Problème 1 : 13 pts

Partie I

1. L'application : $t \mapsto P(t)\exp(-t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{|t|\to+\infty} t^2P(t)\exp(-t^2) = 0$ donc les intégrales $\int_{-\infty}^{0} P(t)\exp(-t^2)dt$ et $\int_{0}^{+\infty} P(t)\exp(-t^2)dt$ sont convergentes et par suite, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\exp(-t^2)dt$ est convergente.

2. (a) Si $x \geq 0$, alors $e^x \geq 1 \Rightarrow \int_0^u e^x dx \geq \int_0^u 1dx \Rightarrow e^u - 1 \geq u$.

   Si $x \leq 0$, alors $e^x \leq 1 \Rightarrow \int_u^0 e^x dx \leq \int_u^0 1dx \Rightarrow 1 - e^u \leq -u \Rightarrow e^u - 1 \geq u$.

   Par conséquent, $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u \geq 1 + u$.

   Remarque : on peut étudier le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $u \mapsto e^u - u - 1$.

   (b) On a d'après (a), $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(t^2) \geq 1 + t^2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+t^2} \geq \exp(-t^2)$.

   On a aussi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(-t^2) \geq (1-t^2)$. On en déduit : $(1-t^2) \leq \exp(-t^2) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.

3. (a) $\forall t \in [0,1]$, $(1-t^2)^n \leq \exp(-nt^2)$ donc $\int_0^1 (1-t^2)^n dt \leq \int_0^1 \exp(-nt^2)dt$.

   $\forall t \in [0,+\infty[$, $\exp(-nt^2) \leq \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ donc $\int_0^{+\infty} \exp(-nt^2)dt \leq \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)^n}dt$.

   Enfin, puisque $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(-nt^2) \geq 0$, on a $\int_0^1 \exp(-nt^2)dt \leq \int_0^{+\infty} \exp(-nt^2)dt$.

   D'ou la conclusion.

   (b) Le changement de variable $t = \sin(u)$ donne : $\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(u)du$.

   Le changement de variable $u = \sqrt{n}\,t$ donne : $\int_0^{+\infty} \exp(-nt^2)dt = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt$.

   Le changement de variable $t = \tan(u)$ donne : $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)^n}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)du$.

   On obtient alors : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(u)du \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)du$.

   (c) En utilisant le fait que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(u)du \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)du \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$, par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   (d) • La fonction $t \mapsto \exp(-t^2)$ est paire sur $\mathbb{R}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt = 2\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}$.

   • Le changement de variable $u = t^2$ donne $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = 2\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}$.

   • Une intégration par parties donne : $\int_0^{+\infty} \dfrac{(1-e^{-u})}{u\sqrt{u}}du = \left[\dfrac{2(e^{-u}-1)}{\sqrt{u}}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = 2\sqrt{\pi}$.

Partie II

1. • C'est évident que Φ est symétrique.
   • $\forall P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\Phi(\lambda P+Q)=\lambda\Phi(P)+\Phi(Q)$ par linéarité de l'intégrale.
   • $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $\Phi(P,P)\geq 0$.
   • $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $\Phi(P,P)=0\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}P^2(t)\exp(-t^2)dt=0$. Comme la fonction $t\mapsto P^2(t)\exp(-t^2)$ est continue et positive el la fonction $t\mapsto\exp(-t^2)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors $P^2=0$ et par suite $P=0$.
   Il s'en suit Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. • L'application $t\mapsto t^{2n+1}\exp(-t^2)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}t^{2n+1}\exp(-t^2)dt=0$.
   • Une intégration par parties donne :
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{2n+2}\exp(-t^2)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty}t^{2n+1}(t\exp(-t^2))dt=-\frac{1}{2}[t^{2n+1}\exp(-t^2)]_{-\infty}^{+\infty}\\ &+\frac{(2n+1)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{2n}\exp(-t^2)dt=\frac{(2n+1)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{2n}\exp(-t^2)dt\end{aligned}$$

3. (a) D'aprés 2) de cette partie, on a :
$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^3\exp(-t^2)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}t\exp(-t^2)dt=0,\ \int_{-\infty}^{+\infty}t^2\exp(-t^2)dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t^2)dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}t^4\exp(-t^2)dt=\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\exp(-t^2)dt=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.
On développe $(t^2-xt-y)^2=t^4-2xt^3+(x^2-2y)t^2+2xyt+y^2$.
Le calcul donne : $\Gamma(x,y)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}x^2-y+y^2$.

   (b) On a : $\dfrac{\partial\Gamma}{\partial x}(x,y)=x$ et $\dfrac{\partial\Gamma}{\partial y}(x,y)=2y-1$.
$\dfrac{\partial\Gamma}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial\Gamma}{\partial y}(x,y)=0\Leftrightarrow x=0$ et $y=\dfrac{1}{2}$.
Γ admet $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ comme point critique.

   (c) • Γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, $r=\dfrac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}(x,y)=1$, $t=\dfrac{\partial^2\Gamma}{\partial y^2}(x,y)=2$ et $s=\dfrac{\partial^2\Gamma}{\partial x\partial y}(x,y)=0$.
En $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, on a $r=1>0$ et $rt-s^2=2>0$ donc Γ admet $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ comme minimum local.
• $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $2\Gamma(x,y)=x^2+2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+1\geq 1$.
• $\Gamma(x,y)-\Gamma\left(0,\dfrac{1}{2}\right)=\Gamma(x,y)-\dfrac{1}{2}\geq 0$ donc $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un maximum absolu de Γ.

   (d) Notons $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire Φ. Comme l'application : $(x,y)\mapsto xX+y$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}_1[X]$, on a :
$$\frac{1}{2}=\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\Gamma(x,y)=\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\|X^2-(xX+y)\|^2=\min_{P\in\mathbb{R}_1[X]}\|X^2-P\|^2=(d(X^2,\mathbb{R}_1[X]))^2.$$
Ainsi, $d(X^2,\mathbb{R}_1[X])=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Partie III

1. • La fonction cos est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, d'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $t\in\mathbb{R}$, il existe $\theta\in]0,1[$ tel que $\cos(t)=1-\dfrac{t^2}{2}\cos(\theta t)$, ce qui donne : $\forall t\in\mathbb{R}\ |1-\cos(t)|\leq\dfrac{t^2}{2}$.
   Remarque : On peut utiliser l'égalité $(1-\cos(t))=2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$ et l'inégalité $|\sin(t)|\leq|t|$, pour tout $t\in\mathbb{R}$.
   • $\forall t\in\mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\right|\leq\dfrac{1+|\cos(t)|}{t^2}\leq\dfrac{2}{t^2}$.

2. • $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{(1-\cos(xt))}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(1-\cos(xt))}{t^2} = \dfrac{x^2}{2}$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{(1-\cos(xt))}{t^2}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{(1-\cos(xt))}{t^2} \leq \dfrac{2}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{t^2}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[1,+\infty[$. Il s'en suit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe.

• Pour $x = 0$, on a $f(0) = 0 = f(1)|0|$. Pour $x \neq 0$, comme la fonction cos est paire, on a $\cos(tx) = \cos(t|x|)$. Avec le changement de variable $u = t|x|$, on obtient $f(x) = |x| \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(t))}{t^2} dt = f(1)|x|$.

3. $\star$ Posons : $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, $u(x,t) = \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
• $\forall t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, $|u(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'aprés le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$\star$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} |u(x,t)|dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

$\star$ $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

4. La solution générale sur $\mathbb{R}_+^\star$ de l'équation homogène $y'' - y = 0$ est de la forme $x \mapsto ae^x + be^{-x}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. De plus, la fonction $x \mapsto f(1)x - \dfrac{\pi}{2}$ est une solution particulière de l'équation (E). Ainsi, la solution générale sur $\mathbb{R}_+^\star$ de l'équation différentielle (E) est de la forme $x \mapsto ae^x + be^{-x} + f(1)x - \dfrac{\pi}{2}$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(tx))}{t^2(1+t^2)} dt$.

(a) • $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{(1-\cos(tx))}{t^2(1+t^2)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(1-\cos(xt))}{t^2(1+t^2)} = \dfrac{x^2}{2}$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{(1-\cos(xt))}{t^2(1+t^2)}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{(1-\cos(xt))}{t^2(1+t^2)} \leq \dfrac{2}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{t^2}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[1,+\infty[$. Il s'en suit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ existe.

. • $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(0) - F(x) + G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(xt))}{t^2} = f(1)|x|$.

(b) $\star$ Posons : $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$, $v(x,t) = \dfrac{(1-\cos(tx))}{t^2(1+t^2)}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto v(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car elle est positive, continue par morceaux et $\displaystyle\int_0^{+\infty} v(x,t)dt$ existe.

• $\forall t \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto v(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$ et $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\cos(tx)}{(1+t^2)}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)$ et $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \left|\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right|$ est positive et continue sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to 0} \left|\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right| = |x|$ donc elle se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $\forall t \geq 1$, $\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[1,+\infty[$. Il s'en suit que la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive, contine par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'aprés le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} = F(x)$.

(c) D'aprés 5)b) de cette partie, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\dfrac{\pi}{2} - G''(x) + G(x) = f(1)x$. Il s'en suit que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $G''(x) - G(x) = \dfrac{\pi}{2} - f(1)x$. Ainsi, G est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(d) D'aprés la question 4) de cette partie, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $F(x) = G''(x) = ae^x + be^{-x}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $|a| \leq e^{-x}|F(x)| + |b|e^{-2x}$. Puisque F est bornée sur $\mathbb{R}_+^\star$, en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $a = 0$. Puisque F est paire, on a $\forall x \in \mathbb{R}_-^\star$, $F(x) = be^x$. Enfin, puisque F est continue sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-|x|}$.

(e) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}dt$ donc $G'(0) = 0$.

Or, $\forall x > 0$, $G'(x) = -\dfrac{\pi}{2}e^{-x} + f(1)$ et G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc $G'(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0^+} G'(x) = f(1) - \frac{\pi}{2}$.

Il s'en suit que : $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Partie IV

1. • La fonction $t \mapsto \dfrac{(1-\cos^n(t))}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus,

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1-\cos^n(t)}{t^2}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1-\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^n}{t^2}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1-\left(1-n\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)}{t^2}\right] = \lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{2}+o(1)\right).$$

Il s'en suit que $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos^n(t))}{t^2} = \frac{n}{2}$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{(1-\cos^n(t))}{t^2}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$. De plus, $\forall t \geq 1$, $\left|\dfrac{(1-\cos^n(t))}{t^2}\right| \leq \dfrac{2}{t^2}$ et la fondonc $t \mapsto \dfrac{2}{t^2}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[1,+\infty[$. Il s'en suit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bien définie.

• D'après la question 5)e) de la partie III, on a $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

$$u_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos^2(t))}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(2t))}{2t^2}dt = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a) Le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{2u}{n}}$ donne $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n$.

(b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $(1-\cos^n(t)) = (1-\cos(t))\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos^k(t)$ donc en utilisant la question 1) de la partie III, $|1-\cos^n(t)| \leq \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|\cos^k(t)|\right)|1-\cos(t)| \leq n\dfrac{t^2}{2}$.

(c) En utilisant 2)b) de cette partie, on obtient : $\forall t \in [0,1]$, $\left|1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right| \leq \frac{n}{2}\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)^2 = t$.

(d) Soit $t > 0$. On a $\forall n \geq 1$, $\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right) = \exp\left(n \ln\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right)\right)$.

Or $\frac{2t}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $\cos\left(\frac{2t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Comme $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)$ et $(\cos(x)-1) \underset{x\to 0}{\sim} \left(-\frac{x^2}{2}\right)$, on obtient $\ln\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)-1\right) \underset{n\to+\infty}{\to} -\frac{t}{n}$.

Par produit, $n \ln\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} (-t)$ et par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, il vient $\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right) = \exp\left(n \ln\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-t}$.

Il s'en suit que $\forall t > 0$, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{(1-e^{-t})}{t\sqrt{t}}$.

(e) • On a f_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \frac{(1-e^{-t})}{t\sqrt{t}}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'aprés 2)c), $\forall t \in]0,1]$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\forall t \in [1,+\infty[$, $|f_n(t)| \leq \frac{2}{t\sqrt{t}}$.

Posons $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & si\ t \in]0,1] \\ \frac{2}{t\sqrt{t}}, & si\ t \in [1,+\infty[\end{cases}$

Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ et la fonction $t \mapsto \frac{2}{t\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, alors la fonction g est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,+\infty[$, $|f_n(t)| \leq g(t)$.

D'aprés le théorème de convergence dominée, $v_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-t})}{t\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{\pi}$.

(f) On a $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 2\sqrt{\pi}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

Partie IV

1. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons s le nombre de variables aléatoires X_k, $1 \leq k \leq n$ qui prennent la valeur (-1). On a donc $(n-s)$ variables aléatoires X_k qui prennent la valeur 1.

   Pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = s \times (-1) + (n-s) \times 1 = n - 2s$.

   Ainsi, $S_n(\Omega) = \{n-2s, \quad s \in [\![0,n]\!]\} \subset [\![-n,n]\!]$.

   • Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, an a $E(X_k) = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$ et $V(X_k) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} - 0^2 = 1$.

   Par linéarité, on en déduit que : $E(S_n)) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$. En outre, les variables aléatoires $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ sont mutuellement indépendantes, d'où : $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n$.

2. • Les variables aléatoires T et $(-T)$ ont la même loi donc les variables aléatoires $\sin(T)$ et $\sin(-T)$ ont également même loi. De ce fait et par linéarité de l'espérance, $E(\sin(T)) = E(\sin(-T)) = -E(\sin(T))$

donc $E(\sin(T)) = 0$.

• On a $\cos(S+T) = \cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T)$. Puisque les variables aléatoires S et T sont finies et indépendantes, $\cos(S)$, $\cos(T)$, $\sin(S)$ et $\sin(T)$ le sont aussi. Par linéarité de l'espérance, il vient que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)) - E(\sin(S))E(\sin(T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.

3. (a) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

• $E(\cos(tS_1)) = E(\cos(tX_1)) = \dfrac{1}{2}\cos(t) + \dfrac{1}{2}\cos(-t) = \cos(t)$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

• Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$:
On a $E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(tS_n + tX_{n+1}))$. Or les variables aléatoires tS_n et tX_{n+1} sont finies et indépendantes. De plus, par définition de la loi de la variable aléatoire X_{n+1}, les variables alatoires tX_{n+1} et $t(-X_{n+1})$ ont même loi. On déduit du résultat de 2) que :
$E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(tS_n))E(\cos(tX_{n+1})) = \cos^n(t)\cos(t) = \cos^{n+1}(t)$.
La récurrence est donc achevée.

(b) D'aprés le théorème de transfert, $|S_n|$ admet une espérance et $E(|S_n|) = \sum_{k \in S_n(\Omega)} |k| P(S_n = k)$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(kt))}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}|k|$, on a $\displaystyle E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\sum_{k \in S_n(\Omega)} P(S_n = k)\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos(kt))}{t^2}dt$.

L'ensemble $S_n(\Omega)$ étant fini, on obtient par linéarité de l'intégrale
$$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k \in S_n(\Omega)} P(S_n = k)\frac{(1-\cos(kt))}{t^2}\right)dt.$$
Or, $\sum_{k \in S_n(\Omega)} P(S_n = k) = 1$ et $\sum_{k \in S_n(\Omega)} P(S_n = k)\cos(kt) = E(\cos(tS_n))$ d'aprés le théorème de transfert.

Par conséquent, $\displaystyle E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1-E(\cos(tS_n)))}{t^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos^n(t))}{t^2}dt = \frac{2}{\pi}u_n$.

4. (a) Pour tout $\omega \in \Omega$, $S_{2n+1}(\omega) = 2n+1-2s$ avec $s \in [\![0,n]\!]$ et $(S_{2n+1}(\omega) = 0 \Leftrightarrow 2n+1-2s = 0)$, ce qui est impossible. Ainsi, l'événement $(S_{2n+1} = 0)$ est impossible et $P(S_{2n+1} = 0) = 0$.

(b) En remarquant que $(S_n(\Omega), [\![-n,n]\!] \setminus S_n(\Omega))$ forme une partition de $[\![-n,n]\!]$ et lorsque $j \in [\![-n,n]\!] \setminus S_n(\Omega)$, on a $P(S_n = j) = 0$. Il vient :
$$\sum_{j=-n}^{n} |j| P(S_n = j) = \sum_{j \in S_n(\Omega)} |j| P(S_n = j) + \sum_{j \in [\![-n,n]\!]\setminus S_n(\Omega)} |j| P(S_n = j) = E(|S_n|).$$

(c) • Les événements $(S_{2n+1} = j+1)$ et $(X_{2n+2} = -1)$ sont indépendants, donc
$$\begin{aligned} P((S_{2n+2} = j) \cap (X_{2n+2} = -1)) &= P((S_{2n+1} = j+1) \cap (X_{2n+2} = -1)) \\ &= P((S_{2n+1} = j+1))P((X_{2n+2} = -1)) \\ &= \frac{1}{2}P((S_{2n+1} = j+1)). \end{aligned}$$

• Les événements $(S_{2n+1} = j-1)$ et $(X_{2n+2} = 1)$ sont indépendants, donc
$$\begin{aligned} P((S_{2n+2} = j) \cap (X_{2n+2} = 1)) &= P((S_{2n+1} = j-1) \cap (X_{2n+2} = 1)) \\ &= P((S_{2n+1} = j-1))P((X_{2n+2} = 1)) \\ &= \frac{1}{2}P((S_{2n+1} = j-1)). \end{aligned}$$

(d) La famille $((X_{2n+2} = 1), (X_{2n+2} = -1))$ est un système complet d'évenements de Ω. D'aprés la formule des probabilités totales, pour tout $j \in [\![-2n-2, 2n+2]\!]$, on a :
$$\begin{aligned} P(S_{2n+2} = j) &= P((S_{2n+2} = j) \cap (X_{2n+2} = -1) \cup (S_{2n+2} = j) \cap (X_{2n+2} = 1)) \\ &= P((S_{2n+1} = j+1) \cap (X_{2n+2} = -1)) + P((S_{2n+1} = j-1) \cap (X_{2n+2} = 1)) \\ &= \frac{1}{2}P((S_{2n+1} = j+1)) + \frac{1}{2}P((S_{2n+1} = j-1)) \end{aligned}$$

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned}
E(|S_{2n+2}|) &= \sum_{j=-2n-2}^{2n+2} |j|P(S_{2n+2}=j)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=-2n-2}^{2n+2} |j|P(S_{2n+1}=j+1)+\sum_{j=-2n-2}^{2n+2} |j|P(S_{2n+1}=j-1)\right).\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=-2n-1}^{2n+1} (|k-1|+|k+1|)P(S_{2n+1}=k)
\end{aligned}$$

(e) Comme $P(S_{2n+1}=0)=0$, on a :

$$\begin{aligned}
E(|S_{2n+2}|) &= \frac{1}{2}\sum_{j=-2n-1}^{2n+1} (|k-1|+|k+1|)P(S_{2n+1}=k)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=-2n-1}^{-1} (|k-1|+|k+1|)P(S_{2n+1}=k)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n+1}(|k-1|+|k+1|)P(S_{2n+1}=k).\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=-1}^{2n+1}(-2k)P(S_{2n+1}=k)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n+1}2kP(S_{2n+1}=k)=\sum_{j=-2n-1}^{2n+1}|k|P(S_{2n+1}=k)\\
&= E(|S_{2n+1}|)
\end{aligned}$$

On en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{2n+2}=u_{2n+1}$.

Problème 2 : 7 pts

Partie I

1. Soit $f\in O(\mathbb{R}^n)$

   (a) Soit $\lambda\in Sp_{\mathbb{R}}(f)$ et x un vecteur propre associé à λ. On a $x\neq 0$ et $f(x)=\lambda x$. Comme $f\in O(\mathbb{R}^n)$, on a : $||x||=||f(x)||=|\lambda|||x||$ donc $|\lambda|=1$.

   (b) Supposons F est stable par f et soit $(x,y)\in F\times f(F^{\perp})$. Il existe $y'\in F^{\perp}$ tel que $y=f(y')$. Puisque $f\in O(\mathbb{R}^n)$ et F est stable par f, f_F l'endomorphisme de F induit par f est une isométrie de F, donc f_F est une bijection de F et par suite, il existe $x'\in F$ tel que $x=f(x')$. On a maitenant $\langle x,y\rangle=\langle f(x'),f(y')\rangle=\langle x',y'\rangle=0$ car $y'\in F^{\perp}$ et $x'\in F$. Ceci étant vrai pour tout $x\in F$ et $y\in f(F^{\perp})$, donc $f(F^{\perp})\subset F^{\perp}$.

2. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On pose $R_\theta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\0&\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$.

   (a) On vérifie façilement que ${}^tR_\theta R_\theta=I_3$ et $\det(R_\theta)=1$ donc $R_\theta\in SO_3(\mathbb{R})$.

   (b) • $R_\theta R_{\theta'}=R_{\theta+\theta'}$.
   • Par récurrence sur $p\in\mathbb{N}$, $R_\theta^p=R_{p\theta}$.
   • Soit $p\in\mathbb{Z}_-^\star$. On pose $m=-p\in\mathbb{N}^\star$.
   Puisque $R_\theta R_{-\theta}=R_0=I_3$, on a $R_\theta^p=R_\theta^{-m}=(R_\theta^{-1})^m=R_{-\theta}^m=R_{-m\theta}=R_{p\theta}$.

   (c) • Dans $\mathbb{C}$, $P_{R_\theta}(X)=(X-1)(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$. On a $e^{i\theta}=e^{-i\theta}\Leftrightarrow\theta\in\pi\mathbb{Z}$. Ainsi :
   Si $\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$, $R_\theta=I_3$ donc R_θ est digonalisable.
   Si $\theta\in\pi(2\mathbb{Z}+1)$, $R_\theta=diag(1,-1,-1)$, donc R_θ est digonalisable.
   Si $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$, P_{R_θ} est scindé et à racines simples donc R_θ est diagonalisable.
   • Dans $\mathbb{R}$, $P_{R_\theta}(X)=(X-1)(X-2\cos(\theta)X+1)$.
   Si $\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$, $R_\theta=I_3$ donc R_θ est digonalisable.
   Si $\theta\in\pi(2\mathbb{Z}+1)$, $R_\theta=diag(1,-1,-1)$, donc R_θ est digonalisable.
   Si $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$, P_{R_θ} n'est pas scindé donc R_θ n'est pas diagonalisable.

Partie II

On considère l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \langle ./. \rangle)$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle ./. \rangle$. Pour tout vecteur unitaire a de $\mathbb{R}^3$, on désigne par σ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\sigma_a(x) = 2\langle x/a \rangle a - x$.

1. (a) • $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\sigma_a^2(x) = \sigma_a(2\langle x/a \rangle a - x) = 2\langle x/a \rangle \sigma_a(a) - \sigma_a(x) = 2\langle x/a \rangle a - (2\langle x/a \rangle a - x) = x$ donc $\sigma_a^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$.
   • Si $x \in (\mathbb{R}a)^{\perp} \setminus \{0\}$, $\sigma_a(x) = -x \neq x$ donc $\sigma_a \neq Id_{\mathbb{R}^3}$.

   (b) • $x \in Ker(\sigma_a - Id_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow x = 2\langle x/a \rangle a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}a$. D'ou : $Ker(\sigma_a - Id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}a$.
   • $x \in Ker(\sigma_a + Id_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow \langle x/a \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in (\mathbb{R}a)^{\perp}$. D'ou : $Ker(\sigma_a + Id_{\mathbb{R}^3}) = (\mathbb{R}a)^{\perp}$.

   (c) Puisque σ_a une symétrie vectorielle et $Ker(\sigma_a + Id_{\mathbb{R}^3}) = Ker(\sigma_a - Id_{\mathbb{R}^3})^{\perp}$, alors σ_a est la symétrie orthogonale pa rapport à la droite $Ker(\sigma_a - Id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}a$.

   (d) • Comme $Vect(a)$ et $Vect(a)^{\perp}$ sont deux sev orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie, alors $\mathbb{R}^3 = Vect(a) \oplus Vect(a)^{\perp}$.
   • Soit (u, v, w) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = Vect(a) \oplus Vect(a)^{\perp}$.
   On a : $\sigma_a(u) = u$, $\sigma_a(v) = -v$ et $\sigma_a(w) = -w$ donc $Mat_{(u,v,w)}(\sigma_a) = diag(1, -1, -1)$.
   • $det(\sigma_a) = det(Mat_{(u,v,w)}(\sigma_a)) = 1$.
   • σ_a est une symétrie orthogonale donc $\sigma_a \in O_3(\mathbb{R})$. Comme $det(\sigma_a) = 1$ alors $\sigma_a \in SO_3(\mathbb{R})$.

2. Soit $r \in SO(\mathbb{R}^3)$ et $a \in \mathbb{R}^3$ unitaire.
   $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\sigma_a \circ r^{-1}(x) = \sigma_a(r^{-1}(x)) = 2\langle r^{-1}(x)/a \rangle a - r^{-1}(x) = 2\langle x/r(a) \rangle a - r^{-1}(x)$ donc
   $r \circ \sigma_a \circ r^{-1}(x) = 2\langle x/r(a) \rangle r(a) - r(r^{-1}(x)) = 2\langle x/r(a) \rangle r(a) - x = \sigma_{r(a)}(x)$. D'ou : $r \circ \sigma_a \circ r^{-1} = \sigma_{r(a)}$.

3. Soit (u, v, w) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
   • Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Puisque (u, v, w) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, alors $x = \langle x, u \rangle u + \langle x, v \rangle v + \langle x, w \rangle w$.
   • $\forall x \in \mathbb{R}^3$, on a $\sigma_u \circ \sigma_v(x) = \sigma_u(\sigma_v(x)) = 2\langle \sigma_v(x)/u \rangle u - \sigma_v(x)$.
   Or, $\langle \sigma_v(x)/u \rangle = \langle 2\langle v, x \rangle v - x, u \rangle = 2\langle v, x \rangle \langle v, u \rangle - \langle x, u \rangle = -\langle x, u \rangle$. Il vient,
   $\sigma_u \circ \sigma_v(x) = \sigma_u(\sigma_v(x)) = x - 2(\langle x, u \rangle u + \langle x, v \rangle v) = x - 2(x - \langle x, w \rangle w) = 2\langle x, w \rangle w - x = \sigma_w(x)$.
   D'ou ; $\sigma_u \circ \sigma_v = \sigma_w$.

Partie III

Soit $f \in SO(\mathbb{R}^3)$, $f \neq Id_{\mathbb{R}^3}$.

1. L'application $t \mapsto P_f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, P_f est unitaire et de degré 3, donc $\lim\limits_{t \to -\infty} P_f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} P_f(t) = +\infty$. D'aprés le théorème des valeurs intermédiares, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P_f(\alpha) = 0$. D'aprés $I)1)a)$, $\alpha \in \{-1, 1\}$.
   Notons m_α l'ordre de multiplicité de α et $E_\alpha(f)$ le sous-espace propre de f associé à α. On a alors les possibiltés suivantes :
   i) Si $m_\alpha = 1$, on prend $\lambda_0 = \alpha$.
   ii) Si $m_\alpha = 2$, alors P_f admet une autre racine simple β. On prend dans ce cas $\lambda_0 = \beta$.
   iii) Si $m_\alpha = 3$, alors on a nécessairement $\alpha = 1$. En effet, si $\alpha = -1$, et puisque P_f est scindé sur $\mathbb{R}$, on obtient $det(f) = -1$, ce qui est absurde.
   On distingue les cas suivants :
   • Si $dim(E_1(f) = 3$, alors $f = Id_{\mathbb{R}^3}$, ce qui est absurde.
   • Si $dim(E_1(f)) = 2$, alors $dim((E_1(f)^{\perp}) = 1$. De plus, $E_1(f)$ est stable par f, d'aprés $I)1)b)$, $E_1(f)^{\perp}$ est stable par f. Soit (e_1, e_2) une base o.n de $E_1(f)$ et e_3 un vecteur unitaire de $E_1(f)^{\perp}$. On a $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ et il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_3) = \gamma e_3$. La matrice de f dans la base o.n (e_1, e_2, e_3) est $diag(1, 1, \gamma)$. Il vient alors $1 = det(f) = \gamma$, donc $P_f = (X-1)^3$ et $m_1 = 3$, ce qui est absurde.
   • Si $dim(E_1(f)) = 1$, alors $dim((E_1(f)^{\perp}) = 2$. De plus, $E_1(f)$ est stable par f, d'aprés $I)1)b)$, $E_1(f)^{\perp}$ est stable par f. Soit e_3 un vecteur unitaire de $E_1(f)$ et (e_1, e_2) une base o.n de $E_1(f)^{\perp}$. On a $f(e_1) = e_1$

et il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(e_2) = ae_2 + be_3$ et $f(e_3) = ce_2 + de_3$. La matrice de f dans la base o.n (e_1,e_2,e_3) est $diag(1,A)$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $f \in SO(\mathbb{R}^3)$, alors $A \in SO_2(\mathbb{R})$. Il s'en suit que f admet seulement 1 comme valeur propre réelle ou 1 comme valeur propre simple et (-1) comme valeur propre double, ce qui aboutit à une contradiction.

2. Soit u un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_0.

   (a) $\mathbb{R}u$ est stable par f, d'aprés $1)b)$ de la partie I, $(\mathbb{R}u)^\perp$ est stable par f.

   (b) $(\mathbb{R}u)^\perp$ est un plan vectoriel, donc $(\mathbb{R}u)^\perp$ admet une base o.n (e_2,e_3). Puisque $(\mathbb{R}u)^\perp$ est stable par f, on a $f(e_2), f(e_3) \in (\mathbb{R}u)^\perp$ donc il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(e_2) = ae_2 + be_3$ et $f(e_3) = ce_2 + de_3$. Avec $\|f(e_2)\| = 1$, on obtient $(a^2+b^2) = 1$ donc il existe $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$. Or, $0 = \langle e_2, e_3\rangle = \langle f(e_2), f(e_3)\rangle = ac + bd$ et $1 = det(f) = \lambda_0(ad - bc)$ donnent $a = \lambda_0 d$ et $b = -c\lambda_0$. Ainsi, $f(e_2) = \cos(\theta)e_2 + \sin(\theta)e_3$ et $f(e_3) = \dfrac{1}{\lambda_0}(-\sin(\theta)e_2 + \cos(\theta)e_3)$. On distingue les deux cas suivants :

   • Si $\lambda_0 = -1$, alors $f(e_3) = \sin(\theta)e_2 - \cos(\theta)e_3$. Dans ce cas, la matrice de f dans la base (u,e_2,e_3) est $diag(\lambda_0, A)$ avec $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Il vient : $P_f = (X-1)(X+1)^2$ et par suite (-1) est une valeur propre double de f, ce qui est absurde.

   • Si $\lambda_0 = 1$, alors $f(e_3) = -\sin(\theta)e_2 + \cos(\theta)e_3$. Dans ce cas, on prend $v = e_2$ et $w = e_3$.

   • Puisque $f \neq Id_{\mathbb{R}^3}$, on a $\theta \in]-\pi,0[\cup]0,\pi]$.
   Si $\theta \in]-\pi,0[$, oa a $(-\theta) \in]0,\pi[$, $f(-e_2) = \cos(-\theta)(-e_2) - \sin(-\theta)(-e_3)$ et $f(-e_3) = \sin(-\theta)(-e_2) + \cos(-\theta)(-e_3)$. Dans ce cas, on prend $(v,w) = (-e_3,-e_2)$ et on remplace θ par $(-\theta)$.
   Ainsi, on peut supposer que $\theta \in]0,\pi]$.

   (c) On a $f(u) = \lambda_0 u$, $f(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)w$ et $f(w) = -\sin(\theta)v + \cos(\theta)w$ donc $\det(f) = \det_{(u,v,w)}(f(u), f(v), f(w)) = \lambda_0$. Comme $\det(f) = 1$, alors $\lambda_0 = 1$.

   (d) $f(u) = u$, $f(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)w$ et $f(w) = -\sin(\theta)v + \cos(\theta)w$ donc la matrice de f dans la base (u,v,w) est R_θ.

3. On suppose que $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ et on considère l'applucation $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Psi(x) = \langle f(x)/x\rangle$.

   (a) • Ψ est la composée des deux applications continues $(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto (f(x),x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ donc Ψ est continue sur $\mathbb{R}^3$.
   • $\Psi(u) = \langle f(u), u\rangle = \|u\|^2 = 1$ et $\Psi(v) = \langle f(v), v\rangle = \cos(\theta)\|v\|^2 = \cos(\theta)$.

   (b) Soit $\mathbb{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On admet que $\Psi(\mathbb{S})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
   On a $\Psi(u) = 1 > 0$, $\Psi(v) = \cos(\theta) \leq 0$ et $\Psi(\mathbb{S})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ donc $0 \in \Psi(\mathbb{S})$.

   (c) $0 \in \Psi(\mathbb{S})$ donc il existe $a \in \mathbb{S}$ tel que $\Psi(a) = 0$, c'est à dire $f(a) \perp a$.

4. On pose $b = f(a)$ et soit $c \in \mathbb{R}^3$ tel que (a,b,c) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
   Puisque $f \in SO(\mathbb{R}^3)$, d'aprés $II)2)$, on a $f \circ \sigma_a^{-1} \circ f^{-1} = f \circ \sigma_a \circ f^{-1} = \sigma_{f(a)} = \sigma_b$.
   Puisque (a,b,c) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, d'aprés $II)3)$, $\sigma_a \circ f \circ \sigma_a^{-1} \circ f^{-1} = \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c$.