



République Tunisienne

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Signature des enseignants

**Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation
d'Ingénieurs**

**Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation
d'Ingénieurs**

Session : 2021

Concours : MP & PC

Epreuve de : **Systèmes Techniques
Automatisés**

Date : Mercredi 23 Juin 2021 à 8h

Durée : 3 heures

Session : 2021

Concours : **Mathématiques et Physique
& Physique et Chimie**

Epreuve de : **Systèmes Techniques
Automatisés**

Date : Mercredi 23 Juin 2021 à 8h

Durée : 3 Heures

Nom :

Prénom :

Date & lieu de naissance :

Etablissement d'origine :

N° C.I.N ou N° du Passeport pour les étrangers :

--	--	--	--	--	--	--	--

Série :

--	--	--

Identifiant :

--	--	--	--	--	--

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Nombre de
cahiers remis

01

Nombre de
cahiers remis

01

NE RIEN ÉCRIRE ICI

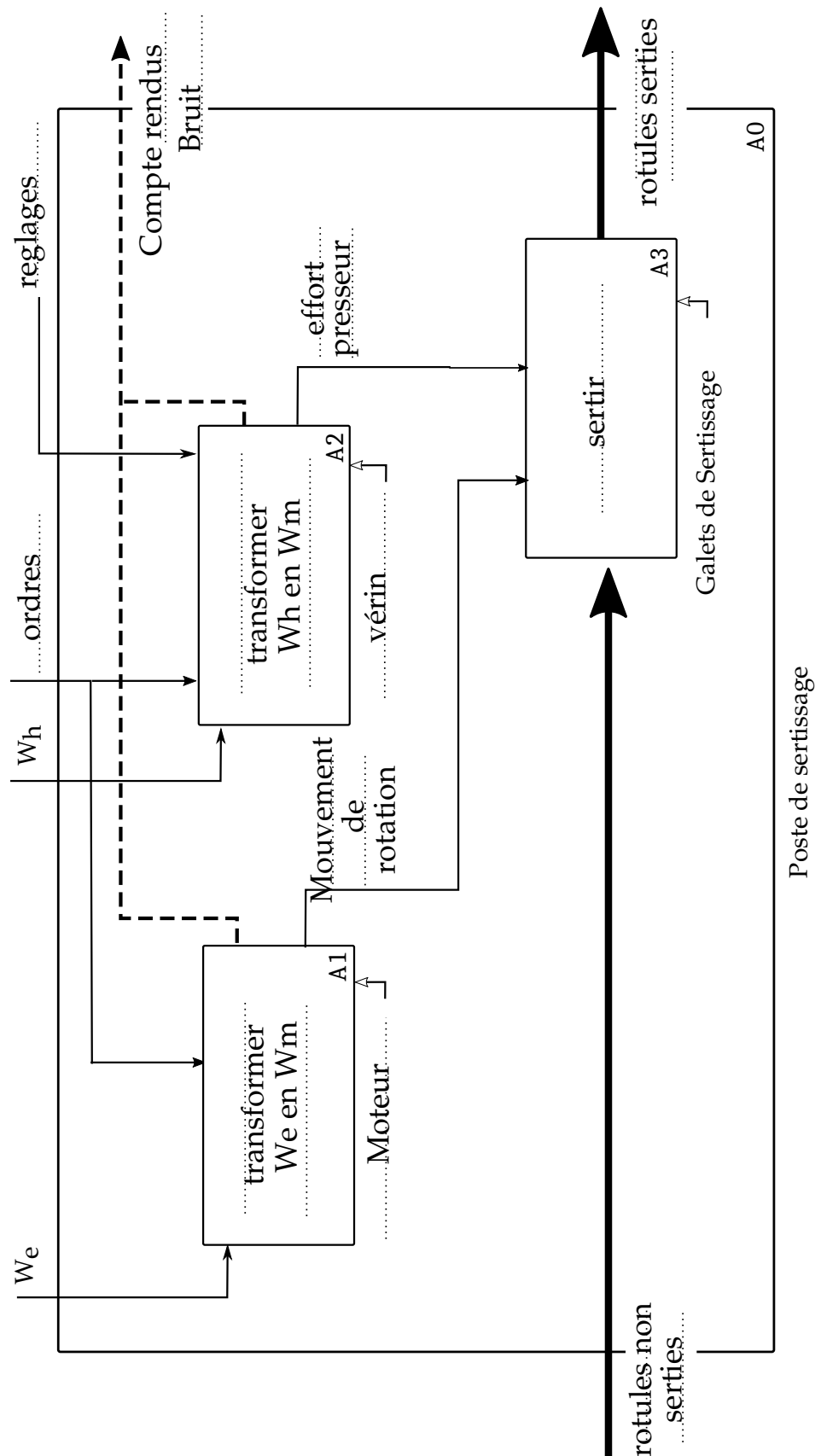
Dossier

DOCUMENT REPONSES

- ✱ Ce dossier comporte 19 pages numérotées de 1 à 19
 - ▷ Partie A – Conception mécanique : pages de 1 à 3
 - ▷ Partie B – Mécanique des Solides Indéformables : .. pages de 4 à 12
 - ▷ Partie C – Automatique : pages de 13 à 19
- ✱ Un seul dossier "document réponses" est fourni au candidat et doit être rendu à la fin de l'épreuve, en totalité, même sans réponses.
- ✱ Le renouvellement ou la reproduction de ce dossier sont strictement interdits.

Partie A : Conception Mécanique

A.1: Compléter l'actigramme niveau A0 du cinquième poste dédié au sertissage (figure ??).

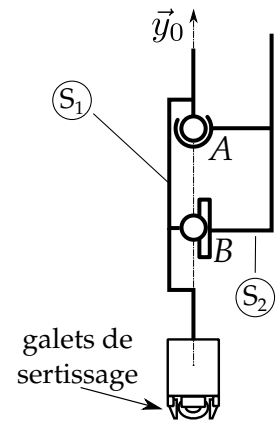


A partir du schéma cinématique du poste de sertissage (figure 4) du document "Mise en situation, Données et Hypothèse", on demande de :

A.2: Donner la désignation de chacune des liaisons en (A) et (B).

(A) : liaison rotule de centre A

(B) : liaison linéaire annulaire d'axe (B, \vec{y}_0)



A.3: Montrer par un calcul statique que la liaison équivalente entre S_1 et S_2 est une liaison pivot d'axe (A, \vec{y}_0) .

Soit $\{\mathcal{T}^1_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_A = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A$ le torseur de la liaison rotule en A.

De même $\{\mathcal{T}^2_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_B = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_B$ le torseur de la linéaire annulaire.

Comme les liaisons sont en parallèle entre S_1 et S_2 alors on obtient le torseur de la liaison équivalente par :

$$\{\mathcal{T}^{eq}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_A = \{\mathcal{T}^1_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_A + \{\mathcal{T}^2_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_A$$

$$\text{avec } \{\mathcal{T}^2_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_A = \begin{Bmatrix} X_B & X_B & 0 \\ 0 & 0 & BA \\ Z_B & Z_B & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_B & -Z_B BA \\ 0 & 0 \\ Z_B & X_B BA \end{Bmatrix}_A$$

ainsi

$$\{\mathcal{T}^{eq}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_A = \begin{Bmatrix} X_B + X_A & -Z_B BA \\ Y_A & 0 \\ Z_B + Z_A & X_B BA \end{Bmatrix}_A$$

qui correspond au torseur d'une liaison pivot autour de (A, \vec{y}_0)

A.4: Par quels moyens peut-on réaliser cette liaison pivot entre S_1 et S_2 ? (Proposer deux exemples de solutions technologiques.)

On peut réaliser cette liaison par un montage de roulements ou par des coussinets.

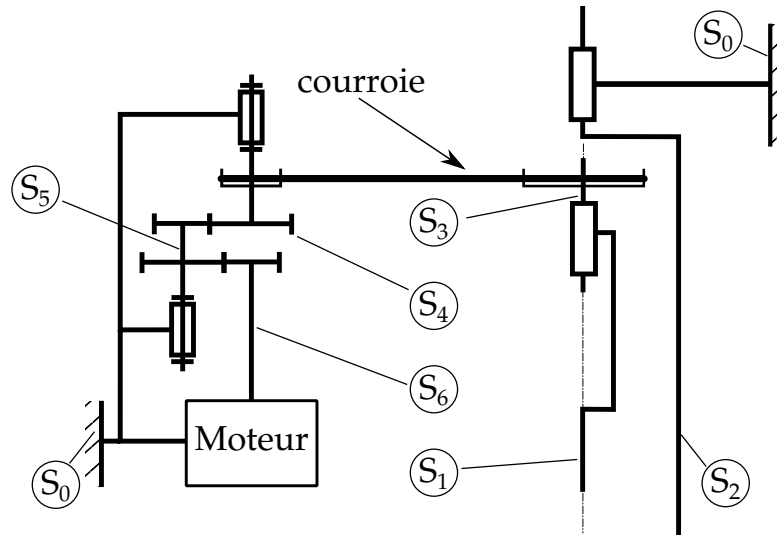
A.5: Cocher la case qui correspond à la bonne réponse.

Les cannelures constituent une solution technologique permettant le guidage en :

translation ☒

rotation ☐

A.6: Compléter, sur le schéma cinématique de la figure ci-dessous, la liaison entre S_1 et S_3 .



A.7: Déterminer le rapport des vitesses de rotation $\rho = \frac{N_1}{N_6}$. Faire l'application numérique.

$$\rho = \frac{N_1}{N_6} = (-1)^n \frac{Z_6 \cdot Z_{5b}}{Z_{5a} \cdot Z_4} \cdot \frac{d}{D}$$

$$= \frac{20 \times 20}{30 \times 30} \times \frac{60}{120} = \frac{2}{9}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \mu \vec{x}_0 + (\lambda + a - d) \vec{y}_0$$

$$\text{d'où } \vec{V}_{(A \in 2/0)} = \dot{\mu} \vec{x}_0 + \dot{\lambda} \vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{OA} = \mu \vec{x}_0 + (\lambda + a - d) \vec{y}_0$$

$$\vec{V}_{(A \in 2/0)} = \dot{\mu} \vec{x}_0 + \dot{\lambda} \vec{y}_0$$

B.3: En déduire les expressions de $\dot{\mu}$ et $\dot{\lambda}$ en fonction de L , $\dot{\theta}$ et θ :

$$\text{L'égalité des deux expressions de } \vec{V}_{(A \in 2/0)} \Rightarrow L \dot{\theta} \vec{y}_1 = \dot{\mu} \vec{x}_0 + \dot{\lambda} \vec{y}_0$$

Ainsi, par projection sur la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on déduit :

$$\dot{\mu} = -L \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{\lambda} = L \dot{\theta} \cos \theta$$

On se propose d'analyser l'effet de la périodicité de θ , sur le couple C_m développé par le moteur, en considérant la figure B.1 illustrant approximativement la variation de θ en fonction du temps où T est sa période.

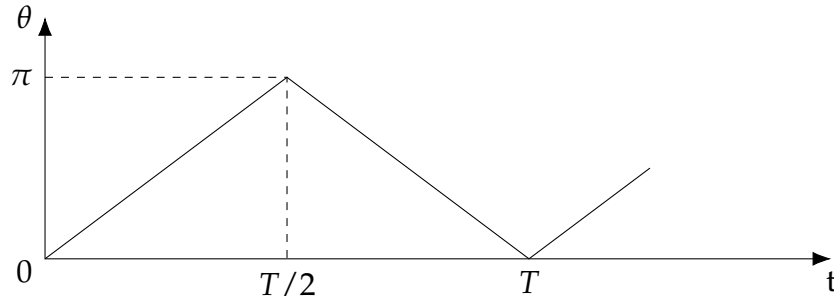


FIGURE B.1 – Évolution de l'angle de rotation θ en fonction du temps

B.4: Déterminer, en fonction de t et de la période T , les expressions de $\theta(t)$ correspondant respectivement à la première demi-période ($0 \leq t \leq T/2$) et la seconde ($T/2 \leq t \leq T$).

$$\text{Première demi-période } (0 \leq t \leq T/2) : \theta(t) = \frac{2\pi}{T}t$$

$$\text{Deuxième demi-période } (T/2 \leq t \leq T) : \theta(t) = 2\pi(1 - \frac{t}{T})$$

B.5: En déduire la vitesse $\dot{\theta}$ associée à la première demi-période ($0 \leq t \leq T/2$) et la seconde ($T/2 \leq t \leq T$). Déduire que $\ddot{\theta}$ est nulle sur une période.

$$\text{Première demi-période } (0 \leq t \leq T/2) : \dot{\theta}(t) = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{Deuxième demi-période } (T/2 \leq t \leq T) : \dot{\theta}(t) = -\frac{2\pi}{T},$$

sur une période $\dot{\theta}(t)$ est constante donc $\ddot{\theta}(t) = 0$.

B.2 Étude dynamique et énergétique

L'étude énergétique et dynamique vise à déterminer le couple développé par le moteur (M) ainsi que les expressions analytiques des actions extérieures s'appliquant au système $\Sigma = \{1, 2, 3\}$

B.2.1 Données et hypothèses

- ✓ $\theta(t)$ est périodique (figure B.1) et $\ddot{\theta}$ est nulle.
- ✓ L'accélération de la pesanteur est définie par : $\vec{g} = -g\vec{y}_0$ avec g est une constante positive.
- ✓ L'action du moteur (M) sur (1) est modélisée par le torseur couple :

$$\{\mathcal{T}_{(Moteur \rightarrow 1)}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O$$

- ✓ Les masses des solides (1), (2) et (3) sont désignées respectivement par m_i avec $i = 1, 2, 3$. Sachant que le coulisseau (2) intègre toutes les pièces qui lui sont solidaires y compris le système de préhension (la masse de la rotule est négligée).
- ✓ Les centres d'inertie G_i de ces solides sont définis par les expressions vectorielles suivantes :

$$\vec{OG}_1 = \frac{L}{2} \vec{x}_1 ; \vec{AG}_2 = -b\vec{y}_0 ; \vec{CG}_3 = \vec{0}$$

où b représente une constante dimensionnelle positive.

- ✓ Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- ✓ Il convient de retenir, pour ce problème plan, la notation représentant le torseur des actions mécaniques qu'exerce un solide (i) sur un solide (j) au point Q "centre géométrique de la liaison", exprimé dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\{\mathcal{T}_{(i \rightarrow j)}\}_Q = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & - \\ Y_{ij} & - \\ - & N_{ij} \end{array} \right\}_Q^{\mathcal{B}_0}$$

- ✓ La manivelle (1) est représentée par le solide de la figure B.2.

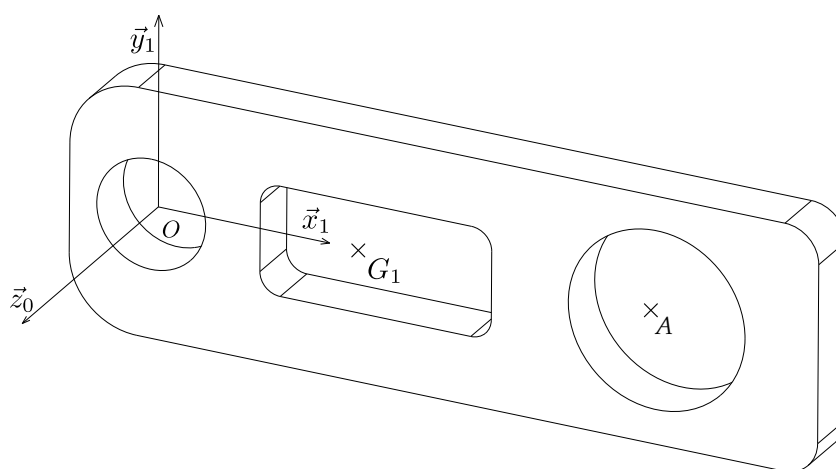


FIGURE B.2 – Géométrie de la manivelle 1

B.6: Donner, après justification, la forme de la matrice d'inertie de la manivelle (1) au point G_1 dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$. Cette matrice sera notée $[I_{G_1}(1)]$.

$$[I_{G_1}(1)] = \begin{bmatrix} I_{G_1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G_1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G_1z} \end{bmatrix} \text{ car :}$$

$(G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ est un plan de symétrie matérielle $\Rightarrow (G_1, \vec{z}_0)$ axe principal d'inertie
 \Rightarrow Les produit d'inertie $I_{xz} = I_{yz} = 0$

$(G_1, \vec{x}_1, \vec{z}_0)$ est un plan de symétrie matérielle $\Rightarrow (G_1, \vec{y}_1)$ axe principal d'inertie
 \Rightarrow Les produit d'inertie $I_{xy} = I_{yz} = 0$

N.B. Dans la suite on notera par I_z le moment d'inertie de (1) par rapport à l'axe (G_1, \vec{z}_0) .

B.7: Déterminer les torseurs cinétiques et dynamiques des solides suivants dans leurs mouvements par rapport au bâti (0) :

a. Le solide (1) au point G_1 ; l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ en fonction de m_1, I_z, L, θ et ses dérivées.

$$\{\mathcal{C}_{1/0}\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} m_1 \frac{L}{2} \dot{\theta} \vec{y}_1 \\ I_z \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{G_1}$$

$$\{\mathcal{D}_{1/0}\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} -m_1 \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1}$$

b. Le solide (2) au point G_2 ; l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ en fonction de m_2, L, θ et ses dérivées.

$$\vec{V}_{(G_2/0)} = \vec{V}_{(A \in 2/0)} = L \dot{\theta} \vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_{G_2(2/0)} = \vec{0} \text{ car } \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}_{G_2(2/0)} = \left(\frac{d\vec{\sigma}_{G_2(2/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$$

$$E_c(3/0) = \frac{1}{2} m_3 \vec{V}_{(G_3/0)}^2 = \frac{1}{2} m_3 L^2 \dot{\theta}^2 (\sin \theta)^2$$

$$E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left(I_z + m_1 \frac{L^2}{4} + m_2 L^2 + m_3 L^2 (\sin \theta)^2 \right)$$

B.9: Compléter sur la figure B.3, l'inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées au système $\Sigma = \{1, 2, 3\}$.

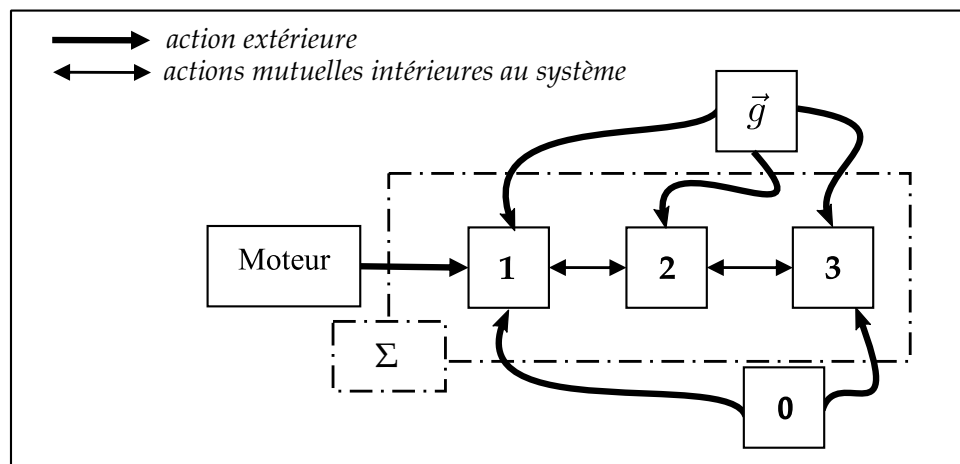


FIGURE B.3 – Diagramme des actions mécaniques

B.10: Écrire les torseurs des actions extérieures et intérieures au système (Σ) en leur point d'application respectif, en les exprimant dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Les torseurs des actions extérieures à (Σ)

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{(Moteur \rightarrow 1)}\}_O &= \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_O ; \{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{B}_0} ; \\ \{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow 3)}\}_C &= \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{03} & - \\ - & N_{03} \end{Bmatrix}_C^{\mathcal{B}_0} ; \{\mathcal{T}_{(\vec{g} \rightarrow 1)}\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -m_1 g & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{G_1}^{\mathcal{B}_0} ; \\ \{\mathcal{T}_{(\vec{g} \rightarrow 2)}\}_{G_2} &= \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -m_2 g & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{G_2}^{\mathcal{B}_0} ; \{\mathcal{T}_{(\vec{g} \rightarrow 3)}\}_{G_3} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -m_3 g & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{G_3}^{\mathcal{B}_0} ; \end{aligned}$$

Les torseurs des actions intérieures de (Σ)

$$\{\mathcal{T}_{(2 \rightarrow 1)}\}_A = \begin{Bmatrix} X_{21} & - \\ Y_{21} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathcal{B}_0} ; \{\mathcal{T}_{(2 \rightarrow 3)}\}_B = \begin{Bmatrix} X_{23} & - \\ 0 & - \\ - & N_{23} \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}_0}$$

B.11: Déterminer les puissances développées par les actions mécaniques extérieures et intérieures s'exerçant au système (Σ) dans son mouvement par rapport au bâti (0).

$$\mathcal{P}_{(\Sigma \rightarrow \Sigma/0)} = \mathcal{P}_{(Mot \rightarrow 1/0)} + \mathcal{P}_{(0 \rightarrow 1/0)} + \mathcal{P}_{(0 \rightarrow 3/0)} + \mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow 1/0)} + \mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow 2/0)} + \mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow 3/0)}$$

$$\mathcal{P}_{(Mot \rightarrow 1/0)} = C_m \dot{\theta}$$

$$\mathcal{P}_{(0 \rightarrow 1/0)} = \mathcal{P}_{(0 \rightarrow 3/0)} = 0 \text{ (Liaisons parfaites de puissances mutuelles)}$$

$$\mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow 1/0)} = -m_1 g \vec{y}_0 \cdot \frac{L}{2} \dot{\theta} \vec{y}_1 = -m_1 g \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow 2/0)} = -m_2 g \vec{y}_0 \cdot L \dot{\theta} \vec{y}_1 = -m_2 g L \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow 3/0)} = -m_3 g \vec{y}_0 \cdot \dot{\mu} \vec{x}_0 = 0$$

$$\mathcal{P}_{(\Sigma \rightarrow \Sigma/0)} = \left(C_m - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L \cos \theta \right) \dot{\theta}$$

$$\mathcal{P}_{int}(\Sigma) = 0$$

B.12: Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système (Σ) dans son mouvement par rapport au bâti (0) pour déduire l'expression du couple C_m développé par le moteur.

$$\frac{dEc(\Sigma/0)}{dt} = \mathcal{P}_{(\Sigma \rightarrow \Sigma/0)} + \mathcal{P}_{int}(\Sigma)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^3 m_3 L^2 \cos \theta \sin \theta = \left(C_m - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L \cos \theta \right) \dot{\theta}$$

$$\text{Soit : } \dot{\theta}^2 m_3 L^2 \cos \theta \sin \theta = \left(C_m - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L \cos \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } C_m &= \dot{\theta}^2 m_3 L^2 \cos \theta \sin \theta + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 m_3 L^2 \sin 2\theta + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L \cos \theta \end{aligned}$$

$$C_m = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 m_3 L^2 \sin 2\theta + \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g L \cos \theta$$

B.13: Montrer que les extremums du couple C_m développé par le moteur sont solutions de

l'équation : $\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} = \frac{(m_1/2) + m_2}{m_3} \frac{g T^2}{4\pi^2 L}$

$$\frac{dC_m}{d\theta} = \dot{\theta}^2 m_3 L^2 \cos 2\theta - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g L \sin \theta$$

Les extremums du couple C_m développé par le moteur correspondent aux solutions de $\frac{dC_m}{d\theta} = 0$ ce qui donne :

$$\dot{\theta}^2 m_3 L^2 \cos 2\theta - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g L \sin \theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g \sin \theta}{m_3 \dot{\theta}^2 L}$$

avec $\dot{\theta}^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$ D'où : $\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} = \frac{(m_1/2) + m_2}{m_3} \frac{g T^2}{4\pi^2 L}$

B.14: Écrire les équations scalaires issues de l'application du théorème de la résultante dynamique pour le système (Σ) et les projeter sur \vec{x}_0 et \vec{y}_0 :

$$\vec{\mathcal{R}}(\Sigma \rightarrow \Sigma) = m_1 \vec{\Gamma}_{(G_1/0)} + m_2 \vec{\Gamma}_{(G_2/0)} + m_3 \vec{\Gamma}_{(G_3/0)}$$

En projection sur \vec{x}_0 : $X_{01} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) L \dot{\theta}^2 \cos \theta$

En projection sur \vec{y}_0 : $Y_{01} + Y_{03} - (m_1 + m_2 + m_3)g = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) L \dot{\theta}^2 \sin \theta$

B.15: Écrire l'équation scalaire issue de l'application du théorème de la résultante dynamique appliqué au solide (3) dans son mouvement par rapport à (0) en projection sur \vec{y}_0 :

$$\vec{\mathcal{R}}_{(3 \rightarrow 3)} = m_3 \vec{\Gamma}_{(G_3/0)}$$

En projection sur \vec{y}_0 : $Y_{03} - m_3 g = 0$

B.16: Écrire l'équation scalaire issue de l'application du théorème du moment dynamique en O appliqué au système (Σ) dans son mouvement par rapport à (0) :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O(\Sigma \rightarrow \Sigma)} = \vec{\delta}_{O(\Sigma/0)}$$

tel que :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O(\Sigma \rightarrow \Sigma)} = \vec{\mathcal{M}}_{O(Mot \rightarrow 1)} + \vec{\mathcal{M}}_{O(0 \rightarrow 1)} + \vec{\mathcal{M}}_{O(0 \rightarrow 3)} + \vec{\mathcal{M}}_{O(\vec{g} \rightarrow 1)} + \vec{\mathcal{M}}_{O(\vec{g} \rightarrow 2)} + \vec{\mathcal{M}}_{O(\vec{g} \rightarrow 3)}$$

$$\text{où : } \vec{\mathcal{M}}_{O(Mot \rightarrow 1)} = C_m \vec{z}_0 \quad ; \quad \vec{\mathcal{M}}_{O(0 \rightarrow 1)} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{O(0 \rightarrow 3)} = N_{03} \vec{z}_0 + \vec{OC} \wedge Y_{03} \vec{y}_0 = N_{03} \vec{z}_0 + (\mu \vec{x}_0 - d \vec{y}_0) \wedge Y_{03} \vec{y}_0 = (N_{03} + \mu Y_{03}) \vec{z}_0$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{O(\vec{g} \rightarrow 1)} = \vec{OG}_1 \wedge (-m_1 g \vec{y}_0) = \frac{L}{2} \vec{x}_1 \wedge (-m_1 g \vec{y}_0) = -m_1 g \frac{L}{2} \cos \theta \vec{z}_0$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{O(\vec{g} \rightarrow 2)} = \vec{OG}_2 \wedge (-m_2 g \vec{y}_0) = (L \vec{x}_1 - b \vec{y}_0) \wedge (-m_2 g \vec{y}_0) = -m_2 g L \cos \theta \vec{z}_0$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{O(\vec{g} \rightarrow 3)} = \vec{OC} \wedge (-m_3 g \vec{y}_0) = (\mu \vec{x}_0 - d \vec{y}_0) \wedge (-m_3 g \vec{y}_0) = -\mu m_3 g \vec{z}_0$$

$$\text{Soit } \vec{\mathcal{M}}_{O(\Sigma \rightarrow \Sigma)} = \left[C_m + N_{03} + \mu Y_{03} - g L \cos \theta \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) \right] \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_{O(1/0)} = \vec{\delta}_{G_1(1/0)} + \vec{OG}_1 \wedge m_1 \vec{\Gamma}_{(G_1/0)} = \frac{L}{2} \vec{x}_1 \wedge -m_1 \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}_{O(2/0)} = \vec{\delta}_{G_2(2/0)} + \vec{OG}_2 \wedge m_2 \vec{\Gamma}_{(G_2/0)} = (L \vec{x}_1 - b \vec{y}_0) \wedge -m_2 L \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 = -m_2 b L \dot{\theta}^2 \cos \theta \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_{O(3/0)} = \vec{\delta}_{G_3(3/0)} + \vec{OC} \wedge m_3 \vec{\Gamma}_{(G_3/0)} = (\mu \vec{x}_0 - d \vec{y}_0) \wedge -m_3 L \dot{\theta}^2 \cos \theta \vec{x}_0 = -m_3 d L \dot{\theta}^2 \cos \theta \vec{z}_0$$

In fine

$$C_m + N_{03} + \mu Y_{03} - g L \cos \theta \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) = -(m_2 b + m_3 d) L \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

B.17: Utiliser les réponses aux questions B.14, B.15 et B.16 pour déterminer les actions mécaniques, engendrées par les liaisons, sur le système (Σ).

D'après ce qui précède :

$$X_{01} = - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) L \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$$Y_{01} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) L \dot{\theta}^2 \sin \theta - Y_{03} + (m_1 + m_2 + m_3) g$$

en remplaçant $Y_{03} = m_3 g$

$$Y_{01} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) L \dot{\theta}^2 \sin \theta + (m_1 + m_2) g$$

$$N_{03} = -(m_2 b + m_3 d) L \dot{\theta}^2 \cos \theta + g L \cos \theta \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) - \mu Y_{03} - C_m$$

avec $\mu = L \cos \theta$

$$N_{03} = -(m_2 b + m_3 d) L \dot{\theta}^2 \cos \theta + g L \cos \theta \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) - C_m$$

En remplaçant le couple moteur par son expression :

$$C_m = \dot{\theta}^2 m_3 L^2 \sin \theta \cos \theta + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g L \cos \theta$$

et après simplification : $N_{03} = -(m_2 b + m_3 d + m_3 L \sin \theta) L \dot{\theta}^2 \cos \theta$

Partie C : Automatique

C.1 Étude du capteur de position angulaire

C.1: En se référant à la figure C.1 compléter le code Gray (BR) de la table de vérité ci-contre, où G_0 représente le bit du poids le plus faible.

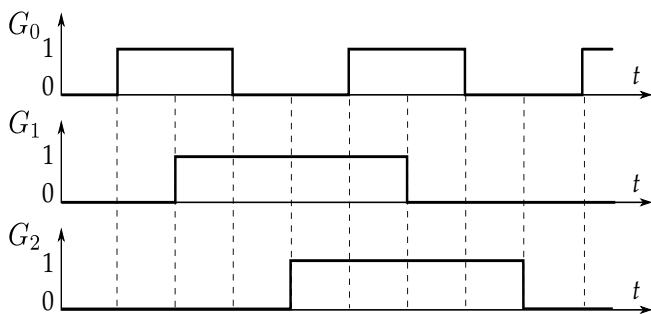


FIGURE C.1 – Chronogramme des trois signaux G_0 , G_1 et G_2

Tableau 1 – Table de vérité du transcodeur à 3 entrées (G_0 , G_1 et G_2) et 3 sorties (B_0 , B_1 et B_2)

Code (Gray ou BR)			Code (BN)		
G_2	G_1	G_0	B_2	B_1	B_0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1

C.2: Compléter les tableaux de Karnaugh des sorties B_0 , B_1 et B_2 , placer les groupements et déterminer les équations simplifiées en fonction des entrées du transcodeur sous forme de somme de produit.

— Sortie B_0 :

$G_1 G_0$	00	01	11	10
G_2				
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

$$B_0 = G_2 \bar{G}_1 \bar{G}_0 + \bar{G}_2 \bar{G}_1 G_0 + G_2 G_1 G_0 + \bar{G}_2 G_1 \bar{G}_0$$

— Sortie B_1 :

$G_1 G_0$	00	01	11	10
G_2				
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

$$B_1 = G_2 \bar{G}_1 + \bar{G}_2 G_1$$

— Sortie B_2 :

$G_1 G_0$	00	01	11	10
G_2				
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

$$B_2 = G_2$$

C.3: : On veut minimiser le nombre d'opérateurs logiques. Une solution consiste à utiliser des fonctions logiques de type « ou exclusif » à deux entrées. Cette solution nécessitera seulement deux opérateurs. **Compléter** sur la figure C.2 le logigramme relatif aux sorties du transcodeur étudié.

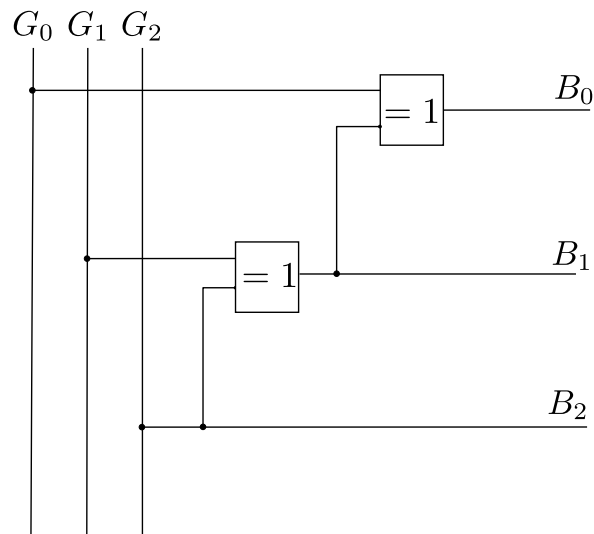


FIGURE C.2 – Logigramme du transcodeur en « ou exclusif »

C.2 Étude séquentielle du système

C.4: Compléter les Grafcet de point de vue commande des figures C.3 et C.4

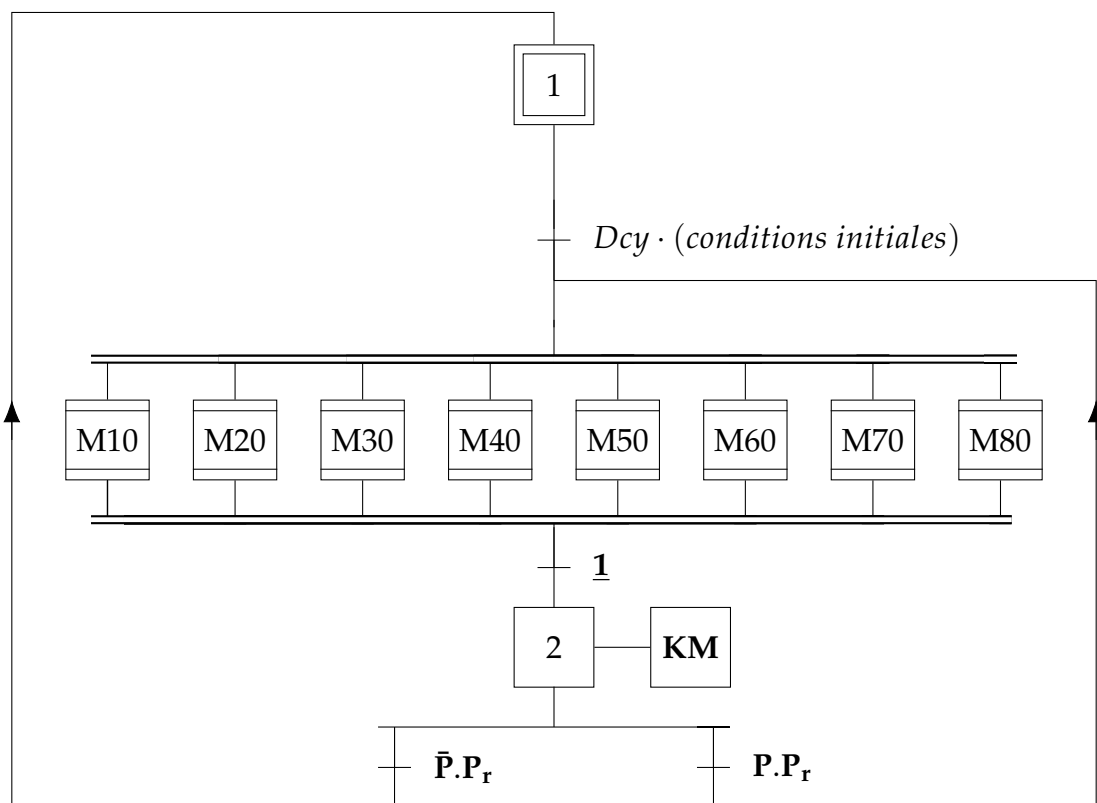


FIGURE C.3 – Grafcet de point de vue commande du système d'assemblage des rotules

N. B. : La normalisation de la commande d'un actionneur bistable V_n exige pour :

- l'activation, $V_n := 1$,
- la désactivation, $V_n := 0$.

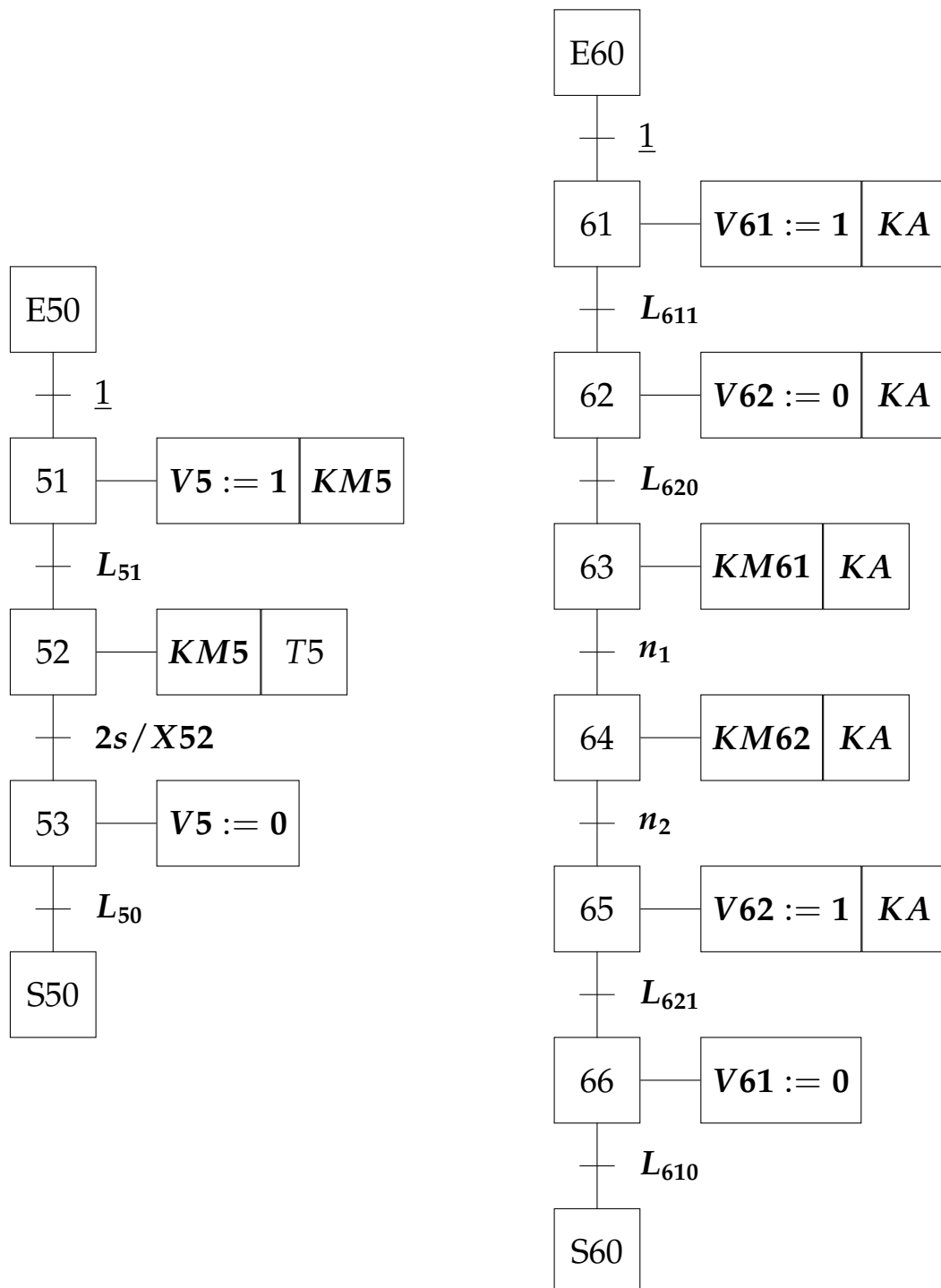


FIGURE C.4 – Grafset des macro-étapes M50 et M60 relatifs au fonctionnement des postes 5 et 6

Asservissement de vitesse du plateau

A partir du schéma fonctionnel de l'asservissement de vitesse donné par la figure 10 et en appliquant le théorème de superposition, la sortie du système s'écrit sous la forme :

$$\Omega_{ch}(p) = H_1(p)\Omega_r(p) - H_2(p)C_r(p) \quad \text{avec } H_1(p) = \left. \frac{\Omega_{ch}(p)}{\Omega_r(p)} \right|_{C_r(p)=0} \text{ et } H_2(p) = \left. \frac{\Omega_{ch}(p)}{C_r(p)} \right|_{\Omega_r(p)=0}$$

C.5: Pour $R(p) = K$, déterminer l'expression de la fonction de transfert $H_1(p)$.

$$H_1(p) = \left. \frac{\Omega_{ch}(p)}{\Omega_r(p)} \right|_{C_r(p)=0} \text{ avec } R(p) = K$$

$$H_1(p) = \frac{K \cdot \frac{10}{10+p} \cdot \frac{0.2}{p+1}}{1 + K \cdot \frac{10}{10+p} \cdot \frac{0.2}{p+1}} = \frac{2K}{2K + (10+p) \cdot (1+p)}$$

$$H_1(p) = \frac{2K}{2K + 10 + 11p + p^2}$$

C.6: On considère $C_r(p)$ nul et $R(p) = K = 1$, mettre $H_1(p)$ sous la forme canonique suivante :

$$H_1(p) = \frac{K_m}{1 + \frac{2\zeta p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$H_1 = \frac{2K}{2K + 10 + 11p + p^2} = \frac{2}{12 + 11p + p^2}$$

$$= \frac{1/6}{1 + (11/12)p + (1/12)p^2}$$

$$H_1(p) = \frac{0.166}{1 + (0.916)p + (0.0833)p^2}$$

C.7: En déduire les paramètres K_m , ω_0 et ζ

$$K_m = 1/6 = 0.166$$

$$\omega_0^2 = 12 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{12}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{11}{12} \Rightarrow \xi = \frac{11\omega_0}{24}$$

$$\omega_0 = 2\sqrt{3} \approx 3.464 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\xi = \frac{11\sqrt{3}}{12} \approx 1.587$$

C.8: Que peut-on dire du premier dépassement " D_1 "? Justifier.

Dépassement nul ($D_1 = 0$) car $\xi > 1$ ou système hyper-amorti ou apériodique.

C.9: A partir des figures 10 et 11, donner les expressions des fonctions de transfert en Boucle ouverte $T_1(p)$ et $T_2(p)$ respectivement des asservissements de vitesse et de position (avec $R(p) = K$ et $C_r(p) = 0$).

$$T_1(p) = \frac{2K}{(10+p)(p+1)}$$

$$T_2(p) = \frac{2K}{p(10+p)(p+1)}$$

C.10: A partir des courbes de la figure C.5, tracées pour $R(p) = 1$, identifier les diagrammes des gains $\|T_1(j\omega)\|_{dB}$ et $\|T_2(j\omega)\|_{dB}$ ainsi que ceux des arguments $\varphi_1(j\omega)$ et $\varphi_2(j\omega)$.

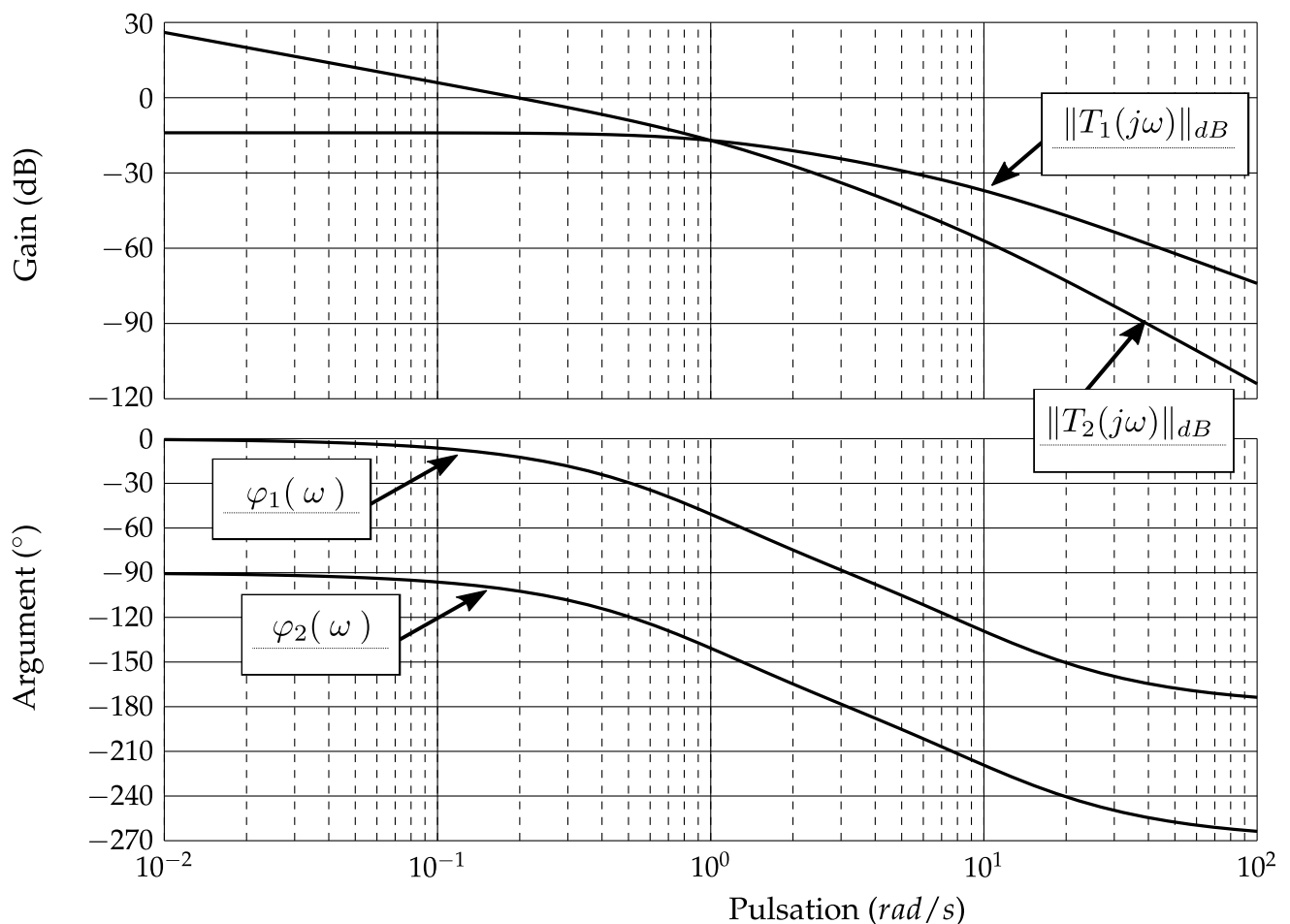


FIGURE C.5 – Diagrammes de bode

C.11: Déterminer la bande passante de l'asservissement de vitesse.

à partir de la courbe de Bode en boucle ouverte la bande à 0dB est indéfinie. Bp n'est pas définie

C.12: Que devient cette bande passante pour l'asservissement de position ?

à partir de la courbe de Bode en boucle ouverte la bande à 0dB est $Bp =]0, 0.2] rad.s^{-1}$

C.13: Déterminer les marges de gain et de phase relatives aux fonctions $T_1(j\omega)$ et $T_2(j\omega)$.

$$MG_{1dB} = \infty$$

$$MG_{2dB} = 34.8$$

$$M\phi_1(^{\circ}) = \text{indefinie}$$

$$M\phi_2(^{\circ}) = 75$$

C.14: Conclure sur la stabilité de chaque asservissement.

Les deux systèmes sont stables.

C.15: Pour l'asservissement de position, et en exploitant les diagrammes de Bode de la figure C.5, déterminer la valeur du gain critique de stabilité K_C ?

soit ω_1 telle que $\phi_2(\omega_1) = -180^{\circ}$.

Pour cette même pulsation ω_1 la courbe de gain nous indique une marge de gain critique de 34.8 dB

il vient alors : $\|T_2(j\omega_1)\|_{dB} + 20 \log K_c = 0 \text{ dB}$

d'où : $K_c = 10^{\frac{34.8}{20}}$

$$K_C = 55$$

C.16: Pour l'asservissement de position, déterminer la valeur de K qui garanti une marge de phase $M_{\phi} = 60^{\circ}$.

$$\text{Pour } M_\varphi = 60^\circ \Rightarrow \text{Arg}(\phi_2(\omega_2)) = -120^\circ \Rightarrow \omega_2 \approx 0.51 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\|T_2(j\omega_2)\|_{dB} + 20 \log K = 0 \text{ dB} \quad \text{avec} \quad \|T_2(j\omega_2)\|_{dB} = 9 \text{ dB}$$

$$K = 10^{\frac{9}{20}} = 2.818$$

$$K = 2.818$$

C.17: Déterminer l'erreur de position unitaire de l'asservissement de vitesse pour $K = 1$.

$$\text{Système de classe } \alpha = 0 \Rightarrow \varepsilon_{1p}(\infty) = \frac{1}{1 + \text{Gain}_{FTBO}} = \frac{1}{1 + 0.2}$$

$$\varepsilon_{1p}(\infty) = \frac{1}{1.2} = 0,833$$

C.18: Déterminer l'erreur de position unitaire de l'asservissement de position pour $K = 1$.

$$\text{Système de classe } \alpha = 1 \Rightarrow \varepsilon_{2p}(\infty) = 0$$

$$\varepsilon_{2p}(\infty) = 0$$