REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2006

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2006

Concours Technologie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 08 Juin 2006	**Heure : 8 H00**	**Durée : 4 H**	**Nbre pages : 6**

Barème : Préliminaire : 3/20 ; Partie 1 : 5,5/20 ; Partie 2 : 4,5/20 ; Partie 3 : 7/20

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé

Dans toute l'épreuve, on utilise soit le système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe Oz et de vecteurs unitaires ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$) ou cartésiennes (x,y,z) de vecteurs unitaires ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$).

On donne : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\vec{X} = \vec{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{X}\right) - \Delta\vec{X}$.

Ce problème est consacré à l'étude comparative de quelques aspects de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) dite aussi quasi-permanents (ARQP) dans différents domaines de la physique.

On s'intéresse, dans le cadre de cette approximation, aux champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ pour voir dans quelle mesure l'ARQS affecte leurs propriétés générales et les rapproche de celles des champs statiques.

On montre, par analogie, qu'on peut étendre cette notion d'ARQS aux problèmes de diffusion thermique.

Le problème comporte un préliminaire et trois parties indépendantes :

- Dans la première partie, on étudie le comportement d'un condensateur plan.
- Dans la seconde partie, on s'intéresse à l'étude d'un solénoïde parcouru par un courant dont l'intensité varie lentement dans le temps.
- Dans la troisième partie, on montre que l'utilisation des analogues électriques facilite le traitement de quelques problèmes de diffusion thermique dans le cadre de l'ARQS.

PRELIMINAIRE :

On considère un milieu caractérisé par la permittivité électrique ε_0 et la perméabilité magnétique μ_0 du vide.

On désigne par $\vec{J}(P,t)$ et $\rho(P,t)$ respectivement le vecteur densité volumique de courant et la densité volumique de charge en un point P de ce milieu à l'instant t (voir figure 1).

1.a. A partir de deux équations de Maxwell, que l'on précisera, déterminer les relations reliant les champs électrique $\vec{E}(M,t)$ et magnétique $\vec{B}(M,t)$ aux potentiels scalaire V(M,t) et vecteur $\vec{A}(M,t)$ en un point M de l'espace à l'instant t.

1.b. Justifier que ces relations ne définissent pas les potentiels V et $\vec{A}$ de manière unique.

2.a. Etablir les deux équations différentielles vérifiées par les potentiels V(M,t) et $\vec{A}(M,t)$.

2.b. Simplifier ces équations différentielles dans le cadre de la jauge de Lorentz : $\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

3. On admet que les solutions de ces équations de propagation s'écrivent :

- $V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\text{sources}} \frac{\rho(P, t - PM/c)}{PM} d\tau_P$

- $\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{sources}} \frac{\vec{J}(P, t - PM/c)}{PM} d\tau_P$

où c désigne la célérité de la lumière dans le vide.
Interpréter physiquement la forme des solutions.

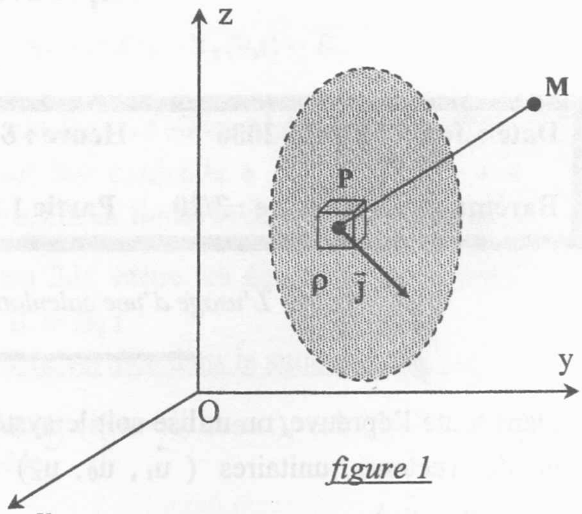

figure 1

4. Rappeler la définition de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) et son domaine de validité.
Quel est le phénomène physique négligé ?

5. Ecrire les expressions des potentiels V(M,t) et $\vec{A}(M,t)$ en supposant satisfaite l'ARQS.

PREMIERE PARTIE : ARQS électrique

On considère un condensateur plan d'axe (Oz) formé de deux armatures circulaires A_1 et A_2 de même rayon a, parfaitement conductrices et espacées d'une distance e (avec e << a) de façon à négliger les effets de bords (voir figure 2).

1. On désigne par q_0 la charge supposée constante et uniformément répartie sur l'armature A_1 du condensateur.

1.a. Justifier, par symétrie, que le champ électrostatique $\vec{E}_0$ s'écrit : $\vec{E}_0 = E_0(z)\,\vec{u}_z$.

1.b. Montrer que le champ $\vec{E}_0$ est uniforme.

1.c. En déduire, qu'entre les armatures, règne le champ électrostatique : $\vec{E}_0 = \frac{q_0}{\pi\,\varepsilon_0\,a^2}\vec{u}_z$.

1.d. Déterminer l'énergie électrostatique emmagasinée entre les armatures du condensateur.
En déduire l'expression de la capacité C de ce condensateur.

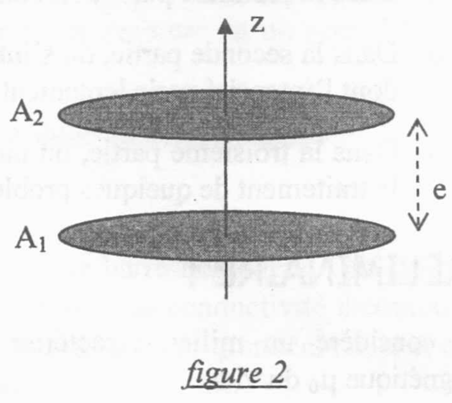

figure 2

Dans la suite, on considère que l'armature A_1 porte une charge variable au cours du temps q(t).
On suppose, dans une première approximation, que la variation de q(t) soit suffisamment lente pour admettre que le champ électrique $\vec{E}_0(t)$ entre les armatures reste uniforme.

2. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}_0(t)$ entre les armatures.

3. Montrer que le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par les variations dans le temps du champ électrique $\vec{E}_0(t)$, en un point $M(r,\theta,z)$ situé entre les armatures, s'écrit :

$$\vec{B}_1(r,t) = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2}\frac{dq(t)}{dt}\vec{u}_\theta.$$

4. Afin de déterminer le domaine de validité des expressions trouvées du champ électromagnétique $(\vec{E}_0, \vec{B}_1)$, on cherchera le champ électrique $\vec{E}_2$ induit par les variations dans le temps du champ magnétique $\vec{B}_1$ et qui vient s'ajouter à $\vec{E}_0$ pour corriger l'expression du champ électrique qui règne entre les armatures.

4.a. Montrer que : $\vec{E}_2(r,t) = \left(\frac{r}{2c}\right)^2 \frac{1}{q(t)}\frac{d^2q(t)}{dt^2}\vec{E}_0(t)$. On prendra : $\vec{E}_2(0,t) = \vec{0}$.

4.b. On suppose, que les variations de la charge $q(t)$ sont sinusoïdales : $q(t) = q_0 \cos\omega t$. Exprimer le champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2$ en fonction de $\vec{E}_0$ et la variable $u = \frac{\omega r}{c}$.

4.c. Montrer que le champ électrique $\vec{E}$ peut être confondu à $\vec{E}_0$ si le rayon a des armatures est très inférieur à une valeur a_0 qu'on exprimera en fonction de c et ω. Commenter.

4.d. En prenant $a = 1$ cm et $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1$ MHz, évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur relative que l'on commet en confondant $\vec{E}$ à $\vec{E}_0$.

5. En supposant satisfaite la condition de la question **4.c**, écrire les équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique $(\vec{E} \approx \vec{E}_0,\ \vec{B} \approx \vec{B}_1)$.
On parle d'une ARQS dite **électrique** qu'on supposera vérifiée dans la suite de cette partie.

6.a. Dans le cas d'une variation sinusoïdale de la charge ($q(t) = q_0 \cos\omega t$), calculer l'énergie magnétique W_m emmagasinée entre les armatures du condensateur.

6.b. Conclure sur la contribution du champ magnétique et celle du champ électrique à l'énergie électromagnétique.

7.a. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ (en $r = a$) en fonction de $q(t)$ et $\frac{dq(t)}{dt}$.

7.b. Faire un bilan énergétique et conclure.

DEUXIEME PARTIE : ARQS magnétique

On considère un solénoïde d'axe (Oz), de rayon a et de longueur h >> a (voir figure 3).
Ce solénoïde, comportant n spires par unité de longueur, est parcouru par un courant d'intensité i(t).
On suppose, dans une première approximation, que la variation de l'intensité du courant i(t) soit suffisamment lente pour admettre que le champ magnétique $\vec{B}_0(t)$ dans le solénoïde soit uniforme.

1. Montrer que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde s'écrit : $\vec{B}_0(t) = \mu_0\, n\, i(t)\, \vec{u}_z$.

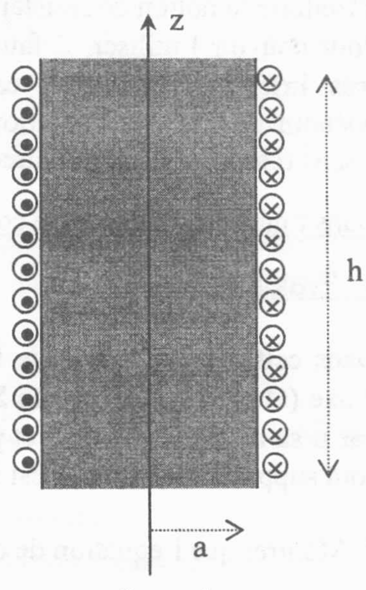

figure 3

2. Montrer que le champ électrique $\vec{E}_1$ créé par les variations dans le temps du champ magnétique $\vec{B}_0(t)$, en un point $M(r,\theta,z)$ situé à l'intérieur du solénoïde, s'écrit :

$$\vec{E}_1(r,t) = -\frac{\mu_0\, n\, r}{2}\frac{di(t)}{dt}\,\vec{u}_\theta.$$

3. Afin de déterminer le domaine de validité des expressions trouvées du champ électromagnétique $(\vec{E}_1, \vec{B}_0)$, on cherchera le champ magnétique $\vec{B}_2$ induit par les variations dans le temps du champ électrique $\vec{E}_1$ et qui vient s'ajouter à $\vec{B}_0$ pour corriger l'expression du champ magnétique qui règne à l'intérieur du solénoïde.

3.a. Montrer que : $\vec{B}_2(r,t) = \left(\dfrac{r}{2c}\right)^2 \dfrac{1}{i(t)}\dfrac{d^2i(t)}{dt^2}\,\vec{B}_0(t)$. On prendra : $\vec{B}_2(0,t) = \vec{0}$.

3.b. On suppose, à présent, que les variations du courant $i(t)$ sont sinusoïdales : $i(t) = i_0 \cos\omega t$. Montrer que le champ magnétique $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_2$ peut être confondu à $\vec{B}_0$ si le rayon a du solénoïde est très inférieur à une valeur a_0 qu'on exprimera en fonction de c et ω. Commenter.

4. En supposant satisfaite la condition de la question **3.b**, écrire les équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique ($\vec{E} \approx \vec{E}_1$; $\vec{B} \approx \vec{B}_0$).
On parle d'une ARQS dite **magnétique** qu'on supposera vérifiée dans la suite de cette partie.

5.a. Dans le cas d'une variation sinusoïdale du courant ($i(t) = i_0 \cos\omega t$), calculer l'énergie magnétique W_m emmagasinée à l'intérieur du solénoïde.

5.b. Calculer, de même, l'énergie électrique W_e.

5.c. Conclure sur la contribution du champ électrique et celle du champ magnétique à l'énergie électromagnétique.

6.a. Déterminer la puissance rayonnée par le solénoïde en fonction de $i(t)$ et $\dfrac{di(t)}{dt}$.

6.b. Faire un bilan énergétique et conclure.

TROISIEME PARTIE : ARQS et diffusion thermique

L'ARQS, étendue aux problèmes de diffusion thermique, permet de simplifier les calculs en utilisant des lois linéaires. On peut ainsi utiliser la conservation du flux thermique et introduire la notion de résistance thermique.
Pour pouvoir l'utiliser, il faut que le temps caractéristique des transferts thermiques τ_{th} soit **très inférieur** au temps caractéristique τ_s des variations temporelles des sources du phénomène. Ainsi, l'évolution, en fonction du temps, de la température en un point M suit « sans retard » celle des sources.

Dans tout ce qui suit, on ne considère que les transferts thermiques par conduction.

A- Evaluation de τ_{th}

Dans cette partie, on étudie la conduction thermique dans une barre homogène cylindrique d'axe (Oz) de section droite Σ et de longueur L. On désigne par λ sa conductivité thermique, par μ sa masse volumique et par c_m sa capacité thermique massique. Les grandeurs λ, μ et c_m sont supposées uniformes est indépendantes de la température à tout instant.

1. Montrer que l'équation de diffusion thermique s'écrit : $\mu c_m \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

2. Grâce à un système de chauffage, arrêté à l'instant t = 0, on obtient le profil de température suivant : $T(z,t=0) = T_0 + \theta_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$; T_0 et θ_0 sont des constantes positives.

Les extrémités de la barre, en z = 0 et en z = L, sont maintenues à la même température T_0.

Pour t >0, on cherchera une solution sous la forme : $T(z,t) = T_0 + \theta(t) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$.

2.a. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\theta(t)$. On introduira une constante τ_{th}, homogène à un temps.

2.b. Résoudre cette équation et en déduire la solution T(z,t).

2.c. Tracer les allures des courbes donnant la température en fonction de z pour les différents instants : $t = 0$; $t = \tau_{th}$; $t = 2\tau_{th}$; $t \to \infty$.

2.d. Quelle est la signification physique de τ_{th} ?

2.e. Montrer que si l'évolution de la température en un point de la barre est décrite dans le cadre de l'ARQS, la température T(z,t) doit satisfaire l'équation : $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$.

B- Echange thermique entre deux corps à travers la barre

La barre conductrice, décrite précédemment, est reliée en z = 0 et z = L à deux solides S_1 et S_2 de même capacité thermique C_0 (voir figure 4).
L'ensemble est isolé de façon à ce qu'il n'y ait aucun échange thermique entre ce système ($S_1 + S_2$ + barre) et l'extérieur.
Les conductivités thermiques des deux solides sont supposées infinies assurant des températures uniformes $T_1(t)$ de S_1 et $T_2(t)$ de S_2. Ces températures évoluent au cours du temps suite au transfert thermique à travers la barre cylindrique.
On note : $T_1(t=0) = T_{10}$ et $T_2(t=0) = T_{20}$.

On supposera que les transferts thermiques dans la barre sont décrits dans le cadre de l'ARQS.

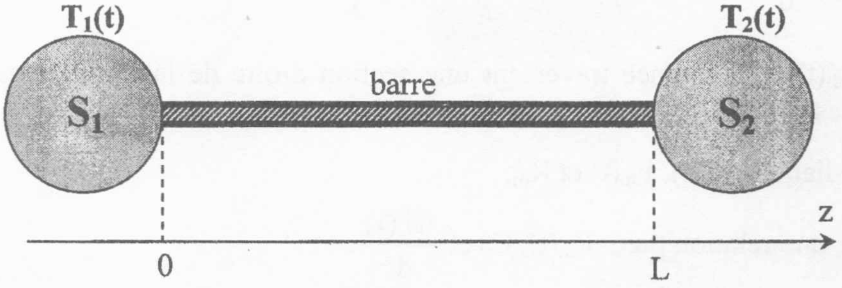

figure 4

3. En intégrant l'équation établie à la question **2.e**, trouver l'expression de la température T(z,t), en un point de la barre d'abscisse z, en fonction de $T_1(t)$, $T_2(t)$, z et L.

4. Montrer que la puissance (flux thermique) traversant une section quelconque de la barre est indépendante de z et qu'elle s'écrit sous la forme : $P_{th} = \frac{\lambda}{L} \Sigma \left(T_1(t) - T_2(t)\right)$.

5. Par analogie avec la conduction du courant électrique dans un conducteur ohmique déterminer la résistance thermique R_{th}, associée à la barre conductrice, qu'on exprimera en fonction de λ, Σ et L.

6.a. Exprimer, en fonction de $P_{th}(t)$, les énergies reçues, pendant dt, par les solides S_1 et S_2.

6.b. En déduire, par application du premier principe de la thermodynamique aux solides S_1 et S_2, deux équations différentielles vérifiées par $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

6.c. En posant : $\alpha(t) = T_1(t) + T_2(t)$ et $\beta(t) = T_1(t) - T_2(t)$, montrer que l'on a :

- $\alpha(t) = T_{10} + T_{20}$
- $\dfrac{d\beta(t)}{dt} + \dfrac{\beta(t)}{\tau_S} = 0$

où τ_S est une constante que l'on exprimera en fonction de R_{th} et C_0.

7.a. Donner les expressions de $T_1(t)$ et $T_2(t)$ en fonction de T_{10}, T_{20}, et τ_S.

7.b. En déduire l'expression de la température $T(z,t)$ en un point de la barre.
Commenter le cas : $t >> \tau_S$.

8. En utilisant les expressions des deux temps caractéristiques τ_{th} et τ_S, montrer que l'ARQS est satisfaite si la capacité thermique C_b de la barre est très inférieure à la capacité thermique C_0 des deux solides.

C- Analogie thermique-électrique

On considère une barre conductrice de faible capacité thermique, de section droite Σ, de longueur L et de conductivité thermique λ.
Cette barre est solidaire en $z = 0$ à un thermostat de température T_0 et en $z = L$ à un solide S de conductivité thermique infinie, de capacité thermique C_0 et de température initiale $T_1 < T_0$ (voir figure 5).
On cherchera l'évolution de la température T(t) du solide S en supposant satisfaites les conditions de validité de l'ARQS pour la conduction thermique dans la barre.

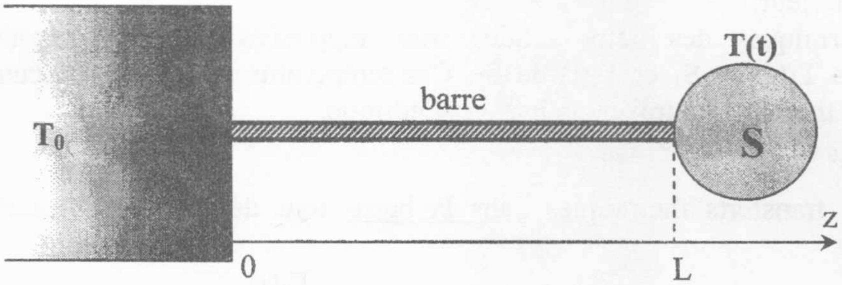

figure 5

9. On désigne par $P_{th}(t)$ la puissance traversant une section droite de la barre et par R_{th} la résistance thermique associée à la barre.

9.a. Ecrire la relation liant T_0, T(t), $P_{th}(t)$ et R_{th}.

9.b. Ecrire, de même, une relation liant $P_{th}(t)$, C_0 et $\dfrac{dT(t)}{dt}$.

10.a. En déduire que l'analogue électrique de ce problème thermique est un circuit comportant un générateur de tension de f.e.m constante E_0, une résistance R et un condensateur de capacité C (figure 6).

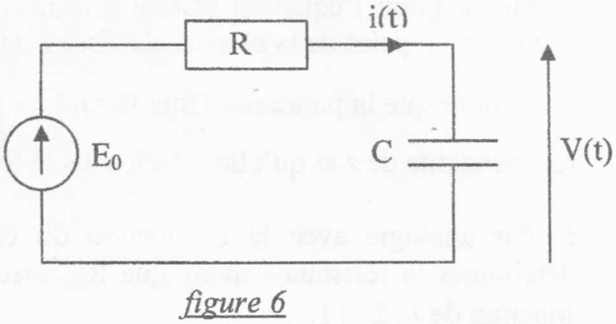

figure 6

10.b. En posant $V_1 = V(t = 0)$, exprimer la tension V(t) aux bornes du condensateur en fonction de V_1, E_0, R et C.

10.c. En déduire la loi de variation de la température T(t) du solide S.

FIN DE L'EPREUVE