Concours Physique et Chimie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 24 Juin 2021 **Heure : 8 H** **Durée : 4 H** **Nombre de pages : 8**

Barème : Problème 1 : 9 pts, Problème 2 : 11 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.
L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.
Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données :

Masse volumique de l'eau à 20°C : $\rho_0 = 1,00\times10^3\ Kg\cdot m^{-3}$;

Constante des gaz parfaits : $R = 8,32\ J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$;

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \simeq 3\times10^8\ m\cdot s^{-1}$;

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 \simeq 8,9\times10^{-12}\ F\cdot m^{-1}$;

Charge de l'électron : $q = -e \simeq -1,6\times10^{-19}\ C$;

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{w}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{w}) - \Delta\vec{w}$;

$\mathrm{div}(f\,\vec{w}) = \vec{w}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}f + f\,\mathrm{div}\,\vec{w}$;

Dérivée particulaire d'une grandeur $G(M,t)$:

$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)G$;

Coefficient de compressibilité de l'eau à 20°C : $\chi_s = 4,57\times10^{-10}\ Pa^{-1}$;

Masse molaire de l'air : $M = 29\,g\cdot mol^{-1}$;

Perméabilité du vide : $\mu_0 \simeq 1,3\times10^{-6}\ H\cdot m^{-1}$;

Masse de l'électron : $m \simeq 9,1\times10^{-31}\,kg$;

$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$;

$\sum_{p=0}^{\infty}\underline{x}^p = \frac{1}{1-\underline{x}}$ si $|\underline{x}| < 1$;

$\mathrm{Re}(\underline{z})$: partie réelle du nombre complexe $\underline{z}$;

i : nombre complexe tel que : $i^2 = -1$;

$1\,eV = 1,6\times10^{-19}\,J$.

Problème 1 : Echographie doppler

Partie I : Propagation d'une onde acoustique dans un fluide

On considère un fluide homogène de masse volumique ρ en mouvement dans un référentiel terrestre supposé galiléen : $\Re(O,x,y,z)$ muni d'une base orthonormée directe $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Dans la description d'Euler on désigne par $\vec{\mathrm{v}}(M,t)$ le champ de vitesses à un instant t, en un point M de l'espace de vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

1) Soit une particule de fluide de volume $d\tau = dx\cdot dy\cdot dz$ centré sur $M(x,y,z)$. Exprimer son accélération en fonction de sa vitesse $\vec{\mathrm{v}}(M,t)$. Donner la signification de chacun des termes de cette

accélération. Citer des exemples d'écoulements où l'accélération se réduit à l'un ou l'autre de ces deux termes.

2) Montrer que la résultante des forces de pression exercées sur la particule par le fluide situé à l'extérieur de l'élément $d\tau$ s'écrit : $d\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}P \cdot d\tau$.

3) Donner la relation de continuité liant les champs de vitesse et de masse volumique du fluide, traduisant localement le principe de conservation de la matière. En déduire que pour un écoulement incompressible $\text{div}\,\vec{\text{v}} = 0$.

4) Quelle relation traduit l'équilibre d'un fluide incompressible de masse volumique ρ_0, soumis aux seules forces de pression et au champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ supposé constant ? Exprimer dans ce cas, la pression du fluide en fonction de l'altitude z et la pression au sol P_0.

5) Définir qu'est-ce qu'un écoulement parfait. Dans ce cas établir l'équation d'Euler en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide dans le référentiel $\mathfrak{R}$.

On s'intéresse maintenant à la propagation unidimensionnelle (selon Ox) d'ondes acoustiques dans le fluide « supposé parfait », soumis aux seules forces de pression et caractérisé à l'équilibre par des valeurs uniformes P_0 de la pression et ρ_0 de la masse volumique. Le passage d'une onde acoustique dans le fluide **perturbe** son état d'équilibre et ses particules se déplacent en des **petits mouvements** autour de leurs postions d'équilibre : le champ de vitesses des particules de fluide devient $\vec{\text{v}} = \text{v}(x,t)\,\vec{u}_x$. Les champs de pression et de masse volumique seront décrits respectivement par : $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ et $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$.

Du point de vue thermodynamique, ces évolutions sont considérées comme isentropiques, auxquelles correspond le coefficient de compressibilité χ_s.

6) Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique. *Dans toute la suite du problème, cette approximation sera prise en compte.*

7) En utilisant l'approximation acoustique, linéariser l'équation de conservation de la masse (obtenue à la question 3) ainsi que l'équation d'Euler.

8) En utilisant la même approximation, simplifier l'expression de $\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$ et déduire une relation linéaire entre $p(x,t)$ et $\mu(x,t)$.

9) Obtenir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la surpression $p(x,t)$ et préciser la célérité c_s des ondes de pression en fonction des données.

10) Quelle est l'équation de propagation pour la vitesse $\text{v}(x,t)$? Donner sans démonstration la forme de la solution générale de cette équation et la caractériser.

11) On rappelle que, pour un gaz parfait subissant une transformation isentropique, la pression P et le volume V de ce gaz sont reliés par la relation : $PV^\gamma = \text{constante}$, où $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ est le rapport des capacités thermiques du gaz à pression et à volume constant. Exprimer le coefficient χ_S en fonction de γ et P_0. En déduire l'expression de la célérité c_s des ondes acoustiques dans le gaz parfait en fonction de sa température à l'équilibre T_0 et sa masse molaire M.

Calculer la célérité des ondes acoustiques dans l'air supposé comme un gaz parfait à la température de 20°C, sachant que $\gamma = 1,40$.

12) À l'aide des données numériques, calculer la célérité des ondes acoustiques dans l'eau à 20°C.

13) On définit l'énergie volumique d'une onde acoustique par $e = \frac{1}{2}\rho_0 \text{v}^2 + \frac{1}{2}\chi_s p^2$. Donner la signification de chacun des deux termes de cette énergie.

14) A partir des équations établies dans les questions (7, 8 et 9) établir que : $\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(p\vec{\mathrm{v}}) = 0$. Que signifie cette équation ? Citer une équation analogue pour les ondes électromagnétiques. Que représente le flux du vecteur $p\vec{\mathrm{v}}$ à travers une surface $\vec{S} = S\vec{u}_x$?

15) Soit une onde plane progressive de la forme $\vec{\mathrm{v}}(x,t) = f(x - c_s t)\vec{u}_x$ se propageant dans un milieu de masse volumique ρ_0. Déterminer la pression acoustique $p(x,t)$ correspondante. Montrer que l'impédance acoustique du fluide est une constante : $Z = \frac{p(x,t)}{\mathrm{v}(x,t)} = \rho_0 c_s$. Donner son unité dans le Système International d'unités. Calculer Z_{air} dans le cas de l'air à 20°C sachant que sa masse volumique est $\rho_0 = 1{,}3\, kg \cdot m^{-3}$.

16) On considère maintenant une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω : $\underline{p}(x,t) = p_m e^{i(\omega t - kx)}$ où p_m est l'amplitude de l'onde de pression. Exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de ω et c_s. En déduire l'expression de $\underline{\vec{\mathrm{v}}}$, on notera v_m son amplitude. On définit l'intensité d'une onde acoustique I par la valeur moyenne du module du vecteur $p\vec{\mathrm{v}}$. Exprimer I en fonction de p_m et Z.

Parie II : Réflexion et transmission d'une onde acoustique.

17) On considère deux fluides (1) et (2) séparés par une interface plane (de masse négligeable) perpendiculaire à l'axe (Ox) en $x = 0$. Les impédances acoustiques et les célérités du son dans les deux fluides prennent respectivement les valeurs Z_1, Z_2, c_1 et c_2 (figure 1). On suppose qu'à l'équilibre (avant le passage de l'onde) la pression est uniforme dans les deux fluides et égale à P_0.

Dans le domaine des $x < 0$, une onde progressive se propage dans le fluide (1) dans le sens des x croissants, soit $\mathrm{v}_i(x,t) = \mathrm{v}_i(x - c_1 t)$. A l'interface, cette onde donne naissance à une onde réfléchie $\mathrm{v}_r(x,t)$ et une onde transmise $\mathrm{v}_t(x,t)$, comme indiqué sur la figure 1.
Justifier la continuité des vitesses des particules du fluide de part et d'autre de l'interface. Pourquoi y a-t-il également continuité de la surpression p ?

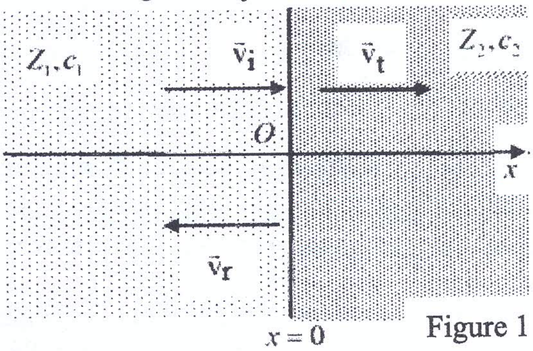

Figure 1

18) On définit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance acoustique de l'onde incidente à l'interface comme $R = \frac{I_r(x=0)}{I_i(x=0)} = \left|\frac{\mathrm{v}_r(0,t)}{\mathrm{v}_i(0,t)}\right|^2$ et $T = \frac{I_t(x=0)}{I_i(x=0)}$, avec I_r est l'intensité de l'onde réfléchie, I_i est celle de l'onde incidente et I_t est l'intensité de l'onde transmise. Exprimer R et T en fonction de Z_1 et Z_2. Représenter les variations des coefficients R et T en fonction de $x = \frac{Z_2}{Z_1}$. Discuter les cas $(Z_1 = Z_2)$ et ($Z_1 \ll Z_2$ ou $Z_2 \ll Z_1$).

Partie III : Principe de l'échographie

On admet que l'équation de propagation d'une onde acoustique établie en **partie I** pour les fluides décrit toujours la propagation d'ondes acoustiques dans les milieux biologiques, liquides ou solides, que nous considérons dans la suite du problème. En particulier, on admet que le coefficient de réflexion en puissance acoustique à l'interface entre deux milieux biologiques vérifie la formule établie à la question 18.

Le principe de l'échographie consiste à balayer à l'aide d'ultrasons une zone à étudier (par exemple l'utérus d'une future maman) et de mesurer et d'analyser les ondes ayant été réfléchies sur les différentes interfaces (l'écho des ultrasons) de manière à reconstruire une image des différents milieux traversés.

19) En général, un milieu biologique possède des caractéristiques semblables à celles de l'eau, calculer l'impédance acoustique correspondante.
20) On donne dans le tableau ci-dessous quelques valeurs standards des impédances acoustiques en milieux biologiques.

Milieu	Air	Sang/Tissu	Cerveau	Muscle	Foie	Squelette
$Z(Kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1})$	440	$1,66\times10^6$	$1,55\times10^6$	$1,70\times10^6$	$1,65\times10^6$	$7,8\times10^6$

En considérant l'interface entre l'air (d'impédance Z_1) et un tissu biologique (d'impédance Z_2) standard (la même que dans **le tableau**), en déduire qu'il faut absolument éviter la présence d'une couche d'air entre le transducteur (qui émet l'onde acoustique) et la peau lors de l'échographie. En pratique, un gel est utilisé comme contact entre l'appareil et la peau. Donner une estimation de son impédance acoustique.

21) On peut modéliser le corps comme de l'eau, on modélise la couche d'air par une lame mince d'air à faces parallèles d'impédance $Z_a = 440\,(S.I.)$ (voir figure 2).
L'intensité acoustique reçue par la zone analysée du corps sera notée I_0 en l'absence d'une couche d'air entre le transducteur et la zone à analyser (en appliquant bien le gel).
Et I_a l'intensité reçue en présence de la couche d'air.

Etablir que $I_a = \dfrac{T^2}{1-R^2} I_0$, en supposant que toutes les ondes transmises par la couche d'air sont incohérentes.

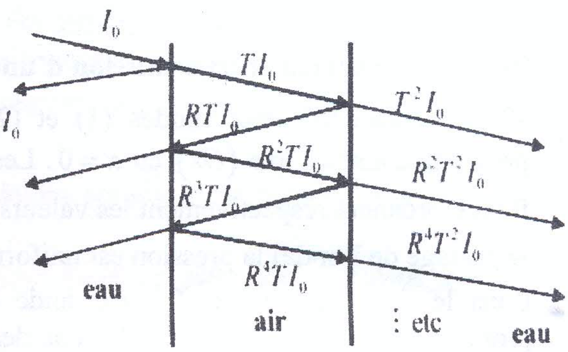

Figure 2

Faire l'application numérique et en déduire, dans ce cas que $I_a \ll I_0$.

22) Lors d'une échographie fœtale (écographie de l'utérus d'une future maman) on observe des zones blanches et des zones sombres. A votre avis, à quoi correspondent les zones blanches ? Justifier votre réponse.

23) On peut combiner la technique échographique avec l'effet doppler (échographie doppler). Ainsi, par exemple, lorsque des globules rouges réfléchissent une onde ultrasonore, les fréquences des ondes réfléchies sont différentes de celle de l'onde incidente du fait de la vitesse non nulle du flux sanguin. De la mesure de ces fréquences, on peut déduire cette vitesse.

a) Un transducteur immobile émet une onde ultrasonore de fréquence ν_i qui se propage dans la direction des x croissants à la vitesse c_s dans le fluide, supposé lui aussi immobile. Des globules rouges se rapprochent du transducteur avec une vitesse constante $\vec{V} = -V\,\vec{u}_x$ (incidence normale). Une onde réfléchie par ces globules atteint un transducteur voisin de l'émetteur ; elle possède la fréquence ν_r.

En conformité avec les résultats de la **partie II**, on suppose que, à la surface de la globule, l'amplitude de l'onde réfléchie est, à tout instant, proportionnelle à celle de l'onde incidente. Etablir que pour $V \ll c_s$ on a $\nu_r \approx \nu_i(1+2\frac{V}{c_s})$. En déduire l'écart de fréquences $\delta\nu = \nu_r - \nu_i$ que l'on détecte.

b) Que devient cette relation lorsque l'onde ultrasonore présente un angle d'incidence α avec la direction de la vitesse des globules rouges ?

c) Application numérique : on donne $\nu_i = 3\,MHz$, $\nu_r - \nu_i = 1,5\ kHz$, et $c_s = 1,5\ km\cdot s^{-1}$. Calculer la vitesse V pour un angle d'incidence α nul.

Problème 2 :

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans la base orthonormée directe $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Dans tout le problème, « OPPM » désigne une Onde Plane Progressive Monochromatique de pulsation ω.

La polarisation d'une OPPM électromagnétique peut être modifiée lors de la propagation dans un milieu transparent. La première partie du problème décrit cet effet dans deux situations différentes. La seconde partie du problème propose une estimation de la puissance maximale de l'onde évitant la détérioration des dépôts métalliques des miroirs dans les cavités lasers.

A. Première Partie

I. Propagation d'OPPM dans le vide

1) Rappeler les équations locales de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ dans un domaine vide de charges et de courants et donner la signification physique de chacune d'entre elles.

2) Etablir alors l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$.

On propose comme solution de l'équation de propagation précédente, le champ électrique :
$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}(z,t))$ où $\underline{\vec{E}}(z,t)=\underline{\vec{E}}_0 \exp\left[i\omega(t-\frac{z}{c})\right]$ et $\underline{\vec{E}}_0(E_{0x},E_{0y},0)$ désigne l'amplitude complexe qui est un vecteur constant dont les composantes E_{0x} et E_{0y} sont éventuellement complexes.

3) Décrire la solution proposée et vérifier qu'elle est bien transverse électrique.

4) L'une des propriétés de l'OPPM est la description de son état de polarisation. Donner une explication au concept de la polarisation de l'OPPM.

5) Préciser l'état de polarisation de la solution proposée dans les cas particuliers suivants :

a) Lorsque $\underline{\vec{E}}_0(E_{0x},E_{0y},0)$ avec E_{0x} et E_{0y} sont réels positifs.

b) Lorsque $\underline{\vec{E}}_0(E_{0x},E_{0y},0)$ avec E_{0x} et E_{0y} sont des complexes quelconques.

c) Lorsque $\underline{\vec{E}}_0(E_0,-iE_0,0)$ avec E_0 est un réel positif.

d) Lorsque $\underline{\vec{E}}_0(E_0,iE_0,0)$ avec E_0 est un réel positif.

6) Montrer qu'une OPPM polarisée rectilignement selon la direction de l'axe x, dont $\underline{\vec{E}}_0(E_0,0,0)$ où E_0 est un réel positif, peut s'écrire comme une somme de deux OPPM de même amplitude polarisées circulairement gauche et droite.

II. Propagation d'OPPM dans un milieu transparent

Un milieu est qualifié de transparent lorsque l'énergie transportée par l'onde qui le traverse n'est pas absorbée. Les équations de Maxwell dans ce milieu seront identiques à celles exprimées dans le vide à condition de remplacer ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ appelée permittivité du milieu transparent et ε_r désigne la permittivité relative sans dimensions.

7) Etablir l'équation de propagation pour le champ électrique dans ce milieu transparent et déduire la vitesse de propagation de l'onde. On notera $n=\sqrt{\varepsilon_r}$ l'indice de réfraction du milieu transparent.

8) On propose comme solution de l'équation de propagation précédente, le champ électrique : $\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}(z,t))=\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}_0 \exp\left[i(\omega t-kz)\right]\right)$ où k est un réel positif. Déduire la relation entre k et ω.

9) On se place dans le cas d'une polarisation rectiligne selon la direction de l'axe x, $\underline{\vec{E}}_0\,(E_0,0,0)$ où E_0 est un réel positif.

a) Etablir l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}(z,t)$ de l'onde.

b) Déterminer la moyenne temporelle $\langle\vec{\Pi}(z,t)\rangle$ du vecteur de Poynting.

c) Que représente cette grandeur ?

III. Passage d'une OPPM polarisée par un milieu à indice n

On considère l'OPPM décrite par le champ électrique : $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - k_0 z)\vec{u}_x + E_0 \sin(\omega t - k_0 z)\vec{u}_y$ où $k_0 = \frac{\omega}{c}$ et qui arrive en incidence normale depuis le vide situé dans l'espace $z < 0$, sur un milieu transparent d'indice n situé entre les abscisses $z = 0$ et $z = e$.
On admet la continuité du champ électrique aux interfaces $z = 0$ (vide-milieu) et $z = e$ (milieu-vide).
Le champ électrique $\vec{E}_m$ de l'onde transmise dans le milieu transparent s'écrit :

$$\vec{E}_m(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_y$$

10) Déterminer les constantes E_{0x} et E_{0y} compte tenu des caractéristiques de l'onde incidente et donner la relation entre k et k_0.
11) Justifier que le champ électrique $\vec{E}_{sortie}$ associé à l'onde émergente du milieu et qui se propage dans le vide s'écrit : $\vec{E}_{sortie}(z,t) = E_{0xs} \cos(\omega t - k_0(z-e) - ke)\,\vec{u}_x + E_{0ys} \sin(\omega t - k_0(z-e) - ke)\,\vec{u}_y$.
Préciser les valeurs des constantes E_{0xs} et E_{0ys}.
12) Comparer les polarisations de l'onde incidente et de l'onde émergente du milieu transparent.

IV. Lames à retard

Les lames cristallines à retard sont des lames minces transparentes taillées dans un cristal biréfringent et possèdent les propriétés suivantes :

- Pour une OPPM polarisée rectilignement suivant la direction de l'axe Ox et arrivant en incidence normale, la lame présente un indice de réfraction n_{or}.
- Pour une OPPM polarisée rectilignement suivant la direction de l'axe Oy et arrivant en incidence normale, la lame présente un indice de réfraction n_{ex}.

Pour une polarisation présentant une composante selon l'axe Ox et une autre selon l'axe Oy, celles-ci ne se déplacent pas dans la lame à la même vitesse, ce qui fait qu'elles se retrouvent déphasées à la sortie $z = e$.
On s'intéresse à une lame de quartz pour laquelle $\Delta n = n_{ex} - n_{or} = 0{,}0091$ pour la radiation Jaune de Sodium de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 589$ nm.
13) Préciser l'axe lent et rapide de la lame. Décrire une expérience simple utilisant un polariseur et un analyseur permettant d'identifier les lignes neutres de la lame.

On envoie depuis le vide en incidence normale à l'entrée de la lame, une OPPM de polarisation rectiligne faisant l'angle α avec l'axe Ox. Son champ électrique incident s'écrit :
$\vec{E}_i(z,t) = E_0 \cos(\alpha) \cos(\omega t - k_0 z)\,\vec{u}_x + E_0 \sin(\alpha) \cos(\omega t - k_0 z)\,\vec{u}_y$
14) Justifier que le champ électrique associé à l'onde émergente de la lame s'écrit :
$\vec{E}_{sortie}(z,t) = E_0 \cos(\alpha) \cos(\omega t - k_0(z-e) - k_{or}e)\,\vec{u}_x + E_0 \sin(\alpha) \cos(\omega t - k_0(z-e) - k_{ex}e)\,\vec{u}_y$.
Donner les expressions de k_{or} et k_{ex}.
15) Déduire le déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux composantes du champ électrique, introduit par la lame en fonction de Δn , e et la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$.
16) A quelle condition l'onde émergente est-elle polarisée rectilignement ? Préciser alors les directions de polarisations possibles. Quel type de polarisation obtiendrait-on en général ?
17) Donner le déphasage $\Delta\varphi$ introduit par une lame demi-onde et par une lame quart-d'onde. Calculer l'épaisseur minimale e_{min} d'une lame demi-onde de quartz éclairée par la radiation Jaune de Sodium.
18) Proposer un montage simple permettant de convertir la polarisation rectiligne de l'onde incidente étudiée en une polarisation circulaire.

V. Polarisation rotatoire et biréfringence circulaire

La polarisation rotatoire est la propriété qu'ont certains milieux transparents à faire tourner la direction de polarisation d'une onde polarisée rectilignement qui les traverse. Le milieu transparent est supposé transmettre avec des indices différents, des ondes polarisées circulairement gauche et droite.

Lorsqu'une onde polarisée circulairement gauche (respectivement droite) se propage, le milieu se comporte comme un milieu d'indice n_{g} (respectivement n_{d}). Cette hypothèse d'existence de deux indices pour des ondes circulaires explique le terme de biréfringence circulaire.

19) En décomposant l'OPPM donnée par $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - k_0 z)\,\vec{u}_x$ en une somme de deux OPPM de même amplitude polarisées circulairement gauche et droite et en utilisant les résultats du paragraphe III, justifier que le champ électrique à la sortie du milieu d'épaisseur e s'écrit :

$$\vec{E}_{sortie}(z,t) = \frac{E_0}{2}\begin{pmatrix} \cos\big(\omega t - k_0(z-e) - k_{\mathrm{g}}e\big) + \cos\big(\omega t - k_0(z-e) - k_{\mathrm{d}}e\big) \\ \sin\big(\omega t - k_0(z-e) - k_{\mathrm{g}}e\big) - \sin\big(\omega t - k_0(z-e) - k_{\mathrm{d}}e\big) \\ 0 \end{pmatrix}$$

20) Déduire que la direction de polarisation de l'onde incidente a tourné d'un angle $\beta = \frac{\omega e}{2c}\big(n_{\mathrm{d}} - n_{\mathrm{g}}\big)$.

B. Deuxième Partie

VI. Cavité optique d'un laser

Le laser est une source produisant un rayonnement lumineux spatialement et temporellement cohérent et de grande directivité. L'amplification du rayonnement se produit dans une cavité optique, essentiellement constituée de deux miroirs de grande réflectivité. Un modèle simplifié consiste à considérer que ces miroirs sont identiques plans parallèles entre eux et séparés d'une distance L où règne le vide.

On s'intéresse à la propagation de la lumière, considérée comme une OPPM, dans la direction du vecteur $\vec{u}_z$ normale au plan des miroirs. On désigne par r et t respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique pour chaque miroir.

On admettra que $R + T = 1$ avec $R = r^2$ et $T = t^2$ où R et T désignent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en puissance pour chaque miroir.

On note par $\underline{E_0}(z)$ l'amplitude complexe de la composante tangentielle aux miroirs du champ électrique incident de l'OPPM. La variation de la phase de cette composante lorsqu'elle a parcouru la distance L dans la cavité est notée $\delta\phi$, alors la composante du champ électrique qui émerge (en $z = L$) en ayant traversé une seule fois la cavité a pour amplitude complexe : $\underline{E_0}(z = L^+) = t^2\, e^{i\delta\phi}\, \underline{E_0}(z = 0^-)$

21) Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{E_0^p}(z = L^+)$ de la composante du champ électrique qui a traversé une fois la cavité puis a fait p aller-retour avant d'émerger en $z = L$ en fonction de $\underline{E_0}(z = 0^-)$, $e^{i\delta\phi}$, T , R et p.

22) En déduire que l'amplitude complexe du champ total émergent de la cavité noté $\underline{E_{sortie}}$ s'écrit :

$$\underline{E_{sortie}} = \frac{T\, e^{i\delta\phi}}{1 - Re^{i2\delta\phi}}\,\underline{E_0}(z = 0^-)$$

23) On s'intéresse dans cette question à déterminer un ordre de grandeur N, d'ondes interférentes contribuant au champ total émergent de la cavité.

On choisit le critère suivant : la valeur de N est tel que la norme de l'écart relatif entre le champ total émergent de la cavité et la somme partielle $\sum_{p=0}^{N} \underline{E_0^p}$ reste inférieure à 1%.

On suppose que R est proche de 1. Proposer une expression de N en fonction de R et donner une estimation de N si $R = 0{,}999$.

VII. Onde dans le métal

Lors de la réflexion d'un champ électrique intense sur la surface métallique du miroir, celle-ci risque d'être endommagée du fait de l'ionisation du milieu. On propose ici une étude simplifiée afin d'éviter la détérioration des miroirs.

On suppose que le métal (l'or) occupe tout le demi-espace $z > 0$ et présente les mêmes propriétés électriques et magnétiques du vide. En tout point du métal, la densité volumique de charge est nulle. On désignera par $n_{\acute{e}}$ la densité volumique d'électrons libres assurant un courant éventuel dans le métal.

Une OPPM de pulsation ω, qui se propage selon $Oz > 0$, dans le vide occupant le demi-espace $z < 0$, rencontre le métal en $z = 0$ sous incidence normale.

L'action du champ électrique $\underline{\vec{E}}$ de l'onde sur les électrons libres du métal engendre l'apparition d'une densité volumique de courant $\underline{\vec{j}}$ donnée par la loi d'Ohm : $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$ où $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}$ est la conductivité du métal et $\gamma_0 = 5\ 10^7\ \mathrm{S.m^{-1}}$ et $\tau = 2\ 10^{-14}\ \mathrm{s}$ sont deux constantes.

24) A quoi correspond γ_0 ? Sachant que la longueur d'onde dans le vide de l'OPPM est $\lambda_0 = 1050\ \mathrm{nm}$, proposer une expression simplifiée de la conductivité $\underline{\gamma}$. Dans la suite, on utilisera cette expression.

25) Ecrire les équations de Maxwell dans le conducteur et déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique $\underline{\vec{E}}$.

On choisit comme solution de l'équation de propagation précédente, le champ électrique :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \underline{E}(0)\exp\left[i(\omega t - \underline{k}z)\right]\vec{u}_x.$$

26) Montrer que $\underline{k}$ doit être solution de l'équation $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ où ω_p est une pulsation à exprimer en fonction des données. Donner la valeur numérique de ω_p et justifier que $\omega^2 \ll \omega_p^2$. Déduire alors l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω_p et c.

27) Donner les expressions des champs électrique $\underline{\vec{E}}$ et magnétique $\underline{\vec{B}}$ dans le métal. Quelle est la nature de l'onde dans le métal ?

28) Estimer numériquement la distance caractéristique sur laquelle les champs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ sont non négligeables.

On s'intéresse à déterminer l'amplitude complexe du champ électrique dans le métal en fonction de celle de l'onde incidente. Les champs électriques des ondes incidente et réfléchie dans le vide sont respectivement : $\underline{\vec{E}_i}(z,t) = E_0 \exp[i(\omega t - k_0 z)]\,\vec{u}_x$; $\underline{\vec{E}_r}(z,t) = rE_0 \exp[i(\omega t + k_0 z)]\,\vec{u}_x$ où r est le coefficient de réflexion en $z = 0$ en amplitude et E_0 est un réel positif.

29) Donner les expressions des champs magnétiques $\underline{\vec{B}_i}$ et $\underline{\vec{B}_r}$ correspondants respectivement à $\underline{\vec{E}_i}$ et $\underline{\vec{E}_r}$.

30) En écrivant la continuité des champs électriques et magnétiques de part et d'autre de l'interface $z = 0$, déduire l'expression du coefficient r de réflexion en fonction de ω et ω_p.

31) Comparer l'amplitude réelle de l'onde réfléchie à celle de l'onde incidente. Conclure.

32) Toujours dans le cadre de l'approximation $\omega^2 \ll \omega_p^2$, montrer que l'amplitude réelle $E(0) = |\underline{E}(0)|$ du champ électrique à la surface du conducteur peut se mettre sous la forme $E(0) \approx \frac{2\omega}{\omega_p} E_0$.

33) En exploitant de nouveau la loi d'Ohm et sachant que $\gamma_0 = \tau\varepsilon_0\omega_p^2$, montrer que la vitesse maximale v_0 atteinte par les électrons dans le conducteur s'écrit : $v_0 = \frac{2\varepsilon_0\omega_p}{n_é e} E_0$.

Les électrons accélérés par le champ électrique, risquent d'ioniser par impact les atomes voisins conduisant à la destruction du dépôt métallique du miroir.

34) En s'appuyant sur le modèle classique de Bohr de l'atome d'hydrogène et sachant que l'or a pour numéro atomique $Z = 79$ et un rayon atomique $a = 0{,}14\ \mathrm{nm}$, estimer l'ordre de grandeur de l'énergie nécessaire pour provoquer une ionisation. Calculer cette énergie.

35) En fait, les tables donnent une énergie d'ionisation de l'ordre de 9 eV. Comment peut-on expliquer l'écart entre les deux valeurs ?

On prendra la valeur tabulée pour la suite des calculs.

36) En supposant que lors d'un choc électron-ion toute l'énergie cinétique de l'électron est transmise à l'ion, quelle est l'ordre de grandeur de la vitesse susceptible de créer une ionisation supplémentaire ?

37) Quelle est l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente susceptible de donner lieu à une telle vitesse ? On donne $n_é = 6\ 10^{28}\ m^{-3}$.

38) Quelle est la puissance moyenne de cette onde sachant que la section du faisceau est de l'ordre de $260\ \mathrm{cm^2}$?

39) Expérimentalement, pour une impulsion d'une picoseconde, on mesure un seuil d'endommagement de $0{,}5\ \mathrm{J.cm^{-2}}$. Comparer au résultat précédent et commenter.

FIN DE L'ÉPREUVE