Corrigé Concours technologie 2006
Epreuve de physique.

PRELIMINAIRE

1-a

M.φ : $\text{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \exists\ \vec{A}$ pot. vecteur tel que $\vec{B} = \vec{\text{Rot}}\,\vec{A}$.

M.F : $\vec{\text{Rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{Rot}}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow \vec{\text{Rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$

$\vec{\text{Rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow \exists\ V$ pot. scalaire tel que $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}\,V$ 1

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

1-b

avec $\vec{\text{Rot}}\left(\vec{\text{grad}}\,f(M,t)\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\text{grad}}\,f(M,t)$ est aussi pot. vech. pour $\vec{B}$.

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}\,V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$= -\vec{\text{grad}}\,V' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\text{grad}}\,\frac{\partial f(M,t)}{\partial t}$$ 1

$$= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\text{grad}}\left(V' + \frac{\partial f(M,t)}{\partial t}\right).$$

$\Rightarrow$ $V' = V - \frac{\partial f(M,t)}{\partial t}$ est aussi pot. scalaire

2-a

M.G : $\text{div}\,\vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}$.

$$\text{div}\left(-\vec{\text{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\,\vec{A} = \rho/\varepsilon_0.$$

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{div}\,\vec{A}.$$

équ. diff. pour V.

M.A : $\vec{\text{Rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$ avec $\vec{B} = \vec{\text{Rot}}\,\vec{A}$

$\vec{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ soit avec $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{j} = \vec{\text{grad}}\left[\text{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right] + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

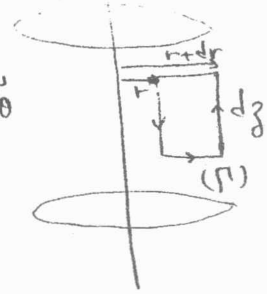
	$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{J} = \overrightarrow{\text{grad}}\left[\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right]$$ Equ. diff. pour $\vec{A}$.	1
2-b	Jauge de Lorentz : $\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ $$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0}}$$ Equ. diff pour $\vec{A}$ simplifiée dans l'equ. diff. pour V avec $-\frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ $$\boxed{\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0.}$$ Equ. diff pour V simplifiée.	1
3	$V(M,t)$, $\vec{A}(M,t)$ sont les solutions des potentiels retardés l'existence du terme $\frac{PM}{c}$ dans ces solutions traduit le temps de propagation des ondes electromagnetiques depuis le point source P jusqu'au point mesure M.	0,5
4)	L'A.R.Q.S est valable tant que le temps de propagation reste négligeable devant le temps d'evolution du système. ou bien tant que les distances caracteristiques du problème sont inferieures à la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\nu}$, ν etant la frequence $\nu = \frac{1}{T}$ soit tant que $\frac{PM}{c} \ll T \Rightarrow PM \ll \lambda$. Dans l'ARQS on néglige la propagation des ondes electromagnetiques.	1
5)	on elimine $\frac{PM}{c}$ des expressions de $V(M,t)$ et $\vec{A}(M,t)$, soit. $$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\text{sces}} \frac{\rho(P,t)}{PM}\, d\tau_P$$ $$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\text{sces}} \frac{\vec{J}(P,t)}{PM}\, d\tau_P$$	0,5

$$B_1 \times 2\pi r = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_0}{\partial t} \pi r^2$$

$$B_1 = \frac{r}{2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{\pi \varepsilon_0 a^2} \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\boxed{\vec{B_1} = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2} \frac{dq(t)}{dt} \vec{u_\theta}}$$ 1,5

4-a M.F : $\vec{Rot}\,\vec{E_2} = -\frac{\partial \vec{B_1}}{\partial t}$.



$$\Rightarrow \oint_{(\Gamma)} \vec{E_2}\cdot\vec{dl} = + \iint_{S \text{ reposant sur } (\Gamma)} -\frac{\partial \vec{B_1}}{\partial t}\cdot\vec{dS} \quad \text{avec } \vec{dS} = -dr\,dz\,\vec{u_\theta}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial r}\cdot dr\,dz = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2}\frac{d^2q(t)}{dt^2}\,dr\,dz$$

$$\vec{E_2}(r,t) = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mu_0}{2\pi a^2}\frac{d^2q(t)}{dt^2}\vec{u_z} \text{ avec } \vec{E_0} = \frac{q(t)}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u_z}$$ 1,5

$$\vec{E_2}(r,t) = \left(\frac{r}{2c}\right)^2 \frac{E_0}{q(t)} \frac{d^2q(t)}{dt^2}\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{E_2}(r,t) = \left(\frac{r}{2c}\right)^2 \frac{1}{q(t)} \frac{d^2q(t)}{dt^2}\vec{E_0}(t)}$$

4-b avec $\frac{d^2q(t)}{dt^2} = -\omega^2 q(t)$

$$\vec{E} = \vec{E_0} + \vec{E_2}$$ 0,5

$$\left(1 - \left(\frac{r\omega}{2c}\right)^2\right)\vec{E_0} = \left(1 - \frac{u^2}{4}\right)\vec{E_0}$$

4-c $\vec{E} \simeq \vec{E_0}$ ssi $\frac{U_{max}^2}{4} \ll 1 \Rightarrow \frac{a\omega}{c} < 2 \Rightarrow a < \frac{2c}{\omega} = \frac{\lambda}{\pi} = a_0 \Rightarrow \boxed{a \ll \lambda}$ 0,5

ARQS.

4d $\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E - E_0}{E_0} = \frac{U_{max}^2}{4}$ A.N : $\frac{\Delta E}{E_0} \sim 10^{-8}$ 0,5

5) M.G : $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$. M.F $\vec{Rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ } ARQS électrique. 0,5

M Φ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ M A $\vec{Rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

PREMIERE PARTIE : ARQS electrique.

1-a
- symétrie : tout plan contenant l'axe (Oz) est de symetrie paire. $\vec{E_0}(M)$ vraie vecteur $\in$ intersection de ces plans $\Rightarrow$ $\vec{E_0}(M) = E_0(M)\,\vec{u_z}$
- invariance : la distribution $\mathcal{D}$ est invariante par rotation θ autour de (Oz) et par translation suivant $\vec{u_r}$ $\Rightarrow$ $\vec{E_0}(M) = E_0(z)\,\vec{u_z}$

0,5

1-b)
Entre les 2 armatures $\rho(M) = 0\ \forall M$.

M.G $\quad \operatorname{div} \vec{E_0}(M) = 0 = \dfrac{\partial E_z}{\partial z} \Rightarrow \vec{E_0} = E_0\,\vec{u_z}$ uniforme.

0,5

1-c)
$$\left.\begin{aligned}\vec{E_0} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}\\ \sigma &= \frac{q_0}{\pi a^2}\end{aligned}\right\}\quad \vec{E_0} = \frac{q_0}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u_z}$$

0,5

1-d
densité volumique d'energie electiostatique : $\dfrac{dW_e}{d\tau} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$

$$W_e = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \times \underbrace{S \times e}_{\text{volume}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot \frac{q_0^2}{\varepsilon_0^2 S^2} S \times e = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$$

$$\left\{\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} q_0^2 \cdot \frac{e}{\varepsilon_0 S}\\ C &= \frac{\varepsilon_0 S}{e}\end{aligned}\right.$$

0,5

2
variations lentes dans le temps, donc ARQ, l'expression de $\vec{E_0}$ reste la même en grandeurs instantannées

$$\vec{E_0}(t) = \frac{q(t)}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u_z}$$

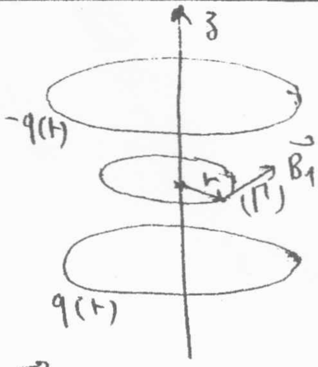
0,5

3
symetrie
tout plan contenant Oz est de symetrie pair

$\Rightarrow \vec{B_1}(M,t) = B_1(M,t)\,\vec{u_\theta}$

invariance
$\mathcal{D}$ invariante par $\left\{\begin{array}{l}\text{rotation suivant } \vec{u_\theta}\\ \text{transl. suivant } \vec{u_r}\end{array}\right.$

$$\vec{B_1}(M,t) = B_1(r,t)\,\vec{u_\theta}$$



M.A : $\quad \vec{\operatorname{Rot}}\,\vec{B_1} = \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E_0}}{\partial t} \Rightarrow \displaystyle\oint_{(\Gamma)} \vec{B_1}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_0\mu_0 \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{E_0}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ reposant sur (Γ)

densité volumique d'énergie magnétique

6-a

$$\frac{dW_m}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0}{2\pi a^2}\right)^2 r^2 \omega^2 q_0^2 \sin^2\omega t.$$

$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi^2 a^4}\,\omega^2 q^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{e} dz}_{e} \underbrace{\int_0^{a} r^3 dr}_{\frac{a^4}{4}}$$ 1

$$\boxed{W_m = \frac{e\mu_0\omega^2 q_0^2}{16\pi}\sin^2\omega t.}$$

6-b

avec $W_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{e\, q_0^2}{2\varepsilon_0 \pi a^2}\cos^2\omega t.$

$$\frac{(W_m)_{max}}{(W_e)_{max}} = \frac{e\mu_0\omega^2 q_0^2}{16\pi}\cdot\frac{2\varepsilon_0\pi a^2}{e\, q_0^2}$$ 1

$$= \frac{1}{8}\frac{\omega^2 a^2}{c^2} < U_{max}^2 \ll 1 \quad \left(\simeq \frac{a}{q_0} \ll 1\right).$$

conclusion : $W_m \ll W_e$ et l'énergie electromagnétique est presque en totalité sous forme électrique.

$$W_{e.m} \simeq W_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{e}{2\varepsilon_0}\frac{q_0^2\cos^2\omega t}{\pi a^2}$$

7-a

vecteur de Poynting $\vec{R} = \vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}$

en $r=a$, $\vec{R} = \frac{q(t)}{\pi\varepsilon_0 a^2}\,\vec{u_z}\wedge\frac{1}{2\pi a}\frac{dq(t)}{dt}\,\vec{u_\theta}$ 0,5

$$\vec{R} = -\frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0 a^3}\,q(t)\frac{dq(t)}{dt}\,\vec{u_r}$$

7-b

pour $r=a$, le flux du vecteur de poynting $\vec{R}$ est $\phi = R\times \underbrace{2\pi a e}_{\text{surface latérale}}$

avec $\vec{R} = -\frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0 a^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2(t)}{2}\right).$ 1

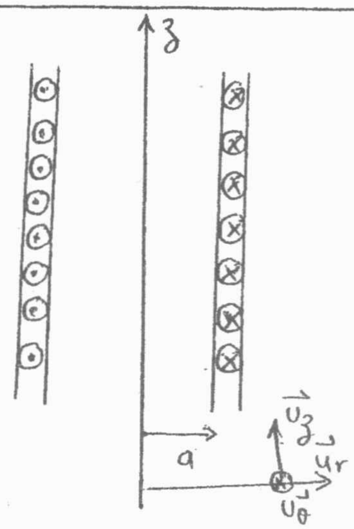
$$\phi = -\frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0 a^3}\,2\pi a e\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}q^2(t)\right) = -\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{q^2_{(t)}}{C}\right)}_{W_{em}}$$

on retrouve la loi de conservation de l'Energie electromagnétique.

avec $\vec{j} = \vec{0}$, $-\frac{dW_{em}}{dt} = \oiint \vec{R}\cdot\vec{dS}$

Deuxième partie : ARQS Magnétique

1) Symétrie : tout plan $\perp$ à l'axe (Oz) est de symétrie paire $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M)\,\vec{u_z}$



invariance

$\mathcal{D}$ est invariante par $\begin{cases} \text{transl.} \parallel \vec{u_z} \\ \text{rot. suivant } \vec{u_\theta} \end{cases}$

d'où $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u_z}$.

par application du th. d'Ampère.

pour Γ contour d'Ampère à l'ext. du solénoïde $\Rightarrow$ $B(M)$ est uniforme $\vec{B}(M) = B_0\vec{u_z}$.

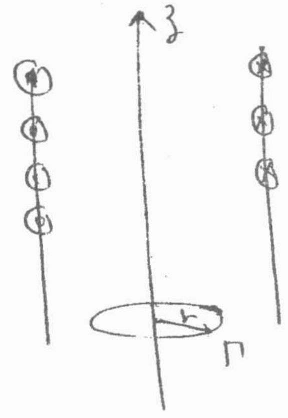
pour Γ contour d'Ampère enlaçant les spires $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{B_0} = \mu_0 n\, i(t)\,\vec{u_z}}$$

1

2 symétrie : tout plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est de symétrie impaire $\Rightarrow \vec{E_1}(M) = E_1(M)\vec{u_\theta}$

invariance $\Longrightarrow \vec{E_1}(M) = E_1(r)\,\vec{u_\theta}$



M.F : $\vec{Rot}\,\vec{E_1} = -\dfrac{\partial \vec{B_0}}{\partial t}$

pour un contour Γ à l'intérieur du solénoïde

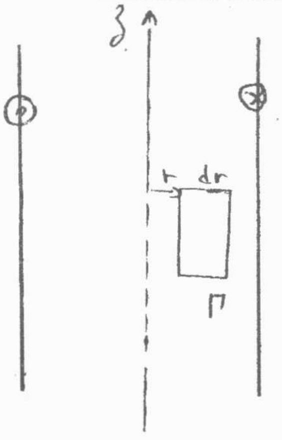
$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E_1}\cdot\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S \text{ reposant sur } \Gamma} \vec{B_0}\cdot\vec{ds}$$

$$E_1 \times 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial B_0}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{E_1}(r,t) = -\frac{r}{2}\,\mu_0 n \frac{di(t)}{dt}\,\vec{u_\theta}}$$

1

3-a $\left.\begin{array}{l}\text{symétrie} \\ \text{et} \\ \text{invariance}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{B_2} = B_2(r,t)\,\vec{u_z}$



M.A : $\vec{Rot}\,\vec{B_2} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E_2}}{\partial t}$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B_2}\cdot\vec{dl} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\iint_{S \text{ rep. sur } (\Gamma)} \vec{E_2}\cdot\vec{ds}$$

$$\partial B_2\, dr\, dz = \mu_0\varepsilon_0\, dr\, dz\, \frac{\partial E_2}{\partial t}.$$

$$B_2 = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{2} \mu_0 \cdot n \cdot \frac{r^2}{2} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} \quad \text{avec} \quad \vec{B_0} = \mu_0 n\, i(t)\, \vec{u_z}$$ 1

$$\boxed{\vec{B_2} = \left(\frac{r}{2c}\right)^2 \frac{1}{i(t)} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} \vec{B_0}(t)}$$ 0,5

3-b

avec $\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = -\omega^2 i(t)$.

$$\vec{B} = \vec{B_0} + \vec{B_2} = \left(1 - \left(\frac{r\omega}{2c}\right)^2\right) \vec{B_0}$$ 0,5

avec $u = \frac{r\omega}{c}$ $\quad \vec{B} = \left(1 - \frac{u^2}{4}\right) \vec{B_0}$ 0,5

$\vec{B} \simeq \vec{B_0}$ ssi $\frac{u_{max}^2}{4} \ll 1 \Rightarrow \frac{a\omega}{2c} \ll 1 \Rightarrow a \ll \boxed{a_0 = \frac{2c}{\omega}}$

$a_0 = \frac{\lambda}{\pi} < \lambda$.

$\boxed{a \ll \lambda}$ ARQS.

4) $\operatorname{div} \vec{E_1} = \rho/\varepsilon_0$ $\quad \operatorname{div} \vec{B_0} = 0$ $\quad \vec{Rot}\, \vec{E_1} = -\frac{\partial \vec{B_0}}{\partial t}$ $\quad \vec{Rot}\, \vec{B_0} = \mu_0 \vec{j}$ 1

5a $i(t) = i_0 \cos\omega t$. 1

$$\frac{dW_m}{dz} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \Rightarrow W_m = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \cdot \pi a^2 h$$

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi a^2 h \cdot \underbrace{i_0^2 \cos^2 \omega t}_{i^2(t)}.$$

5b

$$\frac{dW_e}{dz} = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\mu_0^2 n^2}{4} r^2 \omega^2 i_0^2 \sin^2 \omega t.$$ 1

$$W_e = \frac{1}{8} \frac{\mu_0}{c^2} i_0^2 n^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^h dz}_{h} \underbrace{\int_0^a r^3 dr}_{\frac{a^4}{4}}$$

$$W_e = \frac{\mu_0 \pi h i_0^2 a^4 n^2 \omega^2}{16 c^2} \sin^2 \omega t.$$

5c

$\frac{W_e}{W_m} = \frac{a^2 \omega^2}{8c^2} < u_{max}^2 < 1 \Rightarrow$ L'énergie électromagnétique W_{em} est pratique et sous forme magnétique 0,5

$$\boxed{W_{em} \simeq W_m}$$

6) vecteur de Poynting. (1)

$$\vec{R} = \vec{E_1} \wedge \frac{\vec{B_0}}{\mu_0}$$

6-a

$$= -\frac{\mu_0 n r}{2}\frac{di(t)}{dt}\,\vec{u_\theta} \wedge n\,i(t)\,\vec{u_z}$$ 0,8

en $\underline{r = a}$

$$\vec{R} = -\frac{\mu_0 n^2 a}{2}\, i(t)\,\frac{di(t)}{dt}\,\vec{u_r}$$

6-b. Puissance $\mathcal{P} = \iint \vec{R}\cdot\vec{ds} = -\frac{\mu_0 a n^2}{2}\,2\pi a h\, i(t)\,\frac{di(t)}{dt}$ (1)

$$= -\frac{\mu_0 \pi a^2 n^2 h}{2}\,\frac{d\,i^2(t)}{dt}$$ 1,8

$$\boxed{\mathcal{P} = -\frac{dW_{em}}{dt}}$$ Conservation de l'énergie électro-magnétique

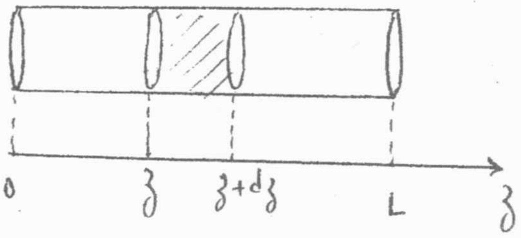
TROISIEME PARTIE ARQS et Diffusion THERMIQUE

A Evaluation de τ_{th}.

1) par application du 1er principe de la thermo

$$dU = \delta Q + \underbrace{\delta W}_{0}$$

à la tranche comprise entre z et $z+dz$



avec $\begin{cases} dU = \mu\, c_m\, dT\, \Sigma\, dz \\ \vec{j}_{th} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T \quad \text{loi de Fourier} \end{cases}$

$$\delta Q = -\frac{\partial j_{th}}{dz}\, dz\, \Sigma\, dt$$

$$\boxed{\mu\, c_m \frac{dT}{dt} = \lambda \frac{d^2T}{dz^2}}$$ Equation de diffusion thermique

2 a avec $T(z,t) = T_0 + \theta(t) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$

dans l'équ. de diffusion

$$\mu\, c_m \frac{d\theta(t)}{dt} = -\lambda \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \theta(t)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{\lambda \pi^2}{\mu\, c_m L^2}\, \theta(t) = -\frac{\theta(t)}{\tau_{th}}$$

$$\boxed{\tau_{th} = \frac{\mu\, c_m\, L^2}{\lambda\, \pi^2}}$$

2 b

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0\, e^{-t/\tau_{th}} \\ T(t) = T_0 + \theta_0\, e^{-t/\tau_{th}} \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \end{cases}$$

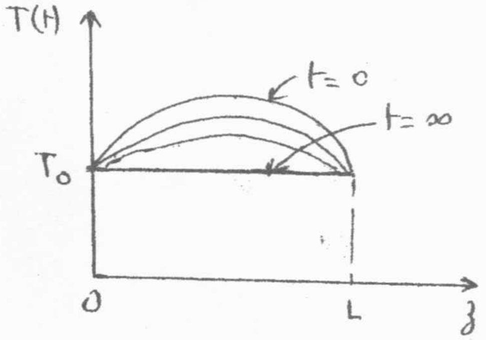
2-c)

à $t=0$, $T(z,0) = T_0 + \theta_0 \sin\frac{\pi z}{L}$

à $t = \tau_{th}$ $T(z,\tau_{th}) = T_0 + \frac{\theta_0}{e} \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$

à $t = 2\tau_{th}$ $T(z, 2\tau_{th}) = T_0 + \frac{\theta_0}{e^2} \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$

à $t \to \infty$ $T(z,\infty) \to T_0$



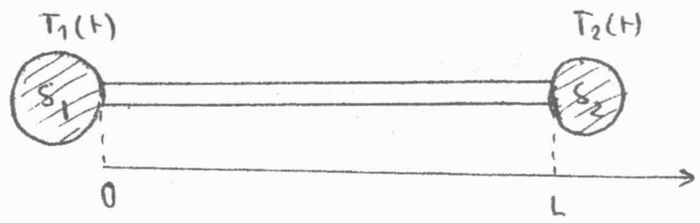
2 d τ_{th} :

2 e ARQS $\tau_{th} \to 0$, $e^{-t/\tau_{th}} \to 0$, $\frac{dT}{dt} \to 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2T}{dz^2} = 0}$

B. Echange thermique à travers la barre.

3

ARQS $\Rightarrow \dfrac{d^2 T(z,t)}{dz^2} = 0$



$$\frac{d T(z,t)}{dz} = C_1$$

$$T(z,t) = C_1 z + C_2$$

Conditions aux limites $\begin{cases} \text{en } z = 0, & T(0,t) = C_2 = T_1(t) \\ \text{en } z = L & T(L,t) = C_1 L + T_1(t) = T_2(t) \end{cases}$

$$C_1 = -\frac{T_1(t) - T_2(t)}{L}$$

$$T(z,t) = T_1(t) - \frac{T_1(t) - T_2(t)}{L} z.$$

4)

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}} \, T$$

$$\vec{j}_{th} = \lambda \frac{T_1(t) - T_2(t)}{L} \vec{u}_z$$

$$P_{th} = \iint_\Sigma \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} = \lambda \frac{T_1(t) - T_2(t)}{L} \Sigma$$

5)

$$R = \frac{V_1 - V_2}{i} \qquad R_{th} = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{P_{th}}$$

$$\boxed{R_{th} = \frac{L}{\lambda \Sigma}}$$

6-a

$$\begin{cases} dU_1 = -P_{th}\, dt \\ dU_2 = +P_{th}\, dt \end{cases}$$

6-b 1er principe.

$$dU_1 = -P_{th}\, dt \Rightarrow C_0 \frac{dT_1}{dt} = -\frac{\lambda \Sigma}{L} (T_1(t) - T_2(t)) \quad (1)$$

$$dU_2 = P_{th}\, dt \Rightarrow C_0 \frac{dT_2}{dt} = \frac{\lambda \Sigma}{L} (T_1(t) - T_2(t)) \quad (2)$$

6-c (1) − (2) $\Rightarrow$

$$C_0 \left(\frac{dT_1(t)}{dt} - \frac{dT_2(t)}{dt} \right) = -2 \frac{\lambda \Sigma}{L} (T_1(t) - T_2(t))$$

$$\frac{d}{dt}(T_1(t) - T_2(t)) = -2\frac{\lambda \Sigma}{L} (T_1(t) - T_2(t)) \Rightarrow \frac{d\beta}{dt} = -\frac{2}{C_0 R_{th}} \beta$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{-2}{C_0 R_{th}}\beta = -\frac{\beta}{\tau_s} \Rightarrow \boxed{\tau_s = \frac{C_0 R_{th}}{2}}$$

$$① + ② \Rightarrow C_0 \frac{d\alpha}{dt} = 0 \Rightarrow \alpha = T_1(t) + T_2(t) = c^{te} = T_{10} + T_{20}$$

$$\boxed{\alpha(t) = T_{10} + T_{20}}$$

7-a

$$\frac{d\beta}{dt} + \frac{\beta}{\tau_s} = 0 \Rightarrow \beta = A\, e^{-t/\tau_s}$$

$$\begin{cases} T_1(t) - T_2(t) = A\, e^{-t/\tau_s} \\ T_1(t) + T_2(t) = T_{10} + T_{20} \end{cases}$$

$$2\, T_1(t) = T_{10} + T_{20} + A\, e^{-t/\tau_s}$$

$$2\, T_2(t) = T_{10} + T_{20} - A\, e^{-t/\tau_s}$$

à $t=0 \Rightarrow$ $2\, T_{10} = T_{10} + T_{20} + A \Rightarrow \boxed{A = T_{10} - T_{20}}$

$$\begin{cases} T_1(t) = \dfrac{T_{10}+T_{20}}{2} + \dfrac{T_{10}-T_{20}}{2}\, e^{-t/\tau_s} \\ T_2(t) = \dfrac{T_{10}+T_{20}}{2} - \dfrac{T_{10}-T_{20}}{2}\, e^{-t/\tau_s} \end{cases}$$

τ_s

7-b)

$$T(z,t) = T_1(t) - \frac{T_1(t) - T_2(t)}{L} z \quad \text{avec} \quad T_m = \frac{T_{10}+T_{20}}{2}$$

$$T(z,t) = T_m + \frac{T_{10}-T_{20}}{2}\, e^{-t/\tau_s} - \frac{T_{10}-T_{20}}{L}\, e^{-t/\tau_s}\, z.$$

q^d $t \to \infty$, $e^{-t/\tau_s} \to 0$

$T(z,\infty) \to T_m$ uniforme q^d $t \gg \tau_s$.

9-a	 $P_{th} = \dfrac{T_0 - T(t)}{R_{th}}$	
9-b	1er principe $\quad C_0 \dfrac{dT}{dt} = P_{th}$.	
10-a	loi de maille $\begin{cases} E_0 = R\,i(t) + V(t) \\ i(t) = C \dfrac{dV(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow E_0 = RC\dfrac{dV(t)}{dt} + V(t)$ $\Leftrightarrow \boxed{E_0 - V(t) = RC\dfrac{dV(t)}{dt}}$ $\Leftrightarrow \boxed{T_0 - T(t) = C_0 R_{th}\dfrac{dT(t)}{dt}}$. analogie.	1
10-b	avec $\tau = RC$ $\dfrac{dV(t)}{dt} + \dfrac{V(t)}{\tau} = \dfrac{E_0}{\tau}$ $V(t) = A e^{-t/\tau} + E_0$ à $t=0$ $\quad V_1 = A + E_0 \Rightarrow A = V_1 - E_0$. $\boxed{V(t) = V_1 e^{-t/\tau} + E_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$.	1
10-c	$T(t) = T_1 e^{-t/\tau} + T_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = C_0 R_{th}$.	