RÉPUBLIQUE TUNISIENNE

***

Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session: Juin 2001

Concours en Technologie

Épreuve de Mathématiques

Durée: 4H	Date: 7 Juin 2001		8Heure	Nb pages: 5
Barême:	Ex: 4pts Pb	Partie I: 4,5pts	Partie II: 6pts,	Partie III: 5,5pts

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et soit $\mathbb{R}_n[X]$ celui des polynômes de degré au plus égal à n.

Pour P, $Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $< P/Q >= \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$.

1) Montrer que $< / >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(On vérifiera l'existence de l'intégrale ci-dessus.)

2) On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right]. \tag{1}$$

Vérifier que

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k x^k$$

3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'égalité (1) , établir :

$$< L_n/P >= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n P^{(n)}(x) dx.$$

4) Montrer que pour tout entier n , la famille $\left(L_0, L_1, ..., L_n\right)$ est une base orth normale de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) Réciproquement , soit une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ possédant les pro priétés suivantes :

i) $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad < e_n/e_m >= \delta_{nm} = \begin{cases} 1 \text{ , si } & m = n \\ 0 \text{ , si } & m \neq n \end{cases}$

(symbole de Kronecker).

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad$ degré$(e_n) = n$.

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n(0) \geq 0$.

Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = L_n$.

Les polynômes L_n , $n \in \mathbb{N}$ sont appelés les polynômes de Laguerre.

Problème

Partie I. Soit λ un nombre réel appartenant à $]0,1[$. On pose

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt \; ; \quad J(\lambda) = \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt.$$

1) Justifier l'existence de I et J et montrer que

$$I(\lambda) = J(\lambda) + J(1-\lambda).$$

2) a) En utilisant le théorème de convergence dominée , montrer que

$$J(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lambda}.$$

d) Etablir que $I(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + 2\lambda \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \lambda^2}$.

3) Soit f_λ la fonction 2π-périodique définie par

$$f_\lambda(t) = \cos(\lambda t) \, , \quad \text{pour tout } t \in [-\pi, \pi].$$

a) Chercher les coefficients de Fourier trigonométriques de f_λ.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_\lambda(t) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}\Big[1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\lambda^2}\cos(nt)\Big].$$

c) Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\lambda^2}\ ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\lambda^2}\ ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\big[n^2-\lambda^2\big]^2}.$$

4) En déduire que $\quad I(\lambda) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}$.

Partie II. On considère la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1) a) Montrer que la fonction Γ est bien définie pour $x > 0$ et que

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

b) Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

c) Soient α, β, x des réels strictement positifs. Montrer que

$$\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} dt = \Gamma(\frac{\alpha}{\beta}).$$

2) Soient α, β des réels strictement positifs et $h : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, une fonction continue en 0. On suppose qu'il existe $x_0 > 0$ tel que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x_0 t^\beta} t^{\alpha-1} |h(t)| dt < +\infty.$$

a) Soit $\eta > 0$. Montrer que $\forall x > x_0$, $\forall t > \eta$,

$$\exp(-xt^\beta) \le \exp(-x_0 t^\beta) \exp(-(x-x_0)\eta^\beta).$$

b) En déduire que $\forall x > x_0$,

$$\Big|\int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1}(h(t)-h(0))dt\Big| \le \int_0^{\eta} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1}|h(t)-h(0)|dt + e^{-(x-x_0)\eta^\beta} \int_\eta^{+\infty} e^{-x_0 t^\beta} t^{\alpha-1}(|h(t)|+|h(0)|)dt.$$

c) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\beta} t^{\alpha-1} h(t)dt = \Gamma(\frac{\alpha}{\beta})h(0).$$

3) On pose pour $t > 0$, $\varphi(t) = t - 1 - Log(t)$.

a) Montrer que $\forall t > 0, t \neq 1$, $\varphi(t) > 0$, et que

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt.$$

b) Soient k_1 et k_2 les fonctions définies par

$$k_1(t) = \sqrt{\varphi(t)}, t \in [1, +\infty[$$
$$k_2(t) = \sqrt{\varphi(t)}, t \in]0, 1]$$

Montrer que k_1 est une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et que
bijection décroissante de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$. Soient f_1 et f_2 leurs fonctions ré
respectives.

c) Montrer que pour $x > 0$,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xs^2} f_1'(s) ds$$
$$\int_0^1 e^{-x\varphi(t)} dt = -\int_0^{+\infty} e^{-xs^2} f_2'(s) ds.$$

d) En appliquant l'égalité (2) pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, aux fonctions h
définies par

$$h_1(t) = \begin{cases} f_1'(t), & \text{si } t > 0 \\ \sqrt{2}, & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad ; \quad h_2(t) = \begin{cases} f_2'(t), & \text{si } t > 0 \\ -\sqrt{2}, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

monter que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(t)} dt = \sqrt{2\pi}.$$

4) a) Déduire de la troisième question la formule de Stirling

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}, \quad x \to +\infty.$$

b) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-s} \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x)} = 1, \quad s > 0.$$