Correction du sujet de maths

PC + Tech (20

Exercice.

1°) D'abord si $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} P(x) Q(x) = 0$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-x}|P(x)\, Q(x)|\, d(x) < +\infty$.

Ainsi $<P/Q>$ est bien définie.

5 • L'application $(P, Q) \longmapsto <P/Q>$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}[X]$ par linéarité de l'intégrale.

• Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $<P, P> \geq 0$.

• Enfin si $<P, P> = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}(P(x))^2 dx = 0$

$\Rightarrow P(x) = 0$, pour $x \in [0, +\infty[\;\Rightarrow P = 0$.

2) Par la formule de Leibnitz, on a

$$(e^{-x}x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{-x})^{(k)} (x^n)^{(n-k)}$$

3 $$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k e^{-x}\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-(n-k)}$$

$$= e^{-x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^k$$

Ainsi $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{n!}{n!\,k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k x^k}{k!}$

3) On a $\int_0^X P_n(x)\, P(x)\, e^{-x} dx$

4 $$= \frac{1}{n!}\Big[(e^{-x}x^n)^{(n-1)} P(x) - (e^{-x}x^n)^{(n-2)} u'(x) + \cdots + (-1)^{n-1}(e^{-x}x^n)\, P^{(n-1)}(x)\Big]_0^X + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^X e^{-x}x^n P^{(n)}(x)\, dx$$

ici on a intégré n-fois par parties.

Or de la formule de Leibnitz, on voit que toutes les dérivées $k^{ième}$ de $e^{-x}x^n$ pour $k<n$ sont de la forme $P_{n,k}\, e^{-x}$ où $P_{n,k}$ est un polynôme par conséquent le crochet ci-dessus vaut 0 quand X tend vers $+\infty$.

4°) On a $d^\circ L_n = n$, ainsi $\langle L_0, L_1, \dots, L_n\rangle$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, on a

$$\langle L_n, L_m\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\, L_m^{(n)}(x)\,dx$$

- Si $m<n$, $\langle L_n, L_m\rangle = 0$ car $L_m^{(n)}(x) = 0$.
- Si $m=n$, $L_n^{(n)} = (-1)^n$, d'où

$$\langle L_n / L_n\rangle = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = I_n$$

En intégrant par parties on obtient

$$I_n = I_{n-1} = \dots = I_0 = 1.$$

Ainsi $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

5 | 5) La condition ii) signifie que pour tout n

$$\langle L_0, \dots, L_n\rangle = \langle e_0, \dots, e_n\rangle$$

D'après le procédé d'orthogonalisation de Schmidt on sait que cette condition jointe à i) entraîne l'existence de $(e_n)_n$ uniques au signe près,

3 | mais $L_n(0) = 1 > 0 \Rightarrow e_n = L_n$.

Problème :

Partie I

1°- On a : $\varphi_\lambda(t) = \dfrac{t^{\lambda-1}}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{\lambda-1} \Rightarrow \varphi_\lambda$ est intégrable sur $]0,1]$

$\varphi_\lambda(t) = \dfrac{t^{\lambda-1}}{1+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{\lambda-2} \Rightarrow \varphi_\lambda$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

4

Ainsi I et J existent.

De plus $J(1-\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-\lambda}}{1+t}\,dt$

En posant $s = 1/t$

$$J(1-\lambda) = \int_1^{+\infty} \frac{s^{\lambda-1}}{1+s}\,ds$$

d'où $I(\lambda) = J(\lambda) + J(1-\lambda)$

2°-

(a) $J(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \left(t^{\lambda-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n . t^n\right)dt$

On pose $S_n(t) = t^{\lambda-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k$, $t\in]0,1[$

- la suite $(S_n)_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers φ_λ
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, et tout $t\in]0,1[$

$$|S_n(t)| = t^{\lambda-1}\left|\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| \leq 2\frac{t^{\lambda-1}}{1+t} \in L^1(]0,1[)$$

T.C.D $\Rightarrow$ $J(\lambda) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n . \int_0^1 t^{\lambda+n-1}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\lambda}$.

(b) $I(\lambda) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)-\lambda}$

2

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\lambda^2}.$$

3) a)

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ car f_λ est paire, et

2,5 $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\lambda t) \cos(nt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(\lambda+n)t + \cos(n-$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\lambda+n)t}{\lambda+n} + \frac{\sin(n-\lambda)t}{n-\lambda} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2\lambda \sin(\lambda\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\lambda^2}.$$

b) Du théorème de Direchelet, on déduit que

3 pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f_\lambda(t) = \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + 2\lambda \frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\lambda^2} \cos(nt).$$

c) • Pour $t = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\lambda^2} = \left(1 - \frac{\sin(\pi\lambda)}{\lambda\pi}\right) \frac{\pi}{2\lambda\sin(\lambda\pi)}$$

$$= \frac{\pi}{2\lambda\sin(\lambda\pi)} - \frac{1}{2\lambda^2}.$$

- Pour $t = \pi$, on obtient

4

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\sin(\lambda\pi)} \left(\frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda\pi} - \cos(\lambda\pi) \right)$$

$$= \frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{1}{\lambda\pi} - \operatorname{cotg}(\lambda\pi) \right)$$

- D'après la formule de Parseval, on a

$$\frac{\sin^2(\lambda\pi)}{\lambda^2\pi^2} + 2\lambda^2\frac{\sin^2(\lambda\pi)}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-\lambda^2)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2(\lambda t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1+\cos(2\lambda t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \frac{\sin(2\lambda\pi)}{2\lambda}\right)$$

$$2\frac{\lambda^2\sin^2(\lambda\pi)}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-\lambda^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\lambda\pi)}{4\pi\lambda} - \frac{\sin^2(\lambda\pi)}{\lambda^2\pi^2}$$

d'où $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-\lambda^2)^2} = \frac{\pi^2}{2\lambda^2}\left[\frac{1}{2\sin^2(\lambda\pi)} + \frac{\operatorname{cotg}(\lambda\pi)}{2\lambda\pi} - \frac{1}{\lambda^2\pi^2}\right].$$

4) On a $$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\lambda^2}$$

1

$$= \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}.$$

Partie II.

1°) a) $e^{-t}t^{x-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$, $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t} t^{x-1} = 0$

ce qui implique que Γ est bien définie.

3 On a $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x\,dx$

en intégrant par parties : $u = t^x \longrightarrow u' = x\,t^{x-1}$

$v' = e^{-t} \longrightarrow v = -e^{-t}$

$$\Gamma(x+1) = \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dx = x\,\Gamma(x).$$

b) En posant $s = \sqrt{t}$, $\Gamma(1/2) = 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}$.

2

(c) On pose le changement de variables

$$s = x t^{\beta}$$

2 $$\int_0^{+\infty} e^{-xt^{\beta}} t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} e^{-s} \left(\frac{s}{x}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta}} \frac{ds}{x\left(\frac{s}{x}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}}$$

$$= \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{x^{\alpha/\beta}} ds = \frac{1}{\beta x^{\alpha/\beta}} \Gamma($$

2°-

(a) Soit $\eta > 0$.

1 Pour $t > \eta$, on a :

$$\exp(-xt^{\beta}) = \exp(-x_0 t^{\beta}) \exp\left(-(x-x_0) t^{\beta}\right)$$

$$\leqslant \exp(-x_0 t^{\beta}) \exp\left(-(x-x_0)\eta^{\beta}\right)$$

(b) Soit $x > x_0$.

2 $$\left| \int_0^{+\infty} e^{-xt^{\beta}} t^{\alpha-1} (h(t) - h(0)) dt \right| = \left| \int_0^{\eta} e^{-xt^{\beta}} t^{\alpha-1} (h(t) - \right.$$

$$\left. + \int_{\eta}^{+\infty} e^{-x_0 t^{\beta}} t^{\alpha-1} (h(t) - h(0)) dt \right|$$

$$\leqslant \int_0^{\eta} e^{-xt^{\beta}} t^{\alpha-1} |h(t) - h(0)| dt$$

$$+ \int_{\eta}^{+\infty} e^{-xt^{\beta}} t^{\alpha-1} (|h(t)| + |h(0)|) dt$$

$$\leq \int_0^{\eta} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} |h(t)-h(0)|\,dt +$$

$$\exp(-(x-x_0)\eta^\beta)\int_\eta^{+\infty} e^{-x_0 t^\beta} t^{\alpha-1}\left(|h(t)|+|h(0)|\right) dt.$$

ceci d'après 2°- a.

(c) Soit $\varepsilon>0$

h est continue en $0 \Rightarrow$ il existe $\eta>0$ tq

$\forall\, t \in [0,\eta]$, $|h(t)-h(0)| \leq \varepsilon$.

donc $\beta x^{\alpha/\beta}\displaystyle\int_0^{\eta} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} |h(t)-h(0)|\,dt \leq \varepsilon \beta x^{\alpha/\beta}\int_0^{+\infty} e$

7

$\leq \varepsilon\,\Gamma(\alpha/\beta)$

D'autre part : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha/\beta}\exp(-(x-x_0)\eta^\beta) = 0$

il existe alors $A \geq x_0$ tq $\forall\, x \geq A$.

$$\beta x^{\alpha/\beta} \exp\left(-(x-x_0)\eta^\beta\right)\int_\eta^{+\infty} e^{-x_0 t^\beta} t^{\alpha-1}\left(|h(t)|+|h\right.$$

$\leq \varepsilon$

ce qui donne que $\forall\, x\geq A$. (via 1°- c)

$$\left|\beta x^{\alpha/\beta}\int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} h(t) - \Gamma(\alpha/\beta)h(0)\right|$$

$$= \beta x^{\alpha/\beta}\left|\int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1}\left(h(t)-h(0)\right)dt\right|$$

$$\leq \varepsilon\left(1+\Gamma(\alpha/\beta)\right)$$

(a) $\forall t>0, \quad \varphi'(t) = 1 - 1/t$

t	0		1		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 On pose $u = t/x$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-xu} e^{x\log(xu)} x\,du$$

$$= x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-x(u-\log u)} du$$

$$= x^{x+1} \cdot e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(u)} du$$

2 (b) Voir le tableau de variation de φ.

(c) On pose $s = \sqrt{\varphi(t)}$

2

$$* \int_1^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt = \int_0^{\infty} e^{-xs^2} k_1'(s)\, ds$$

$$* \int_0^1 e^{-x\varphi(t)} dt = -\int_0^{+\infty} e^{-xs^2} k_2'(s)\, ds$$

(d) Pour tout $x>0$,

$$\sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt = \sqrt{x} \int_0^1 e^{-x\varphi(t)} dt + \sqrt{x} \cdot \int_1^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} d$$

2

$$= \sqrt{x} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-xs^2} \left(k_1'(s) - k_2'(s)\right) d$$

D'après le lemme Watson :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)}\, dt = \Gamma(1/2)\left(k_1'(0) - k_2'(0)\right)$$
$$= \sqrt{2\pi}.$$

4°-

(a) En utilisant 3°-a on a : $\forall x > 0$

1 $$\frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1/2}\, e^{-x}} = \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)}\, dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sqrt{2\pi}$$

d'où $\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, x^{x+1/2} e^{-x}$.

(b) Soit $s > 0$

$$\lim_{x \to \infty} x^{-s} \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x)} = \lim_{x \to \infty} x^{-s} \frac{x}{x+s} \frac{\Gamma(x+s+1)}{\Gamma(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{-s} \frac{x}{x+s} \frac{\sqrt{2\pi}(x+s)^{x+s+1/2}\, e^{-x-s}}{\sqrt{2\pi}\, x^{x+1/2}\, e^{-x}}$$

2 $$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+s} \left(\frac{x+s}{x}\right)^{x+s+1/2} e^{-s}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+s} \left(1 + \frac{s}{x}\right)^{x} \left(1 + \frac{s}{x}\right)^{s+1/2} e^{-s} = 1$$

Partie III.

1) a) $\beta(x+1, y) = \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt$

on pose $u = t^x \longrightarrow u' = x t^{x-1}$

,5

$v' = (1-t)^{y-1} \longrightarrow v = -\frac{(1-t)^y}{y}$

$\beta(x+1, y) = \left. t^x \frac{(1-t)^y}{y} \right]_0^1 + \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt$

$= \frac{x}{y} \beta(x, y+1)$.

b) $\beta(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt$

1 $= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt - \int_0^1 t\, t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$

$= \beta(x, y) - \beta(x+1, y)$

c) On a $\beta(x, y) = \beta(x, y+1) + \beta(x+1, y)$

2 $= \left(1 + \frac{y}{x}\right) \beta(x+1, y) = \frac{x+y}{x} \beta(x+1, y)$.

d) De c), on déduit par récurrence que

$\beta(x, y) = \frac{x+y}{\cancel{x}} \frac{x+y+1}{x+1} \cdots \frac{x+y+n}{x+n} \beta(x+n+1, y)$

2

mais $\Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1) \cdots x\, \Gamma(x)$

3°-

2 (a) $s = \dfrac{t}{1-t}$

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{1+s}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{y-1}\cdot\frac{ds}{(1+s)^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\,ds.$$

1 (b) En utilisant 2-c pour $y = 1-x$, $x \in]0,$

On a : $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \beta(x,1-x)\,\Gamma(1)$

$$= \beta(x,1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{1+s}$$

$$= I(x)$$

3 4°-(a) $\beta(x,x) = \int_0^{1/2} (t(1-t))^{x-1}\,dt + \int_{1/2}^1 (t(1-t$

$$= \int_0^{1/2} (t(1-t))^{x-1}\,dt + \int_0^{1/2} ((1-s)\,s)^{x-}$$

$$= 2\int_0^{1/2} (t(1-t))^{x-1}\,dt.$$

2 (b) On pose $s = 4t(1-t)$.

donc $\beta(x,x) = 2\int_0^{1/2} (t(1-t))^{x-1}\,dt = 2\int_0^1 \left(\frac{s}{4}\right)^{x-1} \frac{}{4}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{2x-2}} \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{-1/2}\,ds$$

$$= \frac{1}{2^{2x-1}} \beta(x, 1/2)$$

d'où $\quad 2^{2x-1} \beta(x,x) = \beta(x, 1/2)$.

c) $$\Gamma(2x) = \frac{(\Gamma(x))^2}{\beta(x,x)} = \frac{(\Gamma(x))^2}{2^{1-2x} \beta(x, 1/2)}$$

3 $$= \frac{(\Gamma(x))^2 \; \Gamma(x+1/2)}{2^{1-2x} \Gamma(x) \cdot \Gamma(1/2)} = \frac{\Gamma(x) \, \Gamma(x+1/2)}{2^{1-2x} \; \Gamma(1/2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2x-1} \Gamma(x) \, \Gamma(x+1/2).$$