

Concours Technologie  
Epreuve de Physique



Date : Samedi 09 juin 2001    Heure : 8 H    Durée : 4 H    Nb pages : 6

Barème : Partie I : 4/20 ; Partie II : 10/20 ; Partie III : 3/20 ; Partie IV : 3/20.

L'usage d'une calculatrice (non-programmable) est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre parties indépendantes, quoique reliées entre elles par le même thème: "l'interféromètre de Michelson".

### I-Rôle d'une couche métallique en optique

Dans cette partie on se propose d'étudier la structure des ondes électromagnétiques à l'interface entre l'air, assimilé au vide, et une couche métallique, dans le but de préciser la fonction des miroirs et des lames dans le dispositif de Michelson.

Une onde de pulsation  $\omega$  se propage dans le vide dans la direction  $\vec{u}_x$  tombe sous incidence normale sur le plan (yOz) d'un conducteur métallique de conductivité  $\gamma$ , de perméabilité  $\mu_0$  et de permittivité  $\epsilon_0$ , occupant le demi-espace  $x > 0$ . R(Oxyz) étant un repère orthonormé dont les vecteurs de base sont :  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ .

Cette onde qualifiée d'incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise dont le champ électrique  $\vec{E}_t$  dans le conducteur s'écrit, en notation complexe :

$$\vec{E}_t = E_{ot} e^{i(k_t x - \omega t)} \vec{u}_z$$

où  $E_{ot}$  et  $k_t$  sont à priori complexes et le complexe  $i$  est tel que  $i^2 = -1$ .

On utilisera la valeur numérique  $\gamma = 10^7$  S.I. ;  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$  sont les constantes caractéristiques du vide:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} ; \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ F.m}^{-1} ; \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \text{ (} c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}\text{)}$$

#### I-1) Questions préliminaires :

I-1.a) Donner l'unité de  $\gamma$ .

I-1.b) Ecrire les équations de Maxwell dans le conducteur défini précédemment. En déduire l'équation locale de conservation de la charge. On désignera respectivement par  $\rho$  et  $\vec{j}$  les densités de charge et de courant dans ce conducteur.

**I-1.c)** En déduire l'équation différentielle vérifiée par la densité de charge  $\rho$ .

**I-1.d)** Résoudre l'équation de la question I-1.c, sachant qu'à l'origine des temps et en un point M du métal, la densité volumique de charge est non nulle :  $\rho(M, t=0) = \rho_0$ . Montrer que  $\rho(M, t)$  va tendre vers zéro suivant une loi exponentielle avec une constante de temps  $\tau$ . Quelles sont alors l'expression et la valeur numérique de  $\tau$  ? Commenter le résultat.

Dans toute la suite, on supposera que le conducteur reste localement neutre ( $\rho = 0$ ).

**I-1.e)** Pour le champ électrique d'une onde monochromatique dans le domaine visible ( $0,4 \mu\text{m} - 0,8 \mu\text{m}$ ), montrer qu'on peut négliger, dans l'équation de Maxwell-Ampère,

l'amplitude de la densité de courant de déplacement  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  devant celle de la densité de courant de conduction  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ .

Dans la suite du problème on suppose cette condition vérifiée.

**I-2)** Etablir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique  $\vec{E}_t$  dans le métal. En déduire que la relation de dispersion s'écrit :

$$k_t^2 = i \mu_0 \gamma \omega$$

**I-3)** Donner l'expression du champ électrique  $\vec{E}_t(x, t)$  en fonction de  $E_{0t}$ ,  $\mu_0$ ,  $\gamma$  et  $\omega$ . On justifiera qu'une seule des solutions de  $k_t$  est physiquement acceptable.

**I-4)** Que représente physiquement la partie imaginaire de  $k_t$  ? Calculer la vitesse de phase. Le milieu est-il dispersif ?

**I-5)** Donner, dans le domaine visible, l'ordre de grandeur de la profondeur de pénétration

$\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ , appelée : "épaisseur de peau". Exprimer  $k_t$  et  $\vec{E}_t$  en fonction de  $\delta_0$ .

**I-6)** Dans l'interféromètre de Michelson, on utilise deux miroirs et une lame semi-réfléchissante obtenus par des dépôts métalliques sur des lames de verre. A partir de la valeur de  $\delta_0$  déterminée précédemment, expliquer comment peut on réaliser un miroir et une lame semi-réfléchissante.

## II-L'interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson, utilisé dans la configuration de lame à faces parallèles (figure1), est constitué par une lame semi-réfléchissante  $L_s$  (séparatrice), non absorbante et de deux miroirs plans  $M_1$  et  $M_2$  perpendiculaires l'un à l'autre. La lame  $L_s$  est inclinée de  $45^\circ$  par rapport aux normales à  $M_1$  et  $M_2$ . L'interféromètre est plongé dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1.

Dans tout le problème, on ne tient compte ni des inconvénients liés à l'épaisseur de la séparatrice  $L_s$  (qui seront supposés parfaitement corrigés grâce à une lame compensatrice), ni d'éventuels changements de phase par réflexion. On suppose que la séparatrice  $L_s$  est infiniment mince de sorte qu'elle n'intervient que comme diviseur de faisceau et que ses facteurs de réflexion et de transmission, en intensité, sont pris égaux à  $1/2$ .

Le faisceau incident, issu d'une source  $S$  étendue, est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ .

**II-1)** On suppose qu'initialement l'interféromètre est réglé de façon à ce que les distances  $II_1$  et  $II_2$  soient égales ( $II_1$  et  $II_2$  étant les centres respectifs de  $L_s$ ,  $M_1$  et  $M_2$ ). Le phénomène d'interférence apparaît au voisinage de l'incidence normale, dans le plan focal d'une lentille convergente  $L_2$  d'axe optique  $Iy$  et de distance focale  $f' = 20$  cm.

**II-1.a)** Qu'observe-t-on sur ce plan ?

**II-1.b)** Montrer que les deux ondes qui se superposent dans la direction  $IF'$  sont cohérentes et en phase ( $F'$  étant le foyer image de la lentille  $L_2$ ). Quelle intensité transportent-elles séparément si on appelle  $I_0$  l'intensité de la source  $S$  ? Donner la valeur de l'intensité lumineuse au point  $F'$  en fonction de  $I_0$ .

**II-1.c)** Pourquoi est-il nécessaire de limiter l'inclinaison des rayons incidents issus de la source  $S$  ?

**II-2)** A partir de la situation où les deux bras sont égaux ( $II_1 = II_2$ ), on déplace  $M_2$ , normalement à son plan, d'une distance  $e = 8$  mm.

**II-2.a)** Etudier le phénomène d'interférence qui apparaît au voisinage de l'incidence normale, dans le plan focal de la lentille  $L_2$ . On peut raisonner sur les miroirs  $M_1$  (réel) et  $M'_2$  (virtuel : image de  $M_2$  par rapport à  $L_s$ ).

**II-2.b)** Représenter les deux rayons (1) et (2) issus d'un même rayon incident (caractérisé par l'angle  $i$ ) et qui interfèrent au point  $P'$  du plan focal de la lentille  $L_2$ . Le rayon (1) est obtenu par réflexion sur le miroir  $M_1$  et le rayon (2) est obtenu par des réflexions successives : sur  $M_2$  et sur la séparatrice  $L_s$  (figure 1).

**II-2.c)** Calculer la différence de chemin optique entre les deux ondes qui interfèrent au point  $F'$ .

**II-2.d)** Déterminer la différence de phase entre ces deux ondes ainsi que l'ordre d'interférence  $p_0$  au centre  $F'$ .

**II-2.e)** Déterminer l'ordre d'interférence du 5<sup>ème</sup> anneau brillant.

**II-2.f)** On place sur l'un des bras une lame mince  $L$  d'épaisseur  $d = 10$   $\mu\text{m}$  et d'indice  $n = 1,5$ . Trouver la variation de l'ordre d'interférence au centre  $F'$ .

**II-3)** On remplace la source primaire étendue  $S$  par une source ponctuelle  $S'$ , placée au foyer d'une lentille mince convergente  $L_1$ . A partir de la position initiale où les deux bras sont égaux (la lame  $L$  étant enlevée) on fait tourner le miroir  $M_1$  d'un angle  $\alpha$  très faible autour de l'axe  $I_1y$  (figure 2).

**II- 3.a)** Décrire le système de franges obtenu. Indiquer où se trouve le plan de localisation des franges.

**II- 3.b)** Calculer l'interfrange  $i$  pour  $\alpha = 6 \cdot 10^{-4}$  rad.

**II- 3.c)** On forme, avec la lentille convergente  $L_2$  de distance focale  $f' = 20$  cm, une image agrandie du plan des miroirs sur l'écran  $P$  situé à la distance  $p' = 5$  m de la lentille  $L_2$ . Calculer le grandissement de la lentille  $L_2$  et déduire la valeur de l'interfrange sur l'écran.

**II-4)** L'interféromètre est maintenant réglé comme à la question II-2, mais la source ponctuelle  $S'$ , placée au foyer de la lentille convergente  $L_1$ , n'est pas rigoureusement monochromatique. Un photo-détecteur est placé en  $F'$ , foyer image de la lentille convergente  $L_2$ , délivre un courant proportionnel à l'intensité lumineuse mesurée (figure 3).

La radiation émise par  $S'$  est la raie rouge du cadmium, de longueur d'onde centrale  $\lambda_0 = 643,8$  nm. On peut admettre que l'intensité spectrale  $I(\nu)$  de cette radiation est égale à une constante  $I_0$  pour une fréquence  $\nu$  comprise entre  $(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2})$  et  $(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2})$  et nulle partout ailleurs.  $\Delta\nu$  est la largeur de la raie en fréquence et  $\nu_0$  est la fréquence centrale de la raie correspondant à la longueur d'onde  $\lambda_0$ .

A partir de la position initiale, où la différence de marche  $\delta$  en  $F'$  est nulle ( $II_1 = II_2$ ), on déplace lentement le miroir  $M_2$  suivant l'axe  $(Ix)$  à vitesse constante.

**II-4-a)** Le photo-détecteur, placé en F', permet de mesurer l'intensité d'interférence  $I(\delta)$ . Expliquer pourquoi cette intensité  $I(\delta)$  s'obtient en faisant la somme des intensités associées à chaque bande spectrale  $d\nu$ .

**II-4 -b)** Montrer que la contribution  $dI$  de la bande spectrale  $d\nu$  à l'intensité  $I(\delta)$  s'écrit :

$$dI = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\nu}{c} \delta\right) d\nu$$

**II-4 -c)** Déterminer le facteur de visibilité  $V$  en fonction de la différence de marche  $\delta$ , de  $\Delta\nu$  et de la vitesse de la lumière  $c$ . On donne :  $V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}$ ,  $I_M$  étant l'intensité d'une frange brillante et  $I_m$  celle d'une frange sombre.

**II-4 -d)** Pour quelle valeur  $l_c$  de  $\delta$ ,  $V$  s'annule-t-il pour la première fois ?  $l_c$  est appelée longueur de cohérence.

**II-4 -e)** Calculer  $\Delta\nu$  pour la raie rouge du cadmium si  $l_c = 30$  cm.

Que représente la quantité  $\frac{l_c}{c}$  ?

On rappelle la formule de transformation trigonométrique :

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \left( \frac{A - B}{2} \right) \cos \left( \frac{A + B}{2} \right).$$

### III- Ailette de refroidissement

Pour refroidir l'alimentation électrique liée à la source de lumière S, on utilise un radiateur formé d'ailettes. Chaque ailette est une tige d'aluminium, pleine, de conductivité thermique  $K$ , cylindrique d'axe  $Ox$ , de rayon  $a$  et de longueur  $l$  infiniment grande devant  $a$  ( $l \gg a$ ) : (figure 4).

L'extrémité,  $x = 0$  de la tige, est fixée à une pièce métallique à refroidir, de température  $T_0$  supposée constante ( $T_0 = 100^\circ\text{C}$ ) et le reste de l'ailette est plongé dans l'air ambiant à la température  $T_{\text{ext}} = 20^\circ\text{C}$ .

On se place en régime permanent et on considère que, dans la section droite de la tige d'abscisse  $x$ , la température  $T(x)$  est uniforme.

Les transferts thermiques dans l'ailette se font par conduction selon la loi de Fourier et par conducto-convection sur la surface latérale avec une densité de courant thermique vers l'extérieur égale à  $h(T(x) - T_{\text{ext}})$  ; où  $h$  désigne un coefficient de transfert thermique constant et  $T(x)$  est la température du point de la surface considérée.

**III-1)** Ecrire l'expression de la loi de Fourier et exprimer le flux thermique qui traverse une section droite  $S$  de la tige d'abscisse  $x$  en fonction de  $a$  et de la densité de courant thermique  $j_{\text{th}}(x)$ .

**III-2)** En tenant compte du transfert thermique par convection, établir le bilan thermique pour une tranche d'ailette comprise entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$ . En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $T(x)$ . Par souci de simplification, on posera :  $x_0 = \sqrt{\frac{Ka}{2h}}$ .

**III-3)** Déterminer la répartition de température  $T(x)$  au sein de la tige en supposant que lorsque  $x$  tend vers l'infini,  $T(x)$  tend vers  $T_{\text{ext}}$ . Représenter graphiquement  $T$  en fonction de  $x$ . Quelle est la signification de  $x_0$  ?

**III-4)** On suppose que les pertes thermiques par convection, pour la pièce métallique et pour la tige, se font avec des densités de courant thermique ayant la même valeur de  $h$ .

Calculer les flux thermiques sortant de la pièce métallique à travers une surface circulaire de rayon  $a$  en  $x = 0$  en présence de la tige, puis sans la tige.

Comparer ces deux flux et conclure.

Application numérique :  $a = 1\text{ mm}$  ;  $K = 238 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;  $h = 8,36 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

#### **IV- Filtrage du signal délivré par le détecteur**

Le détecteur utilisé dans l'interféromètre de Michelson convertit le signal optique, reçu à la sortie de l'interféromètre, en un signal électrique. Pour filtrer le signal de sortie du détecteur et le débarrasser des bruits parasites hautes fréquences on place après ce détecteur, fournissant une tension  $V_e(t)$ , une cellule de filtrage représentée sur la figure 5.

On utilisera dans cette partie des grandeurs complexes : toute grandeur sinusoïdale  $V(t)$  sera représentée par son amplitude complexe associée  $\underline{V}$  telle que  $V(t) = \text{Re}(\underline{V} e^{i\omega t})$ , avec :  $i^2 = -1$ .

L'amplificateur opérationnel utilisé est idéal (A-O-I) et fonctionne en régime linéaire.

**IV-1)** Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$  de ce circuit en fonction de  $x = RC\omega$  ;

$\omega$  étant la pulsation du signal sinusoïdal  $V_e(t)$ .

**IV-2)** Donner l'allure du diagramme de Bode en amplitude :  $G_{dB} = 20 \log|\underline{H}|$  en fonction de  $\log x$ . On précisera les asymptotes et les points particuliers.

**IV-3)** Préciser la nature de ce filtre.

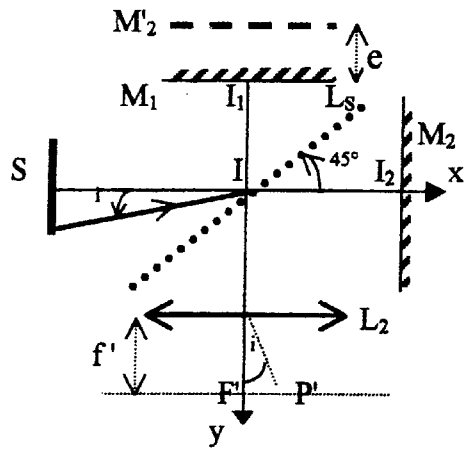


Figure 1

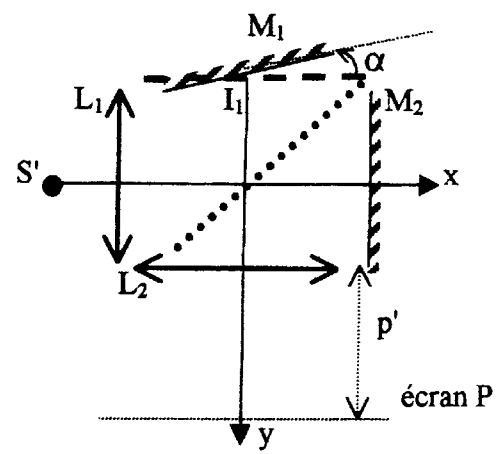


Figure 2

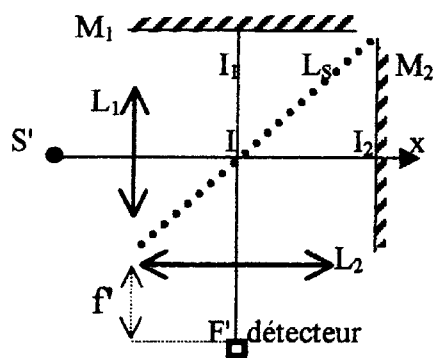


Figure 3

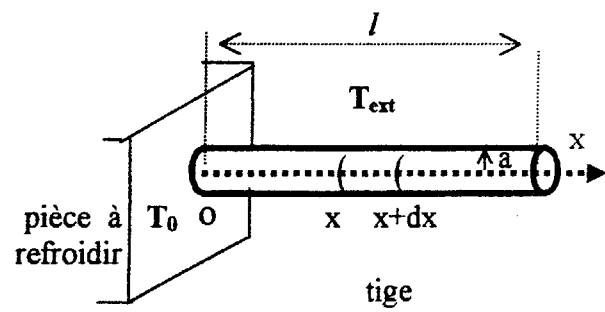


Figure 4

