REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2006

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2006

R
CON

Concours Technologie
Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 H **Date :** 5 Juin 2006 **Heure :** 8 H **Nb pages :** 4

Barème : Exercice : 5 pts. Problème (I : 5 pts. II : 5 pts. III : 5 pts.)

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé ;
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on définit les applications $I_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par

$$\forall\ r \in \mathbf{R}\ ,\ I_n(r) = \int_0^{2\pi} \cos(nt) e^{r\cos(t)} dt\ .$$

1/ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, I_n est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et que pour tout $r \in \mathbf{R}$,

$$I_n'(r) = \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(t) e^{r\cos(t)} dt$$

et

2/ En intégrant deux fois par parties $\int_0^{2\pi} \cos(nt)\sin^2(t) e^{r\cos(t)} dt$, déduire de la question précédente que I_n est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y''(r) + \frac{y'(r)}{r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + 1\right) y(r) = 0\ .\ (1)$$

3/ En utilisant la définition de $I_n(r)$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a :

$$\forall\ r \in \mathbf{R}\ ,\ I_n(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k}{k!} \left(\int_0^{2\pi} \cos(nt)(\cos(t))^k dt\right).$$

4/ On suppose que $n \in \mathbf{N}$.

a) Montrer que si $0 \leq k < n$ alors $\int_0^{2\pi} \cos(nt)(\cos(t))^k \, dt = 0$

b) Calculer, pour $k \geq n$, $\int_0^{2\pi} \cos(nt)(\cos(t))^k \, dt$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall \ r \in \mathbf{R}$, $I_n(r) = 2\pi \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(r/2)^{n+2p}}{p!(n+p)!}$.

5/ Montrer que $I_n(r) > 0$ pour tout $r > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

6/ a) Montrer que $r \longrightarrow I_n(r) \int_1^r \frac{1}{t(I_n(t))^2} dt$ est une solution de l'équation (1).

b) En déduire que toute solution sur $]0,+\infty[$ de (1) est de la forme :

$y(r) = I_n(r)\left(\alpha + \beta \int_1^r \frac{1}{t(I_n(t))^2} dt \right)$ où α et β sont deux constantes réelles.

c) Trouver toutes les solutions de (1) sur $]0,+\infty[$ qui sont prolongeables par continuité en 0^+.

Problème

Dans ce problème $\mathbf{E} = \mathbf{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et Δ désigne l'application définie sur $\mathbf{E}$ par :

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

Partie I

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{E}_n$ le sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On désigne par $\mathcal{B} = (e_k)_{0 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbf{E}_n$, où $e_k = X^k$, $0 \leq k \leq n$.

On considère $(h_k)_{k \geq 0}$ la famille de polynômes définie par :

$h_0 = 1$ et $h_k = X(X-1).......(X-k+1)$, pour $k \geq 1$.

1/ a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.

b) Déterminer le noyau de Δ.

c) Déterminer l'image de Δ.

2/ Expliciter $\Delta(h_k)$ pour tout entier k.

3/ Soit n un entier naturel.

a) Montrer que $\mathcal{B}' = (h_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbf{E}_n$.

b) Montrer que $\mathbf{E}_n$ est stable par Δ.

4/ On désigne par φ l'endomorphisme induit par Δ sur $\mathbf{E}_n$.

a) Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

b) On définit par récurrence sur l'entier p l'endomorphisme φ^p par :

$\varphi^0 = Id_{\mathbf{E}_n}$ et pour tout entier $p \geq 0$, $\varphi^{p+1} = \varphi^p \circ \varphi$.

Montrer que si $p \in \{1,....,n\}$ alors $\varphi^p(\mathbf{E}_n) \subset \mathbf{E}_{n-p}$.

c) Montrer que pour tous entiers naturels p et k on a :

$$\varphi^p(h_k) = \begin{cases} 0 \, , \, si \; p > k \\ k(k-1).....(k-p+1)h_{k-p} \, , \, si \; k \geq p \end{cases}$$

d) Déterminer A^n puis A^{n+1}.

5/ Soit P un polynôme dans $\mathbf{E}_n$ et $(a_0, a_1, ..., a_n)$ ses composantes dans la base $\mathcal{B}'$.

Montrer que $a_k = \dfrac{\varphi^k(P)(0)}{k!}$.

Application : Déterminer le polynôme P dans $\mathbf{E}_3$ tel que :

$P(0) = 7$, $P(1) = 21$, $P(2) = 29$, $P(3) = 25$.

Partie II

1/ On considère un polynôme $P \in \mathbf{E}$ de degré $p \geq 0$ et de coefficient dominant a_p.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbf{E}$ vérifiant :

i) $Q' = P$;

ii) $\int_0^1 Q(t)dt = 0$.

On précisera le degré et le coefficient dominant de Q en fonction de p et de a_p.

b) En déduire qu'on peut définir par récurrence la suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par :

i_1) $B_0 = 1$;

i_2) $\forall n \geq 1, \; B'_n = nB_{n-1}$;

i_3) $\forall n \geq 1, \; \int_0^1 B_n(t)dt = 0$.

c) Déterminer pour $n \in \mathbf{N}$ le degré et le coefficient dominant du polynôme B_n .

Les polynômes B_n s'appellent les polynômes de Bernouilli.

On définit ensuite les nombres de Bernouilli par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n = B_n(0)$.

2/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} X^k$.

b) Expliciter B_1 , B_2 , B_3 et B_4, ainsi que les nombres b_1 , b_2 , b_3 et b_4.

3/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

4/ a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$B_n(X) = 2^{n-1}\left[B_n(\frac{1}{2}X) + B_n(\frac{1}{2}(X+1)) \right].$$

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $B_{2p+1}(\frac{1}{2}) = 0$

c) En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $b_{2p+1} = 0$.

d) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$..

5/ Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta B_n = nX^{n-1}$.

6/ a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \geq 2$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} j^{k-1} = \frac{B_k(n) - B_k(0)}{k}.$$

b) En déduire la somme $\sum_{j=0}^{n} j^3$.

Partie III

1/ Montrer que pour N entier naturel non nul et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2\pi kt) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}. \ (*)$$

2/ Pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, soit g_n la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$g_n(t) = \frac{B_{2n}(t) - B_{2n}(0)}{\sin(\pi t)}.$$

Montrer que g_n est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et que le prolongement est continûment dérivable.

3/ Montrer que pour toute fonction f de classe C^1 sur $[0,1]$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt = 0.$$

4/ Pour k et n entiers positifs, on définit : $\alpha_{n,k} = \int_0^1 B_{2n}(t) \cos(2\pi kt) dt$.

a) Trouver une relation entre $\alpha_{n,k}$ et $\alpha_{n-1,k}$.

b) En déduire l'expression de $\alpha_{n,k}$ en fonction de n et k.

5/ En utilisant la formule (*) , montrer que pour tous entiers naturels N et p on a :

$$\int_0^1 g_p(t) \sin[(2N+1)\pi t] dt = 2\sum_{k=1}^{N} \alpha_{p,k} - b_{2p}.$$

6/ En utilisant 3/ et 5/ donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}}$ en fonction de p et b_{2p}.

En déduire les valeurs de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

7/ a) Montrer que pour tout p entier naturel non nul, la majoration :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}} \leq 2.$$

b) En déduire la majoration $|b_{2p}| \leq (2p)! \frac{4}{(4\pi^2)^p}$.