Corrigé de l'épreuve de Mathématiques : Technologie
Session 2006

Exercice

1/ D'après le théorème de dérivation d'une fonction définie par une intégrale, on montre que I_n est dérivable et que pour tout $r \in \mathbf{R}$, $I_n'(r) = \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(t)e^{r\cos(t)}dt$. On procède par récurrence pour justifier que pour tout $p \in \mathbf{N}$ $I_n^{(p)}(r) = \int_0^{2\pi} \cos(nt)(\cos(t))^p e^{r\cos(t)}dt$, ce qui permet de conclure que I_n est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

$I_n''(r) = \int_0^{2\pi} \cos(nt)(\cos(t))^2 e^{r\cos(t)}dt = I_n(r) - \int_0^{2\pi} \cos(nt)\sin^2(t)e^{r\cos(t)}dt$.

2/ En faisant deux intégrations par parties, on déduit que pour $r > 0$ I_n est solution sur de l'équation différentielle : $y''(r) + \frac{y'(r)}{r} - (\frac{n^2}{r^2} + 1)y(r) = 0$.

3/ En dévéloppant $e^{r\cos(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k}{k!}(\cos(t))^k$, puis en remarquant que cette série converge uniformément (par rapport à t), on permute l'intégrale et la somme pour obtenir le résultat.

4/ a) On a $(\cos(nu))(\cos(u))^k = (\frac{e^{inu} + e^{-inu}}{2})(\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2})^k$

$\frac{1}{2^{k+1}}\left[\sum_{j=0}^{k} C_k^j (e^{i(n+2j-k)u} + e^{-i(n-2j+k)u}\right]$.

Si $0 \le k < n$, alors pour tout $0 \le j \le k$ on a $\int_0^{2\pi} e^{i(n+2j-k)t}dt = \int_0^{2\pi} e^{-i(n-2j+k)t}dt = 0$.

Ce qui implique $\int_0^{2\pi} \cos(nt)(\cos(t))^k dt = 0$

---

b) Supposons $k \ge n$,

- si $k = n + 2p$, $p \ge 0$

pour tout $0 \le j \le n+2p$, $\int_0^{2\pi} e^{i(n+2j-k)t}dt = \begin{cases} 0 \ , \ si \ \ j \neq p \\ 2\pi, \ si \ \ j = p \end{cases}$

de même $\int_0^{2\pi} e^{-i(n-2j+k)t}dt = \begin{cases} 0 \ , \ si \ \ j \neq n+p \\ 2\pi \ , si \ \ j = n+p \end{cases}$

-si $k = n + 2p + 1$, $p \ge 0$, on a pour tout $0 \le j \le n+2p+1$

$\int_0^{2\pi} e^{i(n+2j-k)t}dt = \int_0^{2\pi} e^{-i(n-2j+k)t}dt = 0$

Ce qui donne : $\int_0^{2\pi}\cos(nt)(\cos(t))^k\,dt = \begin{cases} 0 \ , \ si \ \ k = n+2p+1 \\ \dfrac{2\pi}{2^{n+2p}}\dfrac{(n+2p)!}{p!(n+p)!} \ , \ si \ \ k = n+2p \end{cases}$

c) $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{r^k}{k!}\left(\int_0^{2\pi}\cos(nt)(\cos(t))^k\,dt\right) = 0 + 2\pi\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+2p}}\frac{r^{n+2p}}{(n+p)!\,p!}$

$$= 2\pi\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(r/2)^{n+2p}}{(n+p)!\,p!}.$$

5/ - Si $n\in\mathbf{N}$, il est évident que si $r>0$ $I_n(r)>0$,

- si $n\in\mathbf{Z}_-$, il suffit de remarquer que dans la définition de $I_n(r)$, on a $I_n(r) = I_{-n}(r)$.

6° a) un calcul direct donne que $r \longrightarrow I_n(r)\int_1^r \frac{1}{t(I_n(t))^2}dt$ est une solution de l'équation .

b) $r \longrightarrow I_n(r)$ et $r \longrightarrow I_n(r)\int_1^r \frac{1}{t(I_n(t))^2}dt$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1) , donc toute solution sur $]0,+\infty[$ de (1) est de la forme :

$y(r) = I_n(r)\left(\alpha + \beta\int_1^r \frac{1}{t(I_n(t))^2}dt\right)$ où α et β sont deux constantes réelles.

c) On a $I_n(r) \underset{r\to 0}{\approx} \frac{\pi}{2^{n-1}n!}r^n$, donc $r(I_n(r))^2 \underset{r\to 0}{\approx} (\frac{\pi}{2^{n-1}n!})^2 r^{2n+1}$, par conséquent $\int_1^r \frac{1}{u(I_n(u))^2}du \xrightarrow[r\to 0^+]{} -\infty$. Ainsi les solutions de (1) sur $]0,+\infty[$ qui sont prolongeables par continuité en 0^+ sont de la forme $y(r) = \alpha I_n(r)$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Problème

Partie I

1/ a) Soit $P \in \mathbf{E}$. Si P est de degré $n=0$ alors $\Delta(P)=0$, si P est de degré $n \geq 1$, alors $\Delta(P)$ est un polynôme de degré $n-1$. Donc : $\forall P \in \mathbf{E}$, $\Delta P \in \mathbf{E}$. De plus, il est clair que Δ est linéaire , ainsi Δ est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.

---

b) Le noyau de Δ est le sous espace engendré par e_0 .

---

c) Soit $Q \in \mathbf{E}$, un polynôme donné de degré m , on considère le polynôme P de degré $m+1$ tel que $P(0)=0$, $P(1)=Q(0)$, $P(2)=Q(0)+Q(1)$, ..., $P(m)=Q(0)+Q(1)+..........+Q(m-1)$. On vérifie que $\Delta(P)=Q$. Donc Δ est surjectif et l'image de Δ est $\mathbf{E}$.

2/ On calcule $\Delta(h_k)$, on trouve $\Delta(h_0)=0$ et $\Delta(h_k)=kh_{k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$.

3/ .

a) On sait que $\dim \mathbf{E}_n = n+1$, chaque polynôme h_k est de degré égal à k donc $(h_k)_{0 \leq k \leq n}$ est un système libre , il est formé de $(n+1)$ vecteurs, alors , $\mathcal{B}'=(h_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbf{E}_n$.

---

b) On a déjà vu que si $n \geq 1$ et $P \in \mathbf{E}_n$ alors $\Delta P \in \mathbf{E}_{n-1}$ et si $P \in \mathbf{E}_0$, $\Delta P = 0$. Donc pour tout entier naturel n $\mathbf{E}_n$ est stable par Δ.

4/ a) D'après 2/ la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'=(h_k)_{0 \leq k \leq n}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & . & 0 \\ & & & . & n \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est une matrice carrée d'ordre $(n+1)$, triangulaire supérieure telle que $a_{ii}=0$, $\forall 1 \leq i \leq n+1$; $a_{i,i+1}=i$, $\forall 1 \leq i \leq n$ et $a_{i,j}=0$ ailleurs.

---

b) On a déjà vu φ $(\mathbf{E}_n) \subset \mathbf{E}_{n-1}$, on montre par récurrence que pour tout $p \in \{1,....,n\}$ $\varphi^p(\mathbf{E}_n) \subset \mathbf{E}_{n-p}$.

---

c) c'est une conséquence de la formule $\Delta(h_k)=kh_{k-1}$:

$$\Delta^p(h_k)=\begin{cases} 0 \text{ , } si\ p>k \\ k(k-1).....(k-p+1)h_{k-p} \text{ , } si\ k \geq p \end{cases}$$

d) D'après 4/ b) on a $\varphi^n(\mathbf{E}_n) \subset \mathbf{E}_0$, ce qui implique $\varphi^{n+1}(\mathbf{E}_n) = \{0\}$. D'autre part, d'après

4/ c) on a $\varphi^n(h_n) = n!h_0$. D'où $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & n! \\ . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$

5/ C'est une conséquence de 4/ c) et du fait que $h_p(0) = 0$, $\forall p \geq 1$.

Application : on a $\varphi(P)(0) = P(1) - P(0)$; $\varphi^2 P(0) = P(2) - 2P(1) + P(0)$;

$\varphi^3 P(0) = P(3) - 3P(2) + 3P(1) - P(0)$

On trouve $P(X) = 7 + 14h_1 - 6h_2 - h_3$

Partie II

1/ a) Unicité : supposons qu'il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 vérifiant les deux relations. Puisque $Q_1' = Q_2'$, alors $Q_1 = Q_2 + c$, en intégrant les fonctions polynômes associées entre 0 et 1, on trouve $c = 0$, donc $Q_1 = Q_2$.

Existence : Si $P = 0$, il suffit de prendre $Q = 0$.

Si $P \neq 0$, $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, on prend $Q = \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} + c$, où c est une constante telle que $\int_0^1 Q(t)dt = 0$, $c = -\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$.

b) En utilisant la question précédente, on démontre par récurrence sur n l'existence de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations demandées.

c) On démontre par récurrence que le degré de B_n vaut n et que B_n est unitaire.

2/ a) On procède par récurrence. Pour $n = 0$, la propriété est vérifiée. Supposons qu'elle est vérifiée à l'ordre n, $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} X^k$ alors

$(B_{n+1})'(X) = (n+1)B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (n+1) C_n^k b_{n-k} X^k$. On en déduit que

$$B_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k+1} C_n^k b_{n-k} X^{k+1} + c \text{ avec } c = b_{n+1}.$$

$$B_{n+1}(X) = \sum_{l=1}^{n+1} \frac{n+1}{l} C_n^{l-1} b_{n+1-l} X^l + b_{n+1} = \sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^l b_{n+1-l} X^l.$$

b) $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$, $b_1 = -\frac{1}{2}$; $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$, $b_2 = \frac{1}{6}$;

$B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$, $b_3 = 0$; $B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$.

3/ On procède par récurrence. Pour $n = 0$, la propriété est vérifiée. Supposons qu'elle est vérifiée à l'ordre n : $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Posons $Q(X) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(1-X)$, alors $Q'(X) = -(-1)^{n+1}(B_{n+1})'(1-X) = (-1)^n (n+1) B_n(1-X) = (n+1)B_n(X) = (B_{n+1})'(X)$.
Par conséquent $Q(X) = B_{n+1}(X) + c$, en intégrant entre 0 et 1 les fonctions polynômes associées, on obtient :
$\int_0^1 Q(t)dt = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(1-t)dt = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(u)du = 0$. D'où $c = 0$ et
$Q(X) = B_{n+1}(X)$.

4/ a) 3/ On procède par récurrence. Pour $n = 0$, la propriété est vérifiée. Supposons qu'elle est vérifiée à l'ordre n : $B_n(X) = 2^{n-1}\left[B_n(\frac{1}{2}X) + B_n(\frac{1}{2}(X+1))\right]$. Posons

$Q(X) = 2^n\left[B_{n+1}(\frac{1}{2}X) + B_{n+1}(\frac{1}{2}(X+1))\right]$, $Q'(X) = 2^n\left[(B_{n+1})'(\frac{1}{2}X) + (B_{n+1})'(\frac{1}{2}(X+1))\right] =$

$Q'(X) = (n+1)2^{n-1}\left[B_n(\frac{1}{2}X) + B_n(\frac{1}{2}(X+1))\right] = (n+1)B_n(X) = (B_{n+1})'(X)$.

Par conséquent $Q(X) = B_{n+1}(X) + c$, en intégrant entre 0 et 1, on obtient comme dans la question précédente $c = 0$ et $Q(X) = B_{n+1}(X)$.

---

b) En faisant $x = \frac{1}{2}$ dans la relation (entre fonctions polynômes) $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$,

on obtient avec $n = 2p+1$, $B_{2p+1}(\frac{1}{2}) = -B_{2p+1}(\frac{1}{2})$, ce qui donne $B_{2p+1}(\frac{1}{2}) = 0$.

---

c) En faisant $x = 0$ dans la relation $B_n(x) = 2^{n-1}\left[B_n(\frac{1}{2}x) + B_n(\frac{1}{2}(x+1))\right]$, avec

$n = 2p+1$, on obtient $B_{2p+1}(0) = 2^{2p}\left[B_{2p+1}(0) + B_{2p+1}(\frac{1}{2})\right]$, en utilisant le fait que

$B_{2p+1}(\frac{1}{2}) = 0$, on trouve $B_{2p+1}(0) = b_{2p+1} = 0$.

---

d) On a pour tout $n \geq 1$, $B_n' = nB_{n-1}$, en intégrant entre 0 et 1 les fonctions polynômes, on obtient $B_n(1) - B_n(0) = n\int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0$ si $n-1 \geq 1$. D'où pour $n \geq 2$
$B_n(1) = B_n(0)$
Remarque : pour $n = 1$, cette propriété n'est pas vraie.

5/ On procède par récurrence, pour $n = 1$, $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ et $\Delta B_1 = 1$, la propriété est vérifiée. On suppose $\Delta B_n = nX^{n-1}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$. Soit $x \in \mathbf{R}$, en intégrant la relation précédente entre 0 et x , on trouve :
$\int_0^x B_n(t+1)dt - \int_0^x B_n(t)dt = n\int_0^x t^{n-1}dt$,

$$\int_1^{x+1} B_n(u)du - \int_0^x B_n(u)du = x^n \Rightarrow \int_1^0 B_n(u)du + \int_0^{x+1} B_n(u)du - \int_0^x B_n(u)du = x^n$$

$$\Rightarrow \int_x^{x+1} B_n(u)du = x^n \Rightarrow \int_x^{x+1} \frac{1}{n+1} B_n'(u)du = x^n \Rightarrow B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n.$$

Puisque cette relation est vraie pour tout réel x , on en déduit l'égalité entre polynômes.

6/ a) D'après la question précédente, on a pour tout réel x , $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$, faisons $x = j$ avec $0 \le j \le n-1$ puis faisons la somme , on obtient our tout $n \ge 1$ et pour tout $k \ge 2$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} j^{k-1} = \frac{B_k(n) - B_k(0)}{k}.$$

---

b) D'après a) $\sum_{j=0}^{n} j^3 = \frac{B_4(n+1) - B_4(0)}{4}$. Or $B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$, on en déduit que $\sum_{j=0}^{n} j^3 = \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - 2(n+1)^3 + (n+1)^2\right] = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Partie III

1/ On a $\sum_{k=0}^{N} e^{2i\pi kt} = e^{i\pi Nt} \frac{\sin[(N+1)\pi t]}{\sin \pi t}$, on prend la partie réelle

$$\sum_{k=0}^{N} \cos(2\pi kt) = \cos(\pi Nt) \frac{\sin[(N+1)\pi t]}{\sin \pi t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((2N+1)\pi t) + \sin(\pi t)}{\sin \pi t}\right]$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=0}^{N} \cos(2\pi kt) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin \pi t} + 1 \Rightarrow 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2\pi kt) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

2/ Au voisinage de 0 ,

$B_{2n}(t) - B_{2n}(0) = t(B_{2n})'(0) + o(t)$ et $\sin(\pi t) \approx \pi t$, donc $\lim_{t \to 0} g_n(t) = \frac{B_{2n}'(0)}{\pi}$.

D'autre part, en utilisant la relation $B_{2n}(X) = B_{2n}(1-X)$, on remarque que $g_n(1-t) = g_n(t)$, ce qui ramène l'étude en $t = 1$ au cas $t = 0$.

Ce qui prouve que g_n se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

Pour $t \in]0,1[$, on a $(g_n)'(t) = \frac{(B_{2n})'(t)\sin(\pi t) - [B_{2n}(t) - B_{2n}(0)]\pi \cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)}$. On peut voir à l'aide d'un développement limité que $\lim_{t \to 0}(g_n)'(t) = \frac{1}{2\pi}(B_{2n})''(0)$. Ce qui prouve que g de classe C^1 sur $[0,1[$ puis grâce à la relation $g_n(1-t) = = g_n(t)$ on conclut que g de classe C^1 sur $[0,1]$, 3/ Pour $x > 0$, on intègre par parties :

$\int_0^1 f(t)\sin(xt)dt = \left[\dfrac{\cos(xt)}{x} f(t)\right]_0^1 - \dfrac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)dt$. On majore le cosinus par 1, f et f' sont continues sur $[0,1]$ donc elles sont bornées, alors quand $x \longrightarrow +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt = 0$.

4/ a) En intégrant deux fois par parties, on trouve

$\alpha_{n,k} = \dfrac{2n}{(2\pi k)^2} B_{2n-1}(1) - \dfrac{2n(2n-1)}{(2\pi k)^2}\alpha_{n-1,k}$.

b) En utilisant le fait que $B_{2n-1}(1) = 0$, *si* $n \geq 2$ *et* $B_1(1) = \dfrac{1}{2}$. La relation précédente permet de donner : $\alpha_{n,k} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2\pi k)^{2n}}\left[1 - \alpha_{0,k}\right]$.

- si $k = 0$, $\alpha_{n,0} = 0$
- si $k > 0$, $\alpha_{n,k} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2\pi k)^{2n}}$.

5/

$$\int_0^1 g_p(t)\sin[(2N+1)\pi t]dt = \int_0^1 \left[B_{2p}(t) - B_{2p}(0)\right]\frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}dt =$$

$$\int_0^1 \left[B_{2p}(t) - B_{2p}(0)\right]dt + 2\sum_{k=1}^{N}\int_0^1 \left[B_{2p}(t) - B_{2p}(0)\right]\cos(2\pi kt)dt = -b_{2p} + 2\sum_{k=1}^{N}\alpha_{p,k}.$$

6/ On fait tendre N vers $+\infty$, on obtient $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\alpha_{p,k} = \dfrac{1}{2}b_{2p}$ c'est-à-dire

$$\frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{(2\pi)^{2p}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2p}} = \frac{1}{2}b_{2p} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2p}} = \frac{(-1)^{p-1}(2\pi)^{2p}}{2(2p)!}b_{2p}.$$

- Pour $p = 1$, on trouve $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(2\pi)^2}{4}b_2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.
- Pour $p = 2$, on trouve $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^4} = -\dfrac{(2\pi)^4}{48}b_4 = \dfrac{\pi^4}{90}$.

a) on majore $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^{2p}}$ par $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6} \leq 2$.

b) D'après 6/ on a $\left|b_{2p}\right| = \dfrac{2(2p)!}{(2\pi)^{2p}}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^{2p}} \leq (2p)!\dfrac{4}{(2\pi)^2}$.