République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles
de Formation d'Ingénieurs
Session 2021

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2021

Concours Technologie
Epreuve de Mathématiques

Session 2021	Date : 21/06/2021	Heure : 8H	Durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème I

Partie 1 (4,5 points)

Dans cette partie, on va établir quelques propriétés des fonctions :

$$Z : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \qquad \text{et} \qquad G : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt.$$

1. (a) Montrer que Z est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.

   (b) Soit $x>0$. Justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{x+1}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, et montrer que
   $$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} \leqslant Z(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}.$$

   (c) En déduire que $Z(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

2. (a) Montrer que la fonction $t \mapsto t^x e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $x>-1$.

   (b) Montrer que G est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.

   (c) Prouver que pour tout $x>-1$, $G(x+1) = (x+1)\,G(x)$.

   (d) Justifier que $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et montrer que $G(-\frac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

3. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$, et on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$, pour $x\in\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer sa dérivée f' en fonction de I.

   (c) En déduire $\forall x>0,\ f(x) = \dfrac{\pi}{2} - 2I\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

   (d) Montrer que $\forall x>0,\ |f(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2} e^{-x^2}$, et en déduire la limite de f en $+\infty$.

   Conclure que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie 2 (5,5 points)

Pour tout réel $t > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n(t) = (2n^2t^2 - 1)e^{-n^2t^2}$.

1. (a) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On pose alors $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$, pour tout $t > 0$.

   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans la suite, on admet que S est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Montrer que pour tout $\lambda \geqslant 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} f_n(t)\,dt = \lambda e^{-n^2\lambda^2}$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

   (c) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$ est divergente.

3. (a) Vérifier que $\forall u \geqslant 0,\ e^u \geqslant u$.

   En déduire $\forall t \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant 4e^{-\frac{n^2t^2}{2}} \leqslant 4e^{-\frac{nt^2}{2}}$.

   (b) Montrer alors que $\forall t \geqslant 1,\ 0 \leqslant S(t) \leqslant \dfrac{4e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 - e^{-\frac{t^2}{2}}}$.

   (c) En déduire que $\forall x > -1,\ t \mapsto t^x S(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

4. Pour tout $x > -1$, on pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x S(t)\,dt$.

   Montrer que Φ est continue sur $]-1, +\infty[$.

5. (a) Montrer que la fonction $H : t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2t^2}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On pose alors $K(t) = S(t) + H(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2n^2t^2e^{-n^2t^2},\ \forall t > 0$.

   (b) Démontrer que $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x K(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} G\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

   On admet que l'on a de même $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x H(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{x+1}} G\left(\frac{x-1}{2}\right)$.

   (c) En déduire que $\forall x > 0,\ \Phi(x) = \dfrac{x}{2} Z(x) G\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$.

6. Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème II

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ celui des matrices à n lignes et une seule colonne à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres dans $\mathbb{K}$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle que les racines n-ièmes de l'unité sont les nombres complexes z vérifiant $z^n = 1$ et qu'elles s'écrivent sous la forme $e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$ et $k \in [\![1,n]\!]$.
On identifie une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme u_A canoniquement associé à A :

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note par $(\mathcal{P})$ la propriété suivante :

$(\mathcal{P})$: *Les valeurs propres complexes de A sont les racines n-ièmes de l'unité.*

Partie 1 (4 points)

Dans cette partie, on s'intéresse au cas où $n = 2$.

1. Soit $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et soient $v_1 = (1,2)$ et $v_2 = (1,3)$ éléments de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Soit s la symétrie vectorielle par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}v_1$ et parallèlement à la droite vectorielle $\mathbb{R}v_2$, c'est-à-dire :
   $$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad s(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 - \beta v_2.$$
   Écrire la matrice M de s relativement à la base $\mathcal{B}_c$.
   (c) Trouver une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que A vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ si et seulement si $d = -a$ et $a^2 + bc = 1$.
   (b) Montrer que A vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ si et seulement si A est la matrice d'une symétrie vectorielle.
3. On considère un réel $p \in]0,1[$. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.
   On rappelle qu'une variable aléatoire Y qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p vérifie $Y(\Omega) = \{0,1\}$, $P(Y=1) = p$ et $P(Y=0) = 1-p$.
   Si $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   $$A(w) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_3(\omega) & -X_1(\omega) \end{pmatrix}.$$
   Soit la variable aléatoire U définie par $U(\omega) = \mathrm{Tr}\left({}^tA(\omega)A(\omega)\right), \quad \forall \omega \in \Omega.$

(a) Montrer que $U = 2X_1 + X_2 + X_3$.

(b) Donner $U(\Omega)$ et calculer l'espérance $E(U)$ et la variance $V(U)$.

(c) On considère l'événement $S = \{\omega \in \Omega, A(w)$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})\}$.
Montrer que $S = (U \in \{2,3\})$ et calculer la probabilité de S.

(d) Soit $\alpha \geqslant \sqrt{3}$. Montrer que $P(|U - 4p| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{1}{2}$.

Partie 2 (6 points)

Dans cette partie, on considère le cas où $n \geqslant 3$.

1. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PNP^{-1}$. On écrit $P = Q + iR$ où $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $M(Q + zR) = (Q + zR)N$.
   On admet que $T(X) = \det(Q + XR)$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Montrer que le polynôme T est différent du polynôme nul.

   (c) Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(Q + z_0 R) \neq 0$.

   (d) En déduire que M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **vérifiant la propriété** $(\mathcal{P})$.

2. Déterminer le polynôme caractéristique de A et montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et calculer $\det(A)$ selon la parité de l'entier n.

4. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Donner la valeur de $\dim E_\lambda(A)$.

5. Établir que $A^n = I_n$.

6. Soit $\lambda_k = e^{i\theta_k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre non réelle de A et $V = V_1 + iV_2$ un vecteur propre associé à λ_k, où $V_1, V_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $\overline{V} = V_1 - iV_2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\overline{\lambda}_k$ de A.
   Dans la suite, on admet que

$$\ker(A - \lambda_k I_n) \oplus \ker(A - \overline{\lambda}_k I_n) = \ker(A^2 - 2\cos(\theta_k)A + I_n).$$

   (b) Montrer que (V_1, V_2) est une base de $\ker(A^2 - 2\cos(\theta_k)A + I_n)$.

   (c) Calculer AV_1 et AV_2 en fonction de V_1, V_2 et θ_k.

   (d) Dans cette question, on cherche à montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice orthogonale B.

      i. On suppose $n = 2p + 1$. Établir que A semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & (0) & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ & & (0) & & & \cos\theta_p & -\sin\theta_p \\ & & & & & \sin\theta_p & \cos\theta_p \end{pmatrix}$$

ii. Montrer que B est une matrice orthogonale.

iii. Dans le cas où n est un entier pair, montrer de même que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice orthogonale B à préciser.

7. On considère la matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (0) & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le polynôme caractéristique de C.

(b) En déduire que les matrices B et C sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(B étant la matrice définie dans 6.(d))

(c) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et soit $V_1, \ldots, V_n$ des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres. Soit $W = V_1 + \cdots + V_n$.

i. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer $U_k = A^{k-1}W$ en fonction des $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et des $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

ii. En déduire la matrice $\mathcal{V} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentant la famille des vecteurs $(U_1, \ldots, U_n)$ relativement à la base $(V_1, \ldots, V_n)$.

iii. Montrer alors que $(U_1, \ldots, U_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et préciser la matrice de u_A dans cette base.

Fin de l'énoncé