République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles
de Formation d'Ingénieurs
Session 2021

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2021

Concours Technologie

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Problème I

Partie 1

1. (a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{x+1}}$ est convergente car $x+1>1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^{x+1}}$, on a :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$;
- Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. On a $0 \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^{a+1}}$, et comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{a+1}}$ converge (car $a+1>1$), alors la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, et par suite uniformément sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

Ainsi, la fonction $Z = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0,+\infty[$.

(b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{x+1}}$ est continue par morceaux et positive sur $[1,+\infty[$, avec $\int_1^y \frac{dt}{t^{x+1}} = -\frac{1}{xy^x} + \frac{1}{x} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$, donc la fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$.

D'autre part, $t \mapsto \frac{1}{t^{x+1}}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, ce qui donne que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(n+1)^{x+1}} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{x+1}} \leqslant \frac{1}{n^{x+1}}, \text{ donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{x+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{x+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}},$$

d'où $$Z(x) - 1 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} \leqslant Z(x).$$

(c) On a $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{1}{x}$, on obtient donc $\forall x>0$, $\frac{1}{x} \leqslant Z(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x}$, par suite $1 \leqslant xZ(x) \leqslant x+1$, par le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0} xZ(x) = 1$, ce qui donne $Z(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

---

1. (a) Soit $x \in]-1,+\infty[$. La fonction $t \mapsto t^x e^{-t}$ est positive et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. De plus, on a d'une part, $t^x e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, on a d'autre part $t^x e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$, et $t \mapsto \frac{1}{t^{-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$, car $-x<1$.

Ainsi, $t \mapsto t^x e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(b) On pose $g(x,t) = t^x e^{-t}$, pour $x > -1$ et $t > 0$. On a :
- $\forall t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]-1,+\infty[$.
- $\forall x > -1$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout segment $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, on a $\forall x \in [a,b]$, $|g(x,t)| \leqslant \varphi(t)$, où $\varphi(t) = t^a$ si $t \in]0,1]$ et $\varphi(t) = t^b e^{-t}$ si $t \in [1,+\infty[$. φ est positive intégrable sur $]0,+\infty[$, car $t \mapsto t^a$ est intégrable sur $]0,1]$ ($-a < 1$), et $t^b e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$. D'où l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans $]-1,+\infty[$.

Ainsi G est continue sur $]-1,+\infty[$.

(c) Intégration par parties : on considère les fonctions $u : t \mapsto t^{x+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$. u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, avec $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$, car $x+1>0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. Par suite, pour tout $x > -1$, $G(x+1) = \underbrace{\left[-t^{x+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + (x+1)\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = (x+1)G(x)$.

(d) $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on en déduit le résultat.

On effectue un changement de variable $u = t^2 = \alpha(t)$, α est de classe C^1, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, d'où
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}G(-\frac{1}{2}).$$

---

1. (a) - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, l'application $x \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive et intégrable sur $[0,+\infty[$,

on en déduit par le théorème de continuité que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) On pose $h(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$. On a :
- $\forall x \in]0,+\infty[$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$;
- $\forall t \geqslant 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.
- $\forall x \in]0,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$;
- Hypothèse de domination : Pour tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on a $\forall x \in [a,b]$, et $\forall t \geqslant 0$, on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-a^2(1+t^2)} = \psi(t)$, et ψ est positive et intégrable sur $[0,+\infty[$, car $\psi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$;

Ainsi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec
$$\forall x > 0,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt = -2x\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,dt.$$

On effectue le changement de variable $u = xt$, on aura $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{I}{x}$.
Par suite, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = -2Ie^{-x^2}$.

(c) $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = [f(t)]_0^x = f(x) - \lim_{t\to 0} f(t) = f(x) - f(0)$, car f est continue en 0, et $\displaystyle f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - \frac{\pi}{2}$. D'autre part, $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = -2I\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, d'où $\forall x > 0$, $\displaystyle f(x) = \frac{\pi}{2} - 2I\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

(d) $\forall x > 0$, et $\forall t \geqslant 0$, on a $\displaystyle |h(x,t)| \leqslant \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}$, d'où en intégrant sur $[0,+\infty[$
$\displaystyle\forall x > 0,\ |f(x)| \leqslant e^{-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
En utilisant l'expression du 3. on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} - 2I^2$,
donc $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$, et puisque $I \geqslant 0$, alors $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie 2

1. (a) Pour tout $t > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2(2n^2t^2-1)e^{-n^2t^2} = 0$, donc $\displaystyle f_n(t) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(t)$ converge absolument donc converge. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\frac{1}{n}) = e^{-1} \nrightarrow 0$, et puisque $\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}_+^*}|f_n(t)| \geqslant |f_n(\frac{1}{n})|$, alors $\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}_+^*}|f_n(t)|$ ne converge pas vers 0, donc la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $f_n = S_n - S_{n-1}$, où $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^n f_k$, alors $(S_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$, et par suite $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) On a :
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- Pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a
$\forall t \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(t)| \leqslant (2n^2b^2+1)e^{-n^2a^2} = u_n$, par suite $\displaystyle\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)| \leqslant u_n$.

Or, $\displaystyle u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)|$ converge et par suite $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
On en déduit que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2(2n^2t^2-1)e^{-n^2t^2} = 0$, donc $\displaystyle f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, alors f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Pour tout $\lambda \geqslant 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, remarquer que $t \mapsto -te^{-n^2t^2}$ est une primitive de f_n, d'où $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} f_n(t)\,dt = \left[-te^{-n^2t^2}\right]_\lambda^{+\infty} = \lambda e^{-n^2\lambda^2}$, car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -te^{-n^2t^2} = 0$.
On peut également trouver le résultat à l'aide d'une intégration par parties.
On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 0$, en prenant $\lambda = 0$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall t \in [\frac{1}{n\sqrt{2}}, +\infty[$, $f_n(t) \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt \geqslant \int_{\frac{1}{n\sqrt{2}}}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{n\sqrt{2}}$, d'après (b). Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt \geqslant \frac{c}{n} \geqslant 0$ avec $c = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{c}{n}$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$ est divergente.
RQ : D'après ce qui précède, on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

---

3. (a) La fonction $u \mapsto e^u - u$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall u \geqslant 0$, $e^u - u \geqslant e^0 - 0 = 1 \geqslant 0$.
On aura donc $\forall t \geqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant 2n^2 - 1 \leqslant 2n^2t^2 - 1 \leqslant 2n^2t^2$, donc
$0 \leqslant f_n(t) \leqslant 2n^2t^2e^{-n^2t^2} \leqslant 4e^{\frac{n^2t^2}{2}}e^{-n^2t^2} = 4e^{-\frac{n^2t^2}{2}}$, car $\dfrac{n^2t^2}{2} \leqslant e^{\frac{n^2t^2}{2}}$. Par suite, comme $n^2 \geqslant n$, on aura $0 \leqslant f_n(t) \leqslant 4e^{-\frac{n^2t^2}{2}} \leqslant 4e^{-\frac{nt^2}{2}}$.

(b) Soit $t \geqslant 1$. La série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{-\frac{nt^2}{2}}$ est convergente, car $\leqslant e^{-\frac{t^2}{2}} < 1$.
Par suite, d'après (a), on a $\displaystyle 0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} 4e^{-\frac{nt^2}{2}} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-\frac{t^2}{2}})^n$
et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-\frac{t^2}{2}})^n = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1-e^{-\frac{t^2}{2}}}$, ce qui donne finalement $0 \leqslant S(t) \leqslant \dfrac{4e^{-\frac{t^2}{2}}}{1-e^{-\frac{t^2}{2}}}$.

(c) Soit $x > -1$, $t \mapsto t^x S(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Comme S est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall t > 0$, $|S(t)| \leqslant M$, donc $|t^x S(t)| \leqslant t^x M$, et $t \mapsto t^x M$ est intégrable sur $]0,1]$ car $x > -1$.
Par suite, $t \mapsto t^x S(t)$ est intégrable sur $]0,1]$.
D'autre part, d'après (b) , on a $\forall t \geqslant 1$, $|t^x S(t)| \leqslant \dfrac{4t^x e^{-\frac{t^2}{2}}}{1-e^{-\frac{t^2}{2}}} \underset{t\to+\infty}{\sim} 4t^x e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$. Or, $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $t \mapsto t^x S(t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Finalement, $t \mapsto t^x S(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

---

4. Pour tout $x > -1$, et pour tout $t > 0$, on pose $k(x,t) = t^x S(t)$. On a :
- $\forall x > -1$, $t \mapsto k(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
- $\forall t > 0$, $x \mapsto k(x,t)$ est continue sur $]-1,+\infty[$;
- Pour tout segment $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, on a : $\forall x \in [a,b]$, $\forall t > 0$, $|k(x,t)| \leqslant \varphi(t)$, où $\varphi(t) = t^a S(t)$, si $t \in]0,1]$ et $\varphi(t) = t^b S(t)$, si $t \in [1,+\infty[$. φ est donc positive et intégrable sur $]0,+\infty[$, car $a > -1$ et $b > -1$. D'où ϕ est continue sur $]-1,+\infty[$.

---

5. (a) $\forall t > 0$, $e^{-n^2t^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{-n^2t^2}$ converge. De plus,

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n : t \mapsto e^{-n^2t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, car $\sup\limits_{t\in[a,b]} |v_n(t)| \leqslant e^{-n^2a^2}$, et $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-n^2a^2}$ converge. On en déduit que la fonction $H : t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Soit $x > 0$. Pour tout $t > 0$, on a $t^x K(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(t)$, où $U_n(t) = 2n^2 t^{x+2} e^{-n^2t^2}$.

On a :
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, U_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$, puisque $\lim\limits_{t\to 0} U_n(t) = 0$ $(x+2>0)$ et $U_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
- $\sum\limits_{n\geqslant 1} U_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et sa somme $\mapsto t^x K(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$, car $K = S + H$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions continues,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |U_n(t)|\,dt = 2n^2 \int_0^{+\infty} t^{x+2} e^{-n^2t^2}\,dt$

Par le changement de variable $u = n^2t^2$, on aura

$$\int_0^{+\infty} t^{x+2} e^{-n^2t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{x+2}{2}}}{n^{x+2}} e^{-u} \frac{du}{2n\sqrt{u}} = \frac{1}{2n^{x+3}} \int_0^{+\infty} u^{\frac{x+1}{2}} e^{-u}\,du = \frac{1}{2n^{x+3}} G\left(\frac{x+1}{2}\right), \text{d'où}$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} |U_n(t)|\,dt = \frac{1}{n^{x+1}} G\left(\frac{x+1}{2}\right)$, et comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{x+1}}$ converge $(x+1>1)$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} \displaystyle\int_0^{+\infty} |U_n(t)|\,dt$ converge, donc par le théorème d'intégration terme à terme, on aura

$$\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} t^x K(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} U_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} G\left(\frac{x+1}{2}\right)$$
$$= Z(x)\, G\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On a de même $\forall t > 0$,, $t^x H(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} V_n(t)$, où $V_n(t) = t^x e^{-n^2t^2}$. Un raisonnement analogue (intégration terme à terme) appliqué à la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} V_n$, donne

$$\int_0^{+\infty} t^x H(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} V_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} V_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{x+1}} G\left(\frac{x-1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} Z(x)\, G\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

(c) $\forall x > 0,\ \phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x S(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^x K(t)\,dt - \int_0^{+\infty} t^x H(t)\,dt.$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x K(t)\,dt = Z(x)\, G\left(\frac{x+1}{2}\right) = Z(x) \frac{x+1}{2} G\left(\frac{x-1}{2}\right)$, d'après Partie1/2.c

D'où $\phi(x) = Z(x) \dfrac{x+1}{2} G\left(\dfrac{x-1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} Z(x)\, G\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = \dfrac{x}{2} Z(x)\, G\left(\dfrac{x-1}{2}\right).$

---

6. D'après 4. ϕ est continue sur $]-1,+\infty[$, donc continue en 0, ainsi $\lim_{x\to 0}\phi(x)=\phi(0)=\int_0^{+\infty} S(t)\,dt$.
D'autre part, en utilisant 5.c $\lim_{x\to 0}\phi(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}Z(x)\,G\left(\frac{x-1}{2}\right)$.
Or, d'après Partie1/1.c $\lim_{x\to 0} x\,Z(x)=1$, et d'après Partie1/2. G est continue sur $]-1,+\infty[$, donc $\lim_{x\to 0} G\left(\frac{x-1}{2}\right)=G\left(-\frac{1}{2}\right)$. On conclut que $\lim_{x\to 0}\phi(x)=\frac{1}{2}G\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.
D'où finalement $\phi(0)=\int_0^{+\infty} S(t)\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'après Partie1/3.d.

Problème II

Partie 1

1. (a) On a $\det(v_1,v_2)=1\neq 0$ donc la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) On a $e_1=\alpha v_1+\beta v_2 \iff \begin{cases} 1=\alpha+\beta \\ 0=2\alpha+3\beta \end{cases} \iff (\alpha,\beta)=(3,-2)$
Par suite $s(e_1)=3v_1+2v_2=(5,12)$. De même on obtient $s(e_2)=-(v_1+v_2)=(-2,-5)$.
On en déduit que $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s)=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$.

(c) On a $s(v_1)=v_1$ et $s(v_2)=-v_2$ donc v_1 et v_2 sont des vecteurs propres de s associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1. Comme s (et donc M) admet deux valeurs propres distinctes alors M est diagonalisable et donc $M=PDP^{-1}$ avec par exemple $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

---

2. (a) Si la matrice A vérifie la propriété $\mathcal{P}$ alors A admet deux valeurs propres distinctes 1 et -1 donc son polynôme caractéristique est scindé. Ainsi $a+d=\mathrm{Tr}(A)=1+(-1)=0$ donc $d=-a$ et $\det(A)=1\times(-1)=-1$ donc $a^2+bc=1$.
Réciproquement, $\chi_A(X)=X^2-(a+d)X+(ad-bc)=X^2-1$. Ainsi 1 et -1 sont les valeurs propres de A et donc A vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

(b) Si A est la matrice d'une symétrie alors ses valeurs propres sont 1 et -1 donc A vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Réciproquement, si A vérifie la propriété $\mathcal{P}$ alors A est diagonalisable car elle admet deux valeurs propres distinctes : $A=PDP^{-1}$ où $D=\mathrm{diag}(1,-1)$ et par suite $A^2=PD^2P^{-1}=I_2$ car $D^2=I_2$. Ainsi A est la matrice d'une symétrie vectorielle.

---

3. (a) On a $U=\mathrm{Tr}\left({}^tAA\right)=2X_1^2+X_2^2+X_3^2$. Or, X_1,X_2,X_3 suivent une loi de Bernoulli, donc $X_1^2=X_1, X_2^2=X_2$ et $X_3^2=X_3$, d'où $U=2X_1+X_2+X_3$.

(b) Comme $X_i(\Omega)=\{0,1\}$ pour $i=1,2,3$ alors $U(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$. D'autre part, on a :
$E(X_i)=p$ et $V(X_i)=p(1-p)$, pour $i=1,2,3$, d'où :
$E(U)=2E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=4p$ et comme les v.a. sont 2 à 2 indépendantes alors $V(U)=4V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)=6p(1-p)$

(c) Si $\omega \in \Omega$, on a $A(\omega)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si $(X_1(\omega))^2 + X_2(\omega)X_3(\omega) = 1$, d'après 2.a Or, $(X_1^2 + X_2X_3 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) \cup (X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) \cup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) = (U \in \{2,3\})$, et comme la réunion est disjointe, on a $P(S) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) +$ $P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$ et par indépendance on a :
$P(S) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)P(X_3 = 1) +$
$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) = p(1-p)(2p+1)$.

(d) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

$$P(|U - 4p| \geqslant \alpha) = P(|U - E(U)| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{V(U)}{\alpha^2} = \frac{6}{\alpha^2}p(1-p) \leqslant 2p(1-p) \leqslant \frac{1}{2} \text{ car } \max_{p \in [0,1]} p(1-p) = \tfrac{1}{4}.$$

Partie 2

1. (a) On a $M = PNP^{-1} \iff MP = PN \iff M(Q+iR) = (Q+iR)N \iff \begin{cases} MQ = QN \\ MR = RN \end{cases}$

Ainsi pour tout $z \in \mathbb{C}$, $M(Q+zR) = (Q+zR)N$.

(b) On a $T(i) = \det(Q+iR) = \det(P) \neq 0$ car P est inversible et par suite T est un polynôme non nul.

(c) Comme $T \neq 0$, alors d'après le théorème de D'Alembert-Gauss l'ensemble des zéros $\mathcal{Z}$ de T est fini et donc il existe $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ et on a $T(z_0) = \det(Q + z_0R) \neq 0$.

(d) La matrice $S = Q + z_0R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ car Q et R sont deux matrices réelles, $z_0 \in \mathbb{R}$ et $\det(S) = T(z_0) \neq 0$. De plus, d'après 1.(a) on a $MS = SN \iff M = SNS^{-1}$ c'est-à-dire M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

2. On a $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - e^{i\theta_k}) = X^n - 1$ et A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car elle admet n valeurs propres distinctes.

---

3. Si n est pair alors 1 et -1 sont les valeurs propres réelles de A et les autres sont complexes deux à deux conjuguées de module 1.
Ainsi $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} = -1$ et $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} = e^{2i\pi/n}\frac{1-e^{2in\pi/n}}{1-e^{2i\pi/n}} = 0$.
Si n est impair alors 1 est l'unique valeur propre réelle donc $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

---

4. Comme λ est une valeur propre simple de A alors $\dim E_\lambda(A) = 1$.

---

5. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de A. Puisque A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=1}^{n} E_{\lambda_k}(A)$. Ainsi pour tout $V = \sum_{k=1}^{n} V_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, où $V_k \in E_{\lambda_k}(A)$, on a : $A^nV = \sum_{k=1}^{n} A^nV_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n V_k = \sum_{k=1}^{n} V_k = V$ et par suite $A^n = I_n$.

---

6. (a) On a $AV = \lambda_k V$ donc en prenant le conjugué en tenant compte que A est une matrice réelle on a : $A\overline{V} = \overline{AV} = \overline{\lambda_k V} = \overline{\lambda_k}\,\overline{V}$. Ainsi $\overline{V}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\overline{\lambda_k}$.

(b) Les sous-espaces propres de A sont de dimension 1 donc $(V, \overline{V})$ est une base de $\ker(A - \lambda_k I_n) \oplus \ker(A - \overline{\lambda}_k I_n)$ et par suite $\left(V_1 = \frac{1}{2}(V + \overline{V}), V_2 = \frac{1}{2i}(V - \overline{V})\right)$ est une base de $\ker(A^2 - 2\cos(\theta_k)A + I_n)$.

(c) Du fait que $AV = \lambda_k V$ on a : $AV_1 = \cos(\theta_k)V_1 - \sin(\theta_k)V_2$ et $AV_2 = \sin(\theta_k)V_1 + \cos(\theta_k)V_2$.

(d) i. Les valeurs propres de A sont $1, \lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_p, \overline{\lambda_p}$ et on a

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_1(A) \oplus \ker(A^2 - 2\cos(\theta_1)A + I_n) \cdots \oplus \ker(A^2 - 2\cos(\theta_p)A + I_n)$$

donc relativement à une base obtenue comme en 6.(b) et adaptée à cette somme directe, et en vertu de 6.(c), la matrice de u_A est B et par suite A est semblable à B.

ii. La matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est orthogonale donc par un calcul par blocs on a ${}^tBB = I_n$ et par suite B est une matrice orthogonale.

---

iii. Si $n = 2p$ alors la forme de B est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & \\ & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos\theta_{p-1} & -\sin\theta_{p-1} \\ & & & & & \sin\theta_{p-1} & \cos\theta_{p-1} \end{pmatrix}.$$

---

7. (a) En développant par rapport à la première ligne, on obtient

$$\chi_C(X) = \det(XI_n - C) = X^n - 1.$$

(b) Les valeurs propres complexes de C sont les racines n-ième de l'unité, alors C est semblable à B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donc aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après 1.

(c) i. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $U_k = \lambda_1^{k-1}V_1 + \cdots \lambda_n^{k-1}V_n$.

---

ii. On a

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

---

iii. La matrice $\mathcal{V}$ est de Vandermonde et elle est inversible car les valeurs propres sont distinctes. Ainsi $(U_1, \dots, U_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la matrice de u_A relativement à cette base est C car $u_A(U_k) = AA^{k-1}W = A^kW = U_{k+1}$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $u_A(U_n) = A^nW = W = U_1$.