République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2018

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2018

Concours Physique et Chimie
Epreuve de Mathématiques

Date: Jeudi 31 mai 2018	Heure: 8H	Durée : 4H	Nbre de pages : 4
Barème :	Problème 1 : 13 points	Problème 2 : 7 points	

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème 1

Dans ce problème $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel réel des polynômes, et pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

Partie I.

1. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\exp(-t^2)dt$ est convergente.
2. (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(t) \geq (1+t)$.

   (b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(1-t^2) \leq \exp(-t^2) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt \leq \int_0^{+\infty} \exp(-nt^2)dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt.$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)dt \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)dt.$$

   (c) En utilisant le fait que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, montrer que : $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   (d) Déterminer les valeurs des intégrales suivantes :
$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}}dt, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\exp(-t))}{t\sqrt{t}}dt.$$

Partie II.

1. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ donnée par :
$$\Phi(P,Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\exp(-t^2)dt$$
définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1}\exp(-t^2)dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+2}\exp(-t^2)dt = \frac{(2n+1)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n}\exp(-t^2)dt.$$

3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $\Gamma(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2 - xt - y)^2\exp(-t^2)dt$.
   (a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\Gamma(x,y) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}x^2 + y^2 - y$.
   (b) Calculer en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial y}(x,y)$, et en déduire que Γ admet un unique point critique.
   (c) Montrer que Γ admet un minimum local (x_0,y_0) que l'on précisera. Montrer que $2\Gamma(x,y) \geq 1$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer, alors, que (x_0,y_0) est un minimum absolu de la fonction Γ.
   (d) En déduire la distance entre le polynôme X^2 et le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

Partie III.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|1-\cos(t)| \leq \dfrac{t^2}{2}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{2}{t^2}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(xt)}{t^2}dt$.
   Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = f(1)|x|$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt$.
   Montrer que la fonction F est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$, puis donner la valeur de $F(0)$.
4. Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :
$$(E) : y''(x) - y(x) = \frac{\pi}{2} - f(1)x, \quad x > 0.$$
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos(tx))}{t^2(1+t^2)}dt$.
   (a) Montrer que, la fonction G est bien définie sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F(0) - F(x) + G(x) = f(1)|x|$.
   (b) Montrer que la fonction G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $G'' = F$.
   (c) En déduire que G est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (d) Déterminer F sur $\mathbb{R}_+^*$, puis en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-|x|}$.
   (e) En calculant $G'(0)$, montrer que $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Partie IV.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos^n(t))}{t^2}dt$.
   Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, et montrer que : $u_1 = u_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,+\infty[$, on pose : $f_n(t) = \dfrac{1-\cos^n\left(\sqrt{\dfrac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n$.

(b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|1-\cos^n(t)| \leq \frac{nt^2}{2}$.

(c) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right| \leq t$.

(d) Montrer que, pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1-\exp(-t)}{t\sqrt{t}}$.

(e) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} v_n = I_3$.

(f) En déduire que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

Partie V.

Dans cette partie, pour $p,q \in \mathbb{Z}$, on note $[[p,q]]$ l'ensemble des nombres entiers relatifs compris (au sens large) entre les nombres p et q.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, à valeurs dans $\{-1,1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k=1) = P(X_k=-1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\Omega) \subset [[-n,n]]$, et calculer l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ de la variable aléatoire S_n.
2. Soit S et T deux variables aléatoires finies indépendantes définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On suppose que T et $(-T)$ ont la même loi. Montrer que $E(\sin(T))=0$, et en déduire que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $E(\cos(tS_n)) = \cos^n(t)$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}u_n$.
4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(S_{2n+1}=0)=0$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \sum_{j=-n}^{n} |j|P(S_n=j)$.

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![-2n-2, 2n+2]\!]$,

$$\begin{cases} P((S_{2n+2}=j)\cap(X_{2n+2}=-1)) = \frac{1}{2}P(S_{2n+1}=j+1), \\ P((S_{2n+2}=j)\cap(X_{2n+2}=1)) = \frac{1}{2}P(S_{2n+1}=j-1). \end{cases}$$

   (d) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(|S_{2n+2}|) = \frac{1}{2}\sum_{k=-2n-1}^{2n+1}(|k-1|+|k+1|)P(S_{2n+1}=k)$.

   (e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = u_{2n+1}$.

Problème 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on désigne par :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace réel des matrices carrées d'ordre n. I_n la matrice identité.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A)$ (resp. ${}^tA$) est le déterminant de A (resp.la transposée de A).
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tAA = I_n\}$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / \det(A)=1\}$.
- $\det(f)$ est le déterminant d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) / \det(f)=1\}$.
- $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Partie I.

1. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.
   (a) Montrer que, pour toute valeur propre réelle λ de f, on a : $\lambda \in \{-1,1\}$.
   (b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si F est stable par f, alors l'orthogonal $F^{\perp}$ de F est aussi stable par f.

2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$. Calculer $R_\theta \times R_{\theta'}$. En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $R_\theta^p = R_{p\theta}$.
   (c) Pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice R_θ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

Partie II.

Pour tout vecteur unitaire a de $\mathbb{R}^3$, on désigne par σ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\sigma_a(x) = 2\langle x,a\rangle a - x.$$

1. (a) Montrer que σ_a est une symétrie vectorielle différente de $Id_{\mathbb{R}^3}$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\sigma_a - Id_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(\sigma_a + Id_{\mathbb{R}^3})$.
   (c) En déduire que σ_a est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}a$.
   (d) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$. Déterminer la matrice de σ_a, dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, adaptée à cette décomposition. En déduire que $\sigma_a \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$.
2. Soit $r \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$ et a un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $r \circ \sigma_a \circ r^{-1} = \sigma_{r(a)}$.
3. Soit (u,v,w) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\sigma_u \circ \sigma_v = \sigma_w$.

Partie III.

Soit $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$, tel que $f \neq Id_{\mathbb{R}^3}$. On note $P_f = det(X\, Id_{\mathbb{R}^3} - f)$ le polynôme caractéristique de f.

1. Montrer que P_f admet une racine réelle λ_0.
2. Soit u un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_0.
   (a) Montrer que $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$ est stable par f.
   (b) En déduire qu'il existe une base orthonormée (v,w) de $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$ et $\theta \in]0,\pi]$ tels que :

$$f(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)w \quad \text{et} \quad f(w) = -\sin(\theta)v + \cos(\theta)w.$$

   (c) Exprimer $\det(f)$ en fonction de λ_0. En déduire que $\lambda_0 = 1$.
   (d) Montrer que la matrice de f dans la base (u,v,w) est R_θ, où R_θ est donnée dans la partie **I.2**.
3. On suppose que $\theta \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ et on considère l'application $\Psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \langle f(x),x\rangle$.
   (a) Montrer que Ψ est continue sur $\mathbb{R}^3$, et calculer $\Psi(u)$ et $\Psi(v)$.
   (b) Soit $\mathbb{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On admet que $\Psi(\mathbb{S})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
   Montrer que $\Psi(\mathbb{S})$ contient 0.
   (c) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(a)$ soit orthogonal à a.
4. On pose $b = f(a)$ et soit $c \in \mathbb{R}^3$ tels que (a,b,c) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que : $\sigma_a \circ f \circ \sigma_a^{-1} \circ f^{-1} = \sigma_c$. (On pourra utiliser **II.2** et **II.3**).

Fin de l'énoncé