(t)\Phi(t)|dt$ existe et par suite l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt$ existe.

ii. • $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_m(t)\Phi^{(n)}(t)dt$ et d'aprés 2)a) de cette question, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(t)\Phi^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)}(t)\Phi(t)dt$, d'ou :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)}(t)\Phi(t)dt.$$

• En échangeant les rôles de H_n et H_m, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(m)}(t)\Phi(t)dt.$$

(c) • Si $n < m$, $H_n^{(m)} = 0$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = 0$.

• Si $m < n$, $H_m^{(n)} = 0$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = 0$.

• Si $n = m$, $H_n^{(n)} = 2^n n!$ car H_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n. Il s'en suit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n n!\Phi(t)dt = 2^n n!$ car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)dt = 1$.

3. (a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $h_n(t)h_m(t) = \sqrt{\pi}H_n(t)H_m(t)\Phi(t)$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)h_m(t)dt$ existe.

(b) D'aprés 2)c) de cette partie, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)h_m(t)dt = \begin{cases} 0, & si\ n \neq m, \\ \sqrt{\pi}\, 2^n n!, & si\ n = m. \end{cases}$

4. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq (|f(x)| - |g(x)|)^2 = f^2(x) + g^2(x) - 2|f(x)g(x)|$ donc $|f(x)g(x)| \leq \dfrac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x))$.

(b) Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors d'aprés a) de cette question, fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(c) • C'est clair que la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est dans E donc $E \neq \emptyset$.
• Soit $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $(\lambda f + g)^2 = \lambda^2 f^2 + g^2 + 2\lambda fg$. Comme les fonctions $\lambda^2 f^2$, g^2 et $2\lambda fg$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour $(\lambda f + g)^2$ donc $(\lambda f + g) \in E$.
On en conclut que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et par suite E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

5. Pour tout $(f,g,h) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
• $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$,
• $\langle \lambda f + g, h\rangle = \lambda\langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$,
• $\langle f,f\rangle \geq 0$,
• $\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ car la fonction f^2 est continue et positive sur $\mathbb{R}$.
On en conclut que l'application $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur E.

6. (a) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $(h_0P)^2 = \sqrt{\pi}P^2\Phi$. Comme P^2 est un polynôme, d'aprés 1)b) de cette partie, $x \mapsto P^2(x)\Phi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par suite, l'application $x \mapsto h_0(x)P(x)$ est dans E.

(b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n = h_0H_n$ donc $h_n \in E$.
• La famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle .,.\rangle$ d'aprés 3)b) de cette partie.
Il s'en suit que $(\dfrac{h_n}{\|h_n\|})_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de E pour le produit scalaire $\langle .,.\rangle$.

Partie III

1. (a) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|h_0(t)\exp(i\,t\,x)| \leq |h_0(t)|$ et h_0 est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $t \mapsto h_0(t)\exp(i\,t\,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) • $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\widetilde{h_0}(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h_0(t)|dt$, donc $\widetilde{h_0}$ est bornée.

• $\star$ $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h_0(t)\exp(i\,t\,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\star$ $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h_0(t)\exp(it\,x)$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

$\star$ $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|h_0(t)\exp(i\,t\,x)| \leq |h_0(t)|$ et $|h_0|$ est une fonction continue (donc continue par morceaux), positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Il s'en suit que $\widetilde{h_0}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) $\star$ $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h_0(t)\exp(i\,t\,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|h_0(t)\exp(i\,t\,x)| \leq h_0(t)$ et h_0 est positive continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

$\star$ $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h_0(t)\exp(i\,t\,x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial h_0}{\partial x}(x,t) = ith_0(t)\exp(i\,t\,x)$.

$\star$ $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto it\,h_0(t)\exp(i\,t\,x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$\star$ $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|it\,h_0(t)\exp(i\,t\,x)| \leq |t|h_0(t)$ et la fonction $t \mapsto |t|h_0(t)$ est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$

Ainsi, $\widetilde{h_0}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{h_0}'(x) = \dfrac{i}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} th_0(t)\exp(i\,t\,x)dt$.

(b) • Posons $u(t) = i\exp(i\,t\,x)$ et $v'(t) = th_0(t)$. On a : $u'(t) = -x\exp(i\,t\,x)$ et $v(t) = -h_0(t)$. Une intégration par parties donne :

$$\widetilde{h_0}'(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}[\exp(i\,t\,x)h_0(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\,t\,x)h_0(t)dt$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}[\exp(i\,t\,x)h_0(t)]_{-\infty}^{+\infty} - x\widetilde{h_0}(x).$$

Puisque $|\exp(i\,t\,x)h_0(t)| \leq h_0(t)$ et $\lim\limits_{|t|\to+\infty} h_0(t) = 0$, alors $\lim\limits_{|t|\to+\infty} \exp(i\,t\,x)h_0(t) = 0$

et par suite $\widetilde{h_0}'(x) + x\widetilde{h_0}(x) = 0$.

• $\widetilde{h_0}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$. Le changement de variable $z = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ donne

$$\widetilde{h_0}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z)dz = 1.$$

(c) Les solutions de l'équation $y' + xy = 0$ sont de la forme $x \mapsto C\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. La condition initiale donne $C = 1$. Ainsi, $\widetilde{h_0} = h_0$.

Partie IV

1. (a) $\lim\limits_{|n|\to+\infty} (1+n^2)u_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{|n|\to+\infty} (1+n^2)u_n'(x) = 0$ donc $u_n(x) = o\left(\dfrac{1}{1+n^2}\right)$ et $u_n'(x) = o\left(\dfrac{1}{1+n^2}\right)$ quand $|n| \to +\infty$.

(b) Soit $[\alpha,\beta]$ un segment de $\mathbb{R}$. En posant $a = \max(|\alpha|,|\beta|)$, on a $a > 0$ et $[\alpha,\beta] \subset [-a,a]$. Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $2\pi n_1 > a$. Pour tout $x \in [-a,a]$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq n_1$, on a $|x - 2\pi n| \geq 2\pi|n| - |x| \geq 2\pi|n| - a \geq 2\pi n_1 - a > 0$ donc $(x-2\pi n)^2 \geq (2\pi|n| - a)^2$ et par suite $u_n(x) \leq u_{|n|}(a)$.

On a : $\forall x \in [-a,a]$, $\forall |n| \geq n_1$, $u_n'(x) = (2\pi n - x)u_n(x)$ donc

$$|u_n'(x)| \leq |2\pi n + a|u_{|n|}(a) \leq \left[\frac{2\pi|n|+a}{2\pi|n|-a}\right]|u_{|n|}'(a)|.$$

On a $u_{|n|}(a) = o\left(\dfrac{1}{1+n^2}\right)$ et $\left[\dfrac{2\pi|n|+a}{2\pi|n|-a}\right]u_{|n|}'(a) = o\left(\dfrac{1}{1+n^2}\right)$ quand $|n| \to +\infty$.

Il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(|n| \geq n_2 \Rightarrow |u_{|n|}(a)| \leq \dfrac{1}{1+n^2})$ et il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(|n| \geq n_3 \Rightarrow \left[\dfrac{2\pi|n|+a}{2\pi|n|-a}\right] |u'_{|n|}(a)| \leq \dfrac{1}{1+n^2})$.
Posons $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in [-a,a]$, $(|n| \geq n_0 \Rightarrow |u_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+n^2})$ et $(|n| \geq n_0 \Rightarrow |u'_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+n^2})$.
Ainsi, les séries $\sum\limits_{|n|\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{|n|\geq n_0} u'_n$ sont normalement convergentes sur $[-a,a]$.

(c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ comme dans b).
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, u_n est de classe C^1 sur $[-a,a]$.
- La série $\sum\limits_{|n|\geq n_0} u_n$ est normalement convergente donc convergente sur $[-a,a]$.
- La série $\sum\limits_{|n|\geq n_0} u'_n$ est normalement convergente et par suite uniformément convergente sur $[-a,a]$.

Ainsi, la série $\sum\limits_{|n|\geq n_0} u_n$ est bien définie et sa somme est de de classe C^1 sur $[-a,a]$. Il s'en suit que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ est bien définie et sa somme U est de de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, U(x+2\pi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{2}(x+2\pi-2n\pi)^2\right) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{2}(x-2(n-1)\pi)^2\right)$.
En faisant le changement de variable $m = (n-1)$, on obtient : $U(x+2\pi) = U(x)$.

3. (a) Par convergence normale, en écrivant $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$ et avec les changements de variables $y = t - 2n\pi$ et $y = t + 2n\pi$, on montre que :
$c_p = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\widetilde{h_0}(-p) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}h_0(p)$.

(b) U est $2\pi-$périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sa série de Fourier complexe converge normalement vers U sur $\mathbb{R}$.

(c) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{2}(x-2n\pi)^2\right) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(inx) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} h_0(n)\exp(inx)$
En faisant $x = 0$, on obtient : $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-2n^2\pi^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{n^2}{2}\right)$.