



Concours Technologie Epreuve de Physique

Date : 05 Juin 2023

Heure : 8 H00

Durée : 4 H

Nbre pages : 8

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte trois problèmes indépendants.

Première partie : Dipôle électrique et moment dipolaire

Des expériences physico-chimiques montrent que les corps neutres peuvent interagir via des forces de nature électrique, dites dipolaires. Dans cette partie, nous étudions le dipôle électrique sous différents aspects.

Dipôle électrostatique

On considère un dipôle électrostatique constitué par deux charges ponctuelles fixes $-q$ et $+q$ situées respectivement aux points A et B distantes de a (figure 1), a et q étant des quantités positives.

Q1. Donner l'expression du moment dipolaire électrique \vec{p} en fonction de q , a et \vec{u}_z . Montrer que l'étude du dipôle peut se faire dans le plan méridien $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

Q2. Donner l'expression du potentiel électrostatique créé par le dipôle en un point M en fonction de q , a , la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 , $r_B = \|\vec{BM}\|$ et $r_A = \|\vec{AM}\|$. Montrer que le potentiel électrostatique en un point

$M(r, \theta)$, s'écrit dans le cadre de l'approximation dipolaire ($r \gg a$) sous la forme $V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

Q3. En déduire les composantes du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par ce dipôle en coordonnées sphériques. Montrer que celui-ci peut se mettre sous la forme vectorielle :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}).$$

Comparer l'évolution de ce champ dans l'espace à celle d'un champ coulombien créé par une charge ponctuelle.

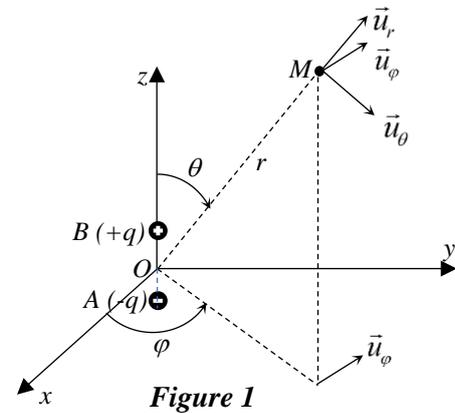


Figure 1

On donne le gradient en coordonnées sphériques d'une fonction f :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Q4. Déterminer les équations polaires des surfaces équipotentielles et des lignes de champ. Tracer dans un plan méridien, l'allure des lignes de champ et des équipotentielles.

Polarisation par orientation

La configuration géométrique de la molécule d'eau est représentée sur la figure 2. La différence d'électronégativité entre l'atome d'oxygène et l'atome d'hydrogène fait que les électrons des liaisons covalentes OH de la molécule d'eau sont attirés plus par l'atome d'oxygène. Tout se passe comme si l'atome d'oxygène portait une fraction de charges négative (-2δ) et chaque atome d'hydrogène portait une fraction de charges positive $(+\delta)$. La molécule d'eau est dite polaire.

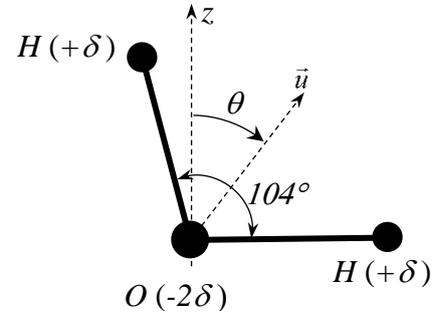


Figure 2

Q5. Montrer que la molécule d'eau possède un moment dipolaire permanent $\vec{p} = p_0 \vec{u}$ ($\|\vec{u}\| = 1$).

Placée dans un champ électrique stationnaire $\vec{E}(M) = E_0(M) \vec{u}_z$, une molécule d'eau subit l'action de forces de nature électrique. L'énergie potentielle d'interaction de la molécule d'eau avec le champ électrique est donnée par : $W_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(M) = -p_0 E_0(M) \cos \theta$; θ est l'angle que fait le moment dipolaire \vec{p} avec le champ électrique $\vec{E}(M)$.

Q6. Quelles sont les effets mécaniques du champ électrique sur la molécule d'eau ? Expliquer le fait qu'un filet d'eau pure soit attiré par une règle en plastique frottée sur un tissu de laine. Y a-t-il une déviation d'un filet d'eau entre les armatures d'un condensateur plan ? Justifier votre réponse.

On considère une enceinte fermée contenant de la vapeur d'eau à une température constante T . À l'intérieur de l'enceinte règne un champ électrique stationnaire et uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$.

En absence de champ électrique, les dipôles électriques des molécules d'eau s'orientent dans toutes les directions d'une façon aléatoire sous l'effet de l'agitation thermique. Par application d'un champ électrique stationnaire et uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$, les dipôles des molécules tendent à s'orienter dans la direction du champ. Il s'établit un équilibre statistique entre l'effet des forces électriques et celui de l'agitation thermique.

On suppose dans la suite, que le module du moment dipolaire d'une molécule d'eau soit constant. La probabilité pour que le moment dipolaire d'une molécule soit orienté dans une direction comprise entre θ et $\theta + d\theta$ s'écrit :

$$d\mathcal{P} = C \exp\left(\frac{p_0 E_0}{k_B T} \cos \theta\right) d\Omega$$

avec $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, k_B est la constante de Boltzmann et C est une constante.

Q7. Que représente le terme $\exp\left(\frac{p_0 E_0}{k_B T} \cos \theta\right)$?

Q8. Donner la condition de normalisation. En déduire la constante de normalisation C . On pose $u = \frac{p_0 E_0}{k_B T}$ et $t = u \cos \theta$.

Q9. Montrer alors que la composante moyenne du moment dipolaire selon (Oz) s'écrit sous la forme : $\langle p_z \rangle = p_0 L(u)$; $L(u) = \coth(u) - \frac{1}{u}$ est la fonction de Langevin.

Q10. On note n le nombre de molécule d'eau par unité de volume.

- Déterminer le moment dipolaire par unité de volume p_v .
- Etudier le cas des basses températures. Commenter.
- Montrer que dans le cas des hautes températures, le moment dipolaire par unité de volume se réduit à : $p_v = \frac{\beta}{T}$ où β est une constante à déterminer. Commenter.

On donne : $\coth(u) = \frac{1}{u} + \frac{u}{3}$ au voisinage de zéro.

Q11. Tracer l'allure de la courbe de variation du moment dipolaire volumique p_v en fonction de u .

Rayonnement dipolaire - Diffusion d'un rayonnement

Nous étudions dans cette partie la production d'une onde électromagnétique par un dipôle électrique oscillant. Cette étude permet de comprendre les aspects de la diffusion d'un rayonnement par un atome. On considère le système de deux charges ponctuelles $-q$ et $+q$ (Figure 1). La charge $-q$ est désormais fixe à l'origine O , la charge $+q$ est située en un point S mobile sur l'axe Oz tel que $\overline{OS} = a \cos(\omega t)$; a et ω représentent respectivement l'amplitude et la pulsation des oscillations.

Le système constitue un dipôle électrique oscillant qui crée une onde électromagnétique de pulsation ω en un point M repéré par les coordonnées sphériques (r, θ, φ) ; $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ désignent les vecteurs unitaires associés. On suppose que la distance $r = \|\overline{OM}\|$ est très grande devant a .

Q12. Sachant que la charge $+q$ est animée d'un mouvement non relativiste, quelle est l'approximation satisfaite par la longueur d'onde λ de l'onde émise par le dipôle oscillant ?

Q13. Les expressions des vecteurs champ électrique et magnétique de l'onde créée par le dipôle en un point $M(r, \theta, \varphi)$ sont :

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(2 \cos \theta \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} \right) \vec{u}_r + \sin \theta \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right) \vec{u}_\theta \right) \\ \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \left(\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc} \right) \vec{u}_\varphi \end{cases}$$

p , \dot{p} et \ddot{p} dépendent de la variable $\left(t - \frac{r}{c}\right)$; \dot{p} et \ddot{p} désignent respectivement la dérivée première et seconde par rapport au temps du moment dipolaire p .

Montrer que ces expressions sont en accord avec la symétrie du problème.

Q14. Définir la zone de rayonnement du dipôle et déduire les expressions des champs électrique et magnétique simplifiées dans cette zone. Décrire la structure de l'onde rayonnée.

Q15. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M, t)$, ainsi que sa valeur moyenne temporelle.

Q16. Montrer que l'intensité du rayonnement définie par $I(M) = \langle \|\vec{\Pi}(M, t)\| \rangle$, s'écrit sous la forme :
 $I(r, \theta) = I_0(r) \sin^2 \theta$; $I_0(r)$ est une fonction à déterminer. Représenter le diagramme du rayonnement dipolaire. Déterminer la puissance moyenne totale rayonnée par le dipôle.

L'interaction d'un champ électrique variable avec la matière, induit des dipôles électriques oscillants. Le rayonnement de ces dipôles redistribue alors le signal incident. On étudie l'interaction d'une onde électromagnétique incidente plane de champ électrique $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_z$ avec un milieu dilué (de faible densité de particules), non magnétique ($\mu = \mu_0$), linéaire, homogène et isotrope. Chaque électron d'un atome, de masse m , de charge $q = -e$ est repéré par rapport au noyau par $z = z_0 e^{i\omega t}$.

Q17. Montrer que dans le cadre de l'approximation non relativiste, l'effet du champ magnétique est négligeable devant celui du champ électrique.

Q18. En adoptant le modèle de l'électron élastiquement lié, l'équation du mouvement de l'électron s'écrit en notation complexe :

$$m \ddot{z} + m\Gamma \dot{z} + m\omega_0^2 z = -eE_0 e^{i\omega t}$$

Γ est une constante positive, \dot{z} et \ddot{z} étant respectivement la dérivée première et seconde de z par rapport au temps.

Interpréter les différents termes de cette équation.

Q19. Déterminer la solution de cette équation en régime forcé. En déduire l'amplitude complexe du moment dipolaire induit et le mettre sous la forme $p_0 = \alpha(\omega) \varepsilon_0 E_0$; $\alpha(\omega)$ est la polarisabilité complexe à la pulsation ω .

Q20. En déduire la puissance moyenne totale rayonnée par le dipôle oscillant P . Montrer que P est proportionnelle au flux surfacique incident Φ_0 :

$$P = \sigma(\omega) \Phi_0 \quad \text{où} \quad \sigma(\omega) = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 |\alpha(\omega)|^2$$

Le coefficient de proportionnalité $\sigma(\omega)$ représente la section efficace de diffusion totale.

Q21. Pour les radiofréquences, l'infrarouge et la lumière visible, la pulsation ω est très faible devant ω_0 . Déterminer dans ce cas, la variation de la section efficace σ en fonction de ω . En déduire une interprétation de la couleur bleue du ciel.

Q22. Dans le domaine des rayons X, la pulsation ω est très grande devant ω_0 . Donner l'expression de la section efficace. Commenter.

Q23. Tracer l'allure de la variation de σ en fonction ω .

Deuxième partie : Spectroscopie et filtrage interférentiel

On se propose d'étudier les interférences lumineuses des vibrations transmises à travers une cavité optique formée par une lame d'air (d'indice $n=1$) d'épaisseur e . Celle-ci est limitée par deux faces traitées fortement réfléchissantes. Le coefficient de réflexion en amplitude sur les faces traitées est r (supposé réel). On pose $R = r^2$.

Le dispositif est éclairé par une source étendue placée à distance finie, émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ . La figure d'interférence est observée sur un écran (E) placé dans le plan focal image d'une lentille convergente (L) de focale f' (figure 3).

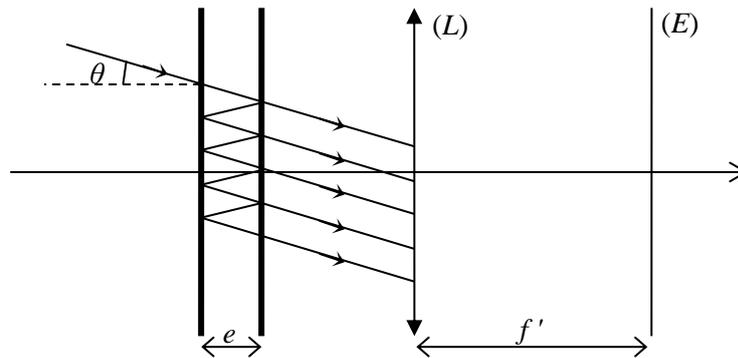


Figure 3

Caractéristiques des interférences observées

Q24. Compléter la marche des rayons lumineux transmis à travers la lame d'air et qui interfèrent en un point M de l'écran. Expliquer l'intérêt de limiter l'inclinaison θ .

Q25. Déterminer le déphasage φ entre deux vibrations successivement transmises. Justifier que les franges observées sont des anneaux.

Q26. On désigne par \underline{A}_1 l'amplitude complexe de la première vibration transmise.

- Exprimer l'amplitude \underline{A}_n associée à la $n^{\text{ième}}$ vibration transmise en fonction de \underline{A}_1 , R , n et φ . En déduire l'amplitude de la vibration résultante en fonction de \underline{A}_1 , R et φ .
- Montrer que l'intensité au point M de l'écran (E) est de la forme :

$$I(\varphi) = \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \text{ avec } m = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

Q27. Dans l'approximation de petits angles, exprimer le rayon ρ_k de l'anneau brillant d'ordre k en fonction de k , λ , e et f' . Les anneaux sont-ils équidistants ? Justifier.

Q28. Exprimer en fonction de R , le contraste C , défini par : $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, où I_{\max} et I_{\min} désignent respectivement l'intensité maximale et minimale. Tracer l'allure de la courbe $C(R)$.

Faire l'application numérique pour $R = 0,04$ (faces non traitées) ; $R = 0,80$ puis $R = 0,95$. Commenter les valeurs obtenues.

En pratique, seuls les derniers cas sont représentatifs des interféromètres réels.

Q29. Sur la figure 4, on a tracé la courbe $\frac{I(\varphi)}{I_{\max}}$ pour trois valeurs différentes du coefficient R .

Tracer l'allure de la courbe $I(\rho)$, où ρ désigne le rayon polaire mesuré sur l'écran par rapport au centre des anneaux.

On se placera dans le seul cas où R est proche de 1.

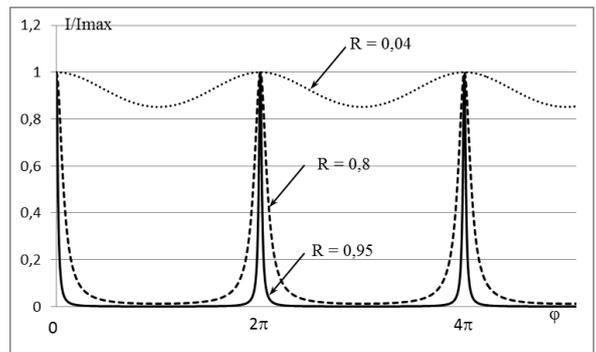


Figure 4

Q30. Déterminer en fonction de R , la largeur à mi-hauteur $\Delta\varphi_{1/2}$ de la courbe $I(\varphi)$, au voisinage d'un maximum, en déduire la largeur à mi-hauteur $\Delta\rho_{1/2}$ correspondante de la courbe $I(\rho)$.

Q31. On définit la finesse F de l'appareil par : $F = \frac{2\pi}{\Delta\varphi_{1/2}}$.

- Exprimer F en fonction de R . Discuter sa variation avec R . Calculer F dans le cas où $R = 0,95$.
- Calculer la finesse dans le cas des anneaux observés avec le dispositif de Michelson. Conclure.

Spectroscopie interférentielle - Pouvoir de résolution

Considérons une source qui émet deux raies de longueurs d'onde voisines λ et $\lambda + \Delta\lambda$. On pourrait donc observer deux maxima d'intensité pour le même ordre d'interférence k pour deux anneaux brillants de rayons voisins ρ et $\rho + \Delta\rho$.

Q32. Déterminer $\Delta\rho$ en fonction de k , ρ , e , f' et $\Delta\lambda$.

Q33. On admet que les deux raies λ et $\lambda + \Delta\lambda$ ne sont résolues que si $\Delta\rho \geq \Delta\rho_{1/2}$.

- À quelle condition sur $\Delta\lambda$ les deux raies sont-elles vues séparées ? Que vaut l'écart minimal $\Delta\lambda_{\min}$?
- En déduire le pouvoir de résolution défini par $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}}$, que l'on calculera en fonction de F et k . Dans quelle zone de la figure d'interférences, la résolution est meilleure ? Justifier.

Q34. On se place dans le cas d'une cavité d'épaisseur $e = 0,1\text{mm}$ et une finesse F de l'ordre de 60.

Discuter si les deux raies du sodium $589,0\text{nm}$ et $589,6\text{nm}$ sont résolues ?

Q35. On rappelle que la finesse F est interprétée comme le nombre de vibrations qui interfèrent effectivement à la sortie de la cavité. Que peut-on conclure quant à la résolution des dispositifs interférentiels à deux ondes ?

Filtre interférentiel

Pour obtenir de la lumière quasi-monochromatique à partir d'une source de lumière blanche, on utilise un filtre interférentiel. Il est constitué d'une lame transparente d'épaisseur e et d'indice $n = 1,37$. Sur chaque face est déposée une couche fortement réfléchissante telle que $R = 0,95$. Le filtre est éclairé en incidence normale.

Q36. Faire un schéma du filtre interférentiel et représenter un rayon lumineux incident et les deux premiers rayons transmis.

Déterminer la différence de chemin optique δ entre deux rayons successifs sortant de la cavité. En déduire leur différence de phase en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ .

Q37. A quelle condition ces deux vibrations interfèrent-elles constructivement ? Comparer cette condition avec celle de la résonance d'une cavité en électromagnétisme.

Q38. Pour un filtre d'épaisseur $e = 350\text{nm}$, éclairé en lumière blanche ($400\text{nm} < \lambda < 750\text{nm}$), montrer qu'une seule longueur d'onde λ_k sera transmise par le filtre dont on déterminera sa valeur. Quelle est la couleur associée ? Justifier le nom de filtre interférentiel donné à la cavité.

Q39. Calculer la bande passante $\Delta\lambda$ du filtre. En déduire la longueur de cohérence de la lumière obtenue.

Q40. Quelles seraient les longueurs d'onde transmises à travers le filtre et les couleurs associées si on double son épaisseur ?

Troisième partie : États stationnaires d'une particule quantique

Préliminaire

Une particule quantique de masse m est soumise à un potentiel unidimensionnel $V(x)$. La fonction d'onde $\Psi(x,t)$ associée, décrivant l'état de la particule, obéit à l'équation de Schrödinger :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

où \hbar désigne la constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$.

On s'intéresse à des états stationnaires de la forme $\Psi(x,t) = \varphi(x) f(t)$

Q41. Que représente la fonction d'onde d'une particule ? Qu'appelle-t-on densité de probabilité de présence ρ ? Le principe de superposition est-il applicable pour ρ ? Justifier.

Q42. Déterminer les équations différentielles vérifiées par $\varphi(x)$ et $f(t)$. On introduira une constante E homogène à une énergie. Déterminer la fonction $f(t)$.

Exprimer la densité de probabilité ρ . En déduire l'origine de la dénomination « état stationnaire ».

On se place dans le cas d'une particule libre.

Q43. Déterminer l'expression de $\varphi(x)$, en déduire $\Psi(x,t)$. Comment qualifie-t-on l'onde obtenue ?

Retrouver la relation de De Broglie traduisant la dualité onde corpuscule qui lie la longueur d'onde λ et l'impulsion p .

Q44. Pourquoi cette fonction d'onde ne peut représenter l'état d'une particule réelle ? Quel modèle de fonction d'onde doit-on alors utiliser ?

Q45. Exprimer puis calculer la longueur d'onde λ dans le cas d'un électron ($-e, m$) accéléré sous la tension $U = 1\text{kV}$. On donne : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Quelle application utilisant le comportement ondulatoire d'un tel faisceau électronique peut-on envisager ?

Falaise de Potentiel

On se propose d'étudier le comportement d'une particule quantique qui aborde une falaise de potentiel (figure 5). Cette particule de masse m et d'énergie $E > 0$ arrive, en provenance de $-\infty$, à une falaise de potentiel de profondeur V_0 située en $x = 0$. Le potentiel $V(x)$ est donné par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \quad (\text{région 1}) \\ -V_0 & \text{pour } x \geq 0 \quad (\text{région 2}) \end{cases}$$

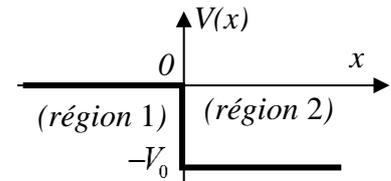


Figure 5

Q46. Décrire le comportement d'une particule classique dans de telles conditions.

On cherche des solutions de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ décrivant l'état stationnaire de la particule quantique.

Q47. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(x)$. Montrer que $\varphi(x)$ a pour expression :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 \exp(ik_1x) + B_1 \exp(-ik_1x) & (\text{région 1}) \\ \varphi_2(x) = A_2 \exp(ik_2x) + B_2 \exp(-ik_2x) & (\text{région 2}) \end{cases}$$

A_1, B_1, A_2 et B_2 sont des constantes d'intégration.

On exprimera les termes k_1 et k_2 en fonction de m, E, V_0 et \hbar . Justifier que la constante B_2 est nulle.

Q48. Conditions aux limites et coefficient de réflexion et de transmission en amplitude.

- Écrire les conditions aux limites en $x = 0$.
- En déduire les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude $r = \frac{B_1}{A_1}$ et $t = \frac{A_2}{A_1}$.
- Exprimer r et t en fonction de E et V_0 . Commenter.

Q49. On définit la densité de courant de probabilité par $\vec{J} = |\Psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$; \vec{k} est le vecteur d'onde associé.

- Exprimer les courants de probabilité \vec{J}_i, \vec{J}_r et \vec{J}_t associés respectivement aux ondes incidente, réfléchie et transmise.
- On définit la probabilité de réflexion R comme le rapport des modules des courants de probabilité \vec{J}_r et \vec{J}_i . Exprimer R en fonction de $u = \frac{E}{V_0}$.
- Tracer et commenter l'allure de la courbe $R(u)$.
- Approximer R en fonction de E et V_0 dans le cas où $E \gg V_0$.

Q50. Deux particules incidentes de masses m_a et m_b arrivent à la falaise de potentiel à la même vitesse, avec les énergies respectives E_a et E_b très grandes par rapport à V_0 .

Comparer les probabilités de réflexion R_a et R_b dans le cas où $m_a < m_b$. Conclure.

Le résultat est-il modifié si les particules proviennent depuis la région (2) pour aller à la région (1) ? Justifier votre réponse.

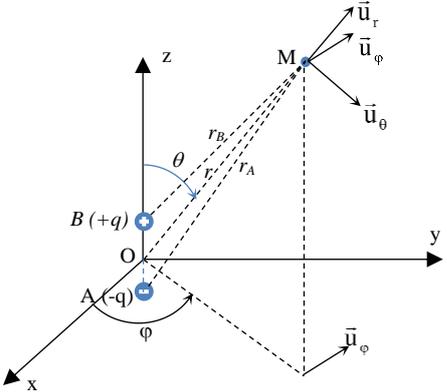


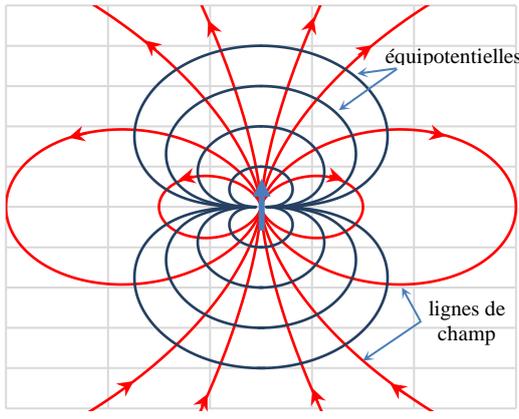
Concours Technologie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Première partie : Dipôle électrique et moment dipolaire

Dipôle électrostatique

Q1.	<p>Moment dipolaire électrique : $\vec{p} = qa\vec{u}_z$</p> <p>Le système est invariant par rotation autour de (oz) (axe du dipôle) → Le champ et le potentiel créé par le dipôle sont indépendants de l'angle φ → L'étude du dipôle peut se faire dans le plan méridien $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$</p>
Q2.	<p>D'après le principe de superposition, le potentiel créé par le dipôle en un point M est :</p> $V(M) = V_A(M) + V_B(M) \Rightarrow V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \text{ avec } r_A = \ \overline{AM}\ \text{ et } r_B = \ \overline{BM}\ $ <p>Dans le cadre de l'approximation dipolaire ($r \gg a$) :</p> $\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} = \frac{a}{2}\vec{u}_z + r\vec{u}_r$ $\Rightarrow r_A^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + ar \cos \theta = r^2 \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)$ $\Rightarrow \frac{1}{r_A} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{r_A} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$ <p>De même $\frac{1}{r_B} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$</p> <p>D'où $V(M) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta - \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \right)$</p> $\Rightarrow V(M) \approx \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 
Q3.	<p>Champ électrique créé par le dipôle :</p> $\vec{E}(M) = -\overline{\text{grad}} V(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$ $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p \cos \theta \vec{u}_r + p \sin \theta \vec{u}_\theta) \text{ avec } \vec{p} = p\vec{u}_z = p \cos \theta \vec{u}_r - p \sin \theta \vec{u}_\theta$ <p>D'où $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((2p \cos \theta + p \cos \theta) \vec{u}_r + p \sin \theta \vec{u}_\theta - p \cos \theta \vec{u}_r \right)$</p> $\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3p \cos \theta \vec{u}_r - \vec{p}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\vec{p} \cdot \vec{u}_r - \vec{p})$ <p>Le champ électrique créé par le dipôle varie en $\frac{1}{r^3}$ alors qu'un champ coulombien créé par une charge ponctuelle varie en $\frac{1}{r^2}$.</p>

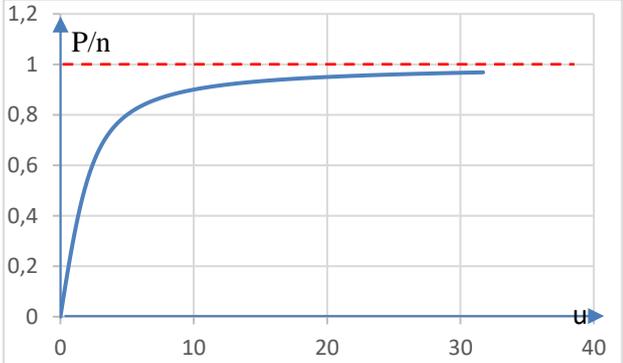
Q4.	<ul style="list-style-type: none"> Les surfaces équipotentielles sont définies par : $V = cte$ $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = cte \quad r = K \sqrt{ \cos \theta }$; K est cte Le champ électrique est tangent en tout point aux lignes de champ. $\vec{E} \wedge d\vec{\ell} = \vec{0}$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} E_r & & dr \\ E_\theta & \wedge & r d\theta \\ 0 & & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow r E_r d\theta - E_\theta dr = 0 \quad \Rightarrow r \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} d\theta - \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} dr = 0$ $\Rightarrow 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{dr}{r}$ $\Rightarrow \ln(r) = 2 \ln(\sin \theta) + cte$ $\Rightarrow r = cte \cdot \sin^2 \theta \quad \leftarrow \text{Équation polaire des lignes de champ}$
	<p>Allure des lignes de champ et des équipotentielles</p> 

Polarisation par orientation

Q5.	<p>Le barycentre des charges positives est distinct de celui des charges négatives. Il est sur la bissectrice de HOH dans la direction du vecteur unitaire \vec{u} \rightarrow La molécule d'eau est polaire de moment dipolaire $\vec{p} = p_0 \vec{u}$</p>
Q6.	<p>Actions du champ $\vec{E}(M) = E_0 \vec{u}_z$ sur la molécule d'eau :</p> <ul style="list-style-type: none"> Force électrique $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} W_p = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}} (p_0 \cdot E_0 \cos \theta)$ Un moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ <p>Sous l'effet du champ électrique non uniforme créé par les charges électriques sur la surface de la règle frottée, les molécules du filet d'eau sont soumises à des forces électriques de résultante $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (p_0 \cdot E_0 \cos \theta)$ dirigée dans le sens de l'augmentation du champ électrique.</p> <ul style="list-style-type: none"> Entre les armatures d'un condensateur plan, le champ électrique est uniforme. Par conséquent, un filet d'eau entre les armatures d'un condensateur plan ne subit aucune déviation. $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (p_0 \cdot E_0 \cos \theta) = \vec{0}$
Q7.	<p>Le terme $\exp\left(\frac{p_0 E_0}{k_B T} \cos \theta\right) = \exp\left(-\frac{W_p}{k_B T}\right)$ représente le facteur de Boltzmann.</p>
Q8.	<p>La condition de normalisation s'écrit : $\int_{\text{espace}} d\mathcal{P} = 1 \Rightarrow \int_0^\pi C \exp\left(\frac{p_0 E_0}{k_B T} \cos \theta\right) 2\pi \sin \theta d\theta = 1$</p> <p>On pose $u = \frac{p_0 E_0}{k_B T}$ et $t = u \cos \theta$;</p> $\int_0^\pi C \exp\left(\frac{p_0 E_0}{k_B T} \cos \theta\right) 2\pi \sin \theta d\theta = 1 \Rightarrow -2\pi C \int_1^{-1} \exp(u \cos \theta) d(\cos \theta) = 1 \Rightarrow -\frac{2\pi C}{u} \int_u^{-u} e^t dt = 1$ $\Rightarrow \frac{2\pi C}{u} (e^u - e^{-u}) = 1 \Rightarrow \frac{4\pi C}{u} \text{sh}(u) = 1 \Rightarrow C = \frac{u}{4\pi \text{sh}(u)}$

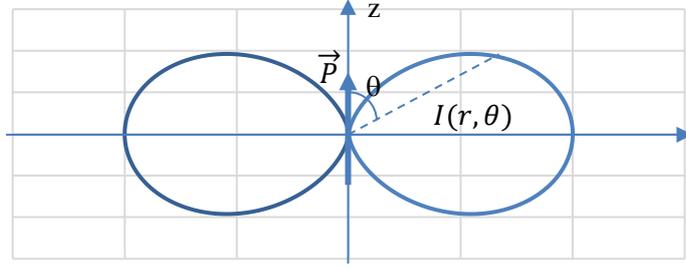
Q9.	<p>Composante moyenne du moment dipolaire selon (Oz) :</p> $\langle p_z \rangle = \int_{\text{espace}} p_z d\mathcal{P} = \int_0^\pi p_0 \cos\theta \cdot C \exp\left(\frac{p_0 E_0}{k_B T} \cos\theta\right) \cdot 2\pi \sin\theta d\theta$ $\Rightarrow \langle p_z \rangle = p_0 2\pi C \int_0^\pi \cos\theta \exp\left(\frac{p_0 E_0}{k_B T} \cos\theta\right) \cdot \sin\theta d\theta = \frac{p_0}{u} \frac{1}{2\text{sh}(u)} \int_{-u}^u t e^t \cdot dt$ $\Rightarrow \langle p_z \rangle = \frac{p_0}{2u \cdot \text{sh}(u)} \left(\int_{-u}^u t e^t \cdot dt \right)$ $\Rightarrow \langle p_z \rangle = \frac{p_0}{2u \cdot \text{sh}(u)} \left(u(e^u + e^{-u}) - (e^u - e^{-u}) \right)$ $\Rightarrow \langle p_z \rangle = p_0 \left(\coth(u) - \frac{1}{u} \right) = p_0 L(u) \text{ avec } L(u) = \coth(u) - \frac{1}{u}$
------------	--

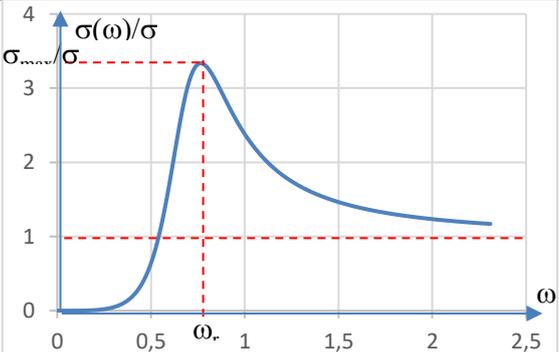
Q10.	<p>Moment dipolaire par unité de volume : $P = n \langle p_z \rangle = np_0 L(u) = np_0 \left(\coth(u) - \frac{1}{u} \right)$</p> <p>Pour les basses températures $\left(k_B T \ll p_0 E_0 \rightarrow u = \frac{p_0 E_0}{k_B T} \gg 1 \right)$:</p> $\begin{cases} \coth(u) \approx 1 \\ \frac{1}{u} \approx 0 \end{cases} \rightarrow P = np_0 : \text{ tous les dipôles sont orientés dans la direction et le sens du champ appliqué.}$ <p>L'énergie d'agitation thermique est négligeable devant l'énergie potentielle d'interaction champ dipôle.</p> <p>Pour les hautes températures $\left(k_B T \gg p_0 E_0 \rightarrow u = \frac{p_0 E_0}{k_B T} \ll 1 \right)$: $\coth(u) \approx \frac{1}{u} + \frac{u}{3} \rightarrow P = np_0 \frac{u}{3} = \frac{np_0^2}{3k_B T} E_0$</p> <p>Sous l'effet de l'agitation thermique, les dipôles ont tendance de s'orienter dans toutes les directions de l'espace d'une façon équiprobable. Lorsque la température augmente, le moment dipolaire par unité de volume diminue.</p> <p>Pour les hautes températures, le moment dipolaire par unité de volume est proportionnel au champ électrique.</p>
-------------	--

Q11.	
-------------	--

Rayonnement dipolaire - Diffusion d'un rayonnement

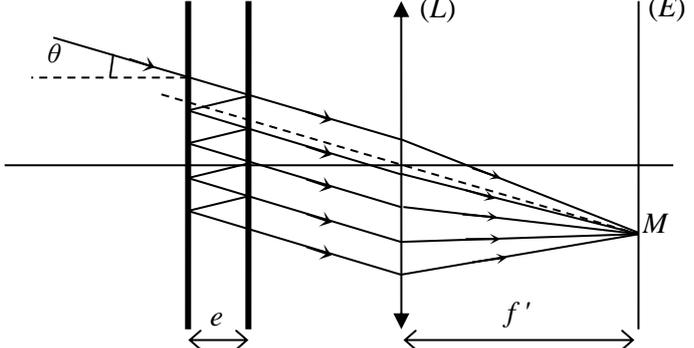
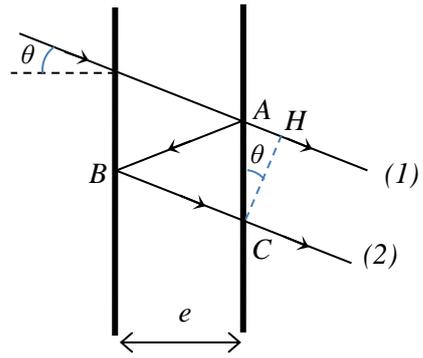
Q12.	<p>Le mouvement de la charge q est non-relativiste $\rightarrow v \ll c$</p> $\vec{v} = \frac{d\vec{OS}}{dt} = -a\omega \sin(\omega t) \vec{u}_z ; v_{\max} = a\omega \ll c \Rightarrow a \ll \frac{c}{\omega} \Rightarrow a \ll \lambda$
Q13.	<p>Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie paire pour le dipôle.</p> $\rightarrow \begin{cases} \vec{E}(M, t) \in (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \\ \vec{B}(M, t) \perp (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{E}(M, t) = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta \\ \vec{B}(M, t) = B_\varphi \vec{u}_\varphi \end{cases}$ <p>D'autre part, le dipôle reste invariant par rotation autour de (Oz) $\rightarrow \vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ sont indépendants de φ.</p> <p>D'où $\begin{cases} \vec{E}(M, t) = E_r(r, \theta, t) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, t) \vec{u}_\theta \\ \vec{B}(M, t) = B_\varphi(r, \theta, t) \vec{u}_\varphi \end{cases}$</p>

<p>Q14.</p>	<p>La zone de rayonnement est la zone située à très grande distance du dipôle tel que $r = OM \gg \lambda$ $\rightarrow \frac{r}{\lambda} \gg 1 \rightarrow \frac{\omega r}{c} \gg 1 \rightarrow kr \gg 1 (k^2 r^2 \gg kr \gg 1)$</p> <p>Par conséquent : $\left \frac{\vec{P}}{rc^2} \right \gg \left \frac{\dot{P}}{r^2 c} \right \gg \left \frac{P}{r^3} \right$</p> <p>La composante radiale du champ électrique est négligeable devant la composante orthoradiale.</p> <p>Ainsi $\begin{cases} \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \sin \theta}{rc^2} \vec{u}_\theta \\ \vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi\epsilon} \frac{\dot{P} \sin \theta}{rc} \vec{u}_\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} \approx -\frac{P_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \sin \theta \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{u}_\theta \\ \vec{B} \approx -\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{4\pi c} \sin \theta \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{u}_\varphi \end{cases}$</p> <p>Donc $\begin{cases} \vec{E} \perp \vec{B} \\ \vec{E} \perp \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_r ; \vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \\ \vec{B} \perp \vec{k} \end{cases}$</p> <p>Dans la zone de rayonnement, l'onde possède localement la structure d'une onde plane progressive.</p>
<p>Q15.</p>	<p>Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} = \frac{P_0^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{u}_r$</p> <p>$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{P_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{u}_r$</p>
<p>Q16.</p>	<p>Intensité du rayonnement : $I = \left\ \langle \vec{\Pi} \rangle \right\ = \frac{P_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta = I_0(r) \sin^2 \theta$ avec $I_0(r) = \frac{P_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}$</p> <p>Diagramme de rayonnement dipolaire :</p> 
<p>Q17.</p>	<p>Puissance moyenne totale rayonnée par le dipôle :</p> $P = \oint\oint_{\text{sphère}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \frac{P_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \Rightarrow P = \frac{P_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$ <ul style="list-style-type: none"> • Force électrique exercée par l'onde incidente sur une charge q : $\vec{F}_e = q\vec{E}_i$ • Force magnétique exercée par l'onde incidente sur une charge q animée d'un mouvement de vitesse \vec{v} : $\vec{F}_m = q(\vec{E}_i + \vec{v} \wedge \vec{B}_i)$ <p>Rapport des modules des forces électrique et magnétique :</p> $\frac{\ \vec{F}_m\ }{\ \vec{F}_e\ } = \frac{\ q\vec{v} \wedge \vec{B}_i\ }{\ q\vec{E}_i\ } \leq v \frac{\ \vec{B}_i\ }{\ \vec{E}_i\ } = \frac{ v }{c} \ll 1$ <p>D'où l'action du champ magnétique sur une charge non relativiste est négligeable devant celui du champ électrique.</p>
<p>Q18.</p>	<p>En adoptant le modèle de l'électron élastiquement lié, l'équation du mouvement de l'électron s'écrit :</p> $m \ddot{z} + m\Gamma \dot{z} + m\omega_0^2 z = -eE_0 e^{i\omega t}$ <ul style="list-style-type: none"> • $-m\Gamma \dot{z}$: Force dissipative due aux pertes d'énergie par rayonnement • $-m\omega_0^2 z$: Force de rappel liant l'électron au noyau dans le modèle de l'électron élastiquement lié • $-eE_0 e^{i\omega t}$: force électrique exercée par l'onde incidente

<p>Q19.</p>	<p>Équation du mouvement de l'électron : $m\ddot{z} + m\Gamma\dot{z} + m\omega_0^2 z = -eE_0 e^{i\omega t}$</p> <p>$\Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega)z = -\frac{eE_0}{m} e^{i\omega t}$ en régime forcé</p> <p>$\Rightarrow z = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega)} e^{i\omega t}$</p> <hr/> <p>Moment dipolaire induit : $\vec{p} = e(-z\vec{u}_z) = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega)} e^{i\omega t} \vec{u}_z = p_0(\omega) e^{i\omega t} \vec{u}_z$</p> <p>$p_0(\omega) = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega)} = \alpha(\omega) \varepsilon_0 E_0$ avec $\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega)}$</p>
<p>Q20.</p>	<p>D'après (17.c.), la puissance totale rayonnée par le dipôle est :</p> <p>$P = \frac{P_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \Rightarrow P = \frac{(\alpha(\omega) \varepsilon_0 E_0)^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{ \alpha(\omega) ^2 \varepsilon_0 E_0^2 \omega^4}{12\pi c^3} \Rightarrow P = \frac{e^4 E_0^2}{12m^2 \varepsilon_0 \pi c^3} \frac{\omega^4}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2)}$</p> <hr/> <p>Flux surfacique incident : $\Phi_0 = \left\ \langle \vec{\Pi}_i \rangle \right\ = \left\ \left\langle \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} \right\rangle \right\ = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2$</p> <p>Puissance totale rayonnée :</p> <p>$P = \frac{e^4 E_0^2}{12m^2 \varepsilon_0 \pi c^3} \frac{\omega^4}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2)} = \frac{e^4}{6m^2 \varepsilon_0^2 \pi c^4} \frac{\omega^4}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2)} \Phi_0 = \sigma(\omega) \Phi_0$</p> <p>Avec $\sigma(\omega) = \frac{e^4}{6m^2 \varepsilon_0^2 \pi c^4} \frac{\omega^4}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2)} = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \alpha(\omega) ^2$: section efficace de diffusion</p>
<p>Q21.</p>	<p>$\sigma(\omega) = \frac{e^4}{6m^2 \varepsilon_0^2 \pi c^4} \frac{\omega^4}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2)}$</p> <p>Pour des fréquences relativement basses ($\omega \ll \omega_0$) ; $\sigma(\omega) = \frac{e^4}{6m^2 \varepsilon_0^2 \pi c^4} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$</p> <p>La section efficace de diffusion est proportionnelle à ω^4</p> <p>Les particules de l'atmosphère excitée par le rayonnement solaire se comporte comme des dipôles électriques oscillants qui diffusent une puissance proportionnelle à ω^4. Par conséquent, la puissance diffusée dans le bleu ($\lambda_B = 0,4\mu m$) est 16 fois plus importante que dans le rouge ($\lambda_R = 0,4\mu m$), ce qui explique la couleur bleue du ciel.</p>
<p>Q22.</p>	<p>Pour les rayons X, ($\omega \gg \omega_0$) ; $\sigma(\omega) = \frac{e^4}{6\pi m^2 \varepsilon_0^2 c^4} = \sigma_0 = cte$</p> <p>Dans le domaine des rayons X, la puissance diffusée est indépendante de ω.</p>
<p>Q23.</p>	<p>Variation de σ en fonction de ω.</p> 

Deuxième partie : Spectroscopie et filtrage interférentiel

Caractéristiques des interférences observées

<p>Q24.</p>	<p>L'inclinaison θ doit être faible afin de satisfaire les conditions de Gauss de l'optique géométrique dans le but d'obtenir une figure nette sur l'écran.</p> 
<p>Q25.</p>	<ul style="list-style-type: none"> La différence de marche entre deux vibrations successives (1) et (2) est : $\delta = L_2 - L_1 = 2AB - AH \Rightarrow \delta = 2 \frac{e}{\cos \theta} - AC \cdot \sin \theta$ $\Rightarrow \delta = 2 \frac{e}{\cos \theta} - 2e \tan \theta \cdot \sin \theta$ $\Rightarrow \delta = 2 \frac{e}{\cos \theta} (1 - \sin^2 \theta) = 2e \cos \theta$ Le déphasage φ entre deux vibrations successivement transmises : $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi e}{\lambda} \cos \theta$ <p>Le déphasage ne dépend que de $\theta \rightarrow$ l'intensité lumineuse sur l'écran ne dépend que de θ. Un ensemble de points ayant même intensité lumineuse est caractérisé par une inclinaison θ constante. Par conséquent, les franges d'interférence sont des anneaux circulaires concentriques.</p> 
<p>Q26.</p>	<p>Les amplitudes complexes des différents rayons transmis dans la direction θ :</p> $\underline{A}_2 = \underline{A}_1 R e^{j\varphi}$ $\underline{A}_3 = \underline{A}_1 R^2 e^{2j\varphi}$ \vdots $\underline{A}_n = \underline{A}_1 R^{n-1} e^{j(n-1)\varphi}$ <p>L'amplitude complexe de la vibration résultante : $\underline{A} = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i = \underline{A}_1 \sum_{i=0}^{\infty} (R e^{j\varphi})^i = \frac{\underline{A}_1}{1 - R e^{j\varphi}}$</p> <hr/> <p>Intensité lumineuse résultante : $I = \underline{A} ^2 = \frac{ \underline{A}_1 ^2}{ 1 - R e^{j\varphi} ^2} = \frac{ \underline{A}_1 ^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} = \frac{I_1}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}$</p> $\Rightarrow I = \frac{I_1}{1 + R^2 - 2R \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)} = \frac{I_1}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)}$ $\Rightarrow I = \frac{\frac{I_1}{(1 - R)^2}}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} I_{\max} = \frac{I_1}{(1 - R)^2} \\ m = \frac{4R}{(1 - R)^2} \end{cases}$
<p>Q27.</p>	<p>Les anneaux brillants sont tels que : $\varphi = 2k\pi \quad (\delta = k\lambda) \quad \delta = 2e \cos \theta_k \approx 2e \left(1 - \frac{\theta_k^2}{2}\right) = k\lambda$</p> $\Rightarrow \theta_k = \sqrt{2 \left(1 - k \frac{\lambda}{2e}\right)} \quad \text{Or } \rho = f' \tan \theta \approx f' \theta \quad \text{Donc } \rho_k = f' \theta_k = f' \sqrt{2 \left(1 - k \frac{\lambda}{2e}\right)}$ $\rho_k^2 - \rho_{k+1}^2 = f'^2 \frac{\lambda}{e} \Rightarrow \rho_k - \rho_{k+1} = f'^2 \frac{\lambda}{e(\rho_k + \rho_{k+1})}$ <p>Au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre, les anneaux se resserrent.</p>

Q28. Contraste : $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ avec $I_{\min} = \frac{I_{\max}}{1+m}$

$$\Rightarrow C = \frac{1 - \frac{1}{1+m}}{1 + \frac{1}{1+m}} \Rightarrow C = \frac{m}{m+2} = \frac{2R}{1+R^2}$$

- Si $R \rightarrow 0$; $C \rightarrow 0$
- Si $R \rightarrow 1$; $C \rightarrow 1$

R	0,04	0,8	0,95
C	0,08	0,975	0,998

- Avec des surfaces non traitées ($R=0,04$), les franges ne sont pas bien visibles (figure brouillée)
- Avec des surfaces traitées ($R \geq 0,8$) ; les anneaux d'interférence sont bien contrastés

Q29. Les anneaux se resserrent en s'éloignant du centre

Q30. $I = \frac{I_{\max}}{2} \Rightarrow \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{I_{\max}}{2} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{m}$

Au voisinage d'un maximum d'ordre k ; $\varphi = 2k\pi \pm \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{2}$

$$\sin^2\left(k\pi \pm \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{4}\right) = \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{4} \approx \frac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow \Delta\varphi_{1/2} \approx \frac{4}{\sqrt{m}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

D'autre part $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{4\pi e}{\lambda} \cos\theta = \frac{4\pi e}{\lambda} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{4\pi e}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho^2}{2f^2}\right)$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda} \frac{\rho}{f^2} d\rho \Rightarrow \Delta\varphi_{1/2} = \frac{4\pi e}{\lambda} \frac{\rho}{f^2} \Delta\rho_{1/2} \Rightarrow \Delta\rho_{1/2} = \frac{\lambda f^2}{4\pi e \rho} \Delta\varphi_{1/2} = \frac{\lambda f^2}{2\pi e \rho} \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

Q31. $\Delta\varphi_{1/2} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$

La finesse de l'appareil est : $F = \frac{2\pi}{\Delta\varphi_{1/2}} \Rightarrow F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$

En augmentant R , la finesse de l'appareil augmente.

- Pour $R \ll 1$; $F = \pi\sqrt{R}$
- Pour R proche de 1 ; $F = \frac{\pi}{1-R} \gg 1$

A.N : pour $R = 0,95$; $F = 61,2$

L'interféromètre de Michelson est un dispositif interférentiel à deux ondes.
L'intensité lumineuse qui résulte de la superposition des deux ondes est :

$$I(\varphi) = 2I_0(1 + \cos\varphi)$$

$$I = I_{\max} = 4I_0 \Rightarrow \varphi = 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} ; I(\varphi) = \frac{I_{\max}}{2} \Rightarrow \cos\left(2k\pi \pm \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \Delta\varphi_{1/2} = \pi$$

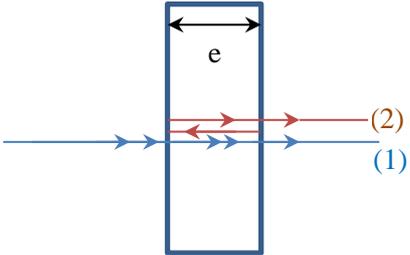
D'où la finesse de l'interféromètre de Michelson : $F = \frac{2\pi}{\Delta\varphi_{1/2}} = 2 \ll 61$

Les anneaux obtenus par le dispositif de Fabry – Perot sont beaucoup plus fins que ceux obtenus par l'interféromètre de Michelson.

Spectroscopie interférentielle - Pouvoir de résolution

<p>Q32.</p>	<p>L'intensité est maximale ($I = I_{\max}$) pour $\varphi = 2k\pi$ ($\delta = k\lambda$) avec $k \in \mathbb{Z}$</p> $\delta = k\lambda \Rightarrow 2e \cos \theta = k\lambda$ $\Rightarrow 2e \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = 2e \left(1 - \frac{\rho^2}{2f'^2}\right) = k\lambda$ $\Rightarrow 2 \frac{e\rho}{f'^2} d\rho = k d\lambda \Rightarrow \Delta\rho = k \frac{f'^2 \Delta\lambda}{2e\rho}$
<p>Q33.</p>	$\Delta\rho \geq \Delta\rho_{1/2} \Rightarrow k \frac{f'^2 \Delta\lambda}{2e\rho} \geq \frac{\lambda f'^2}{2\pi e\rho} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq k \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = kF$ <p>Les deux raies sont vues séparées à l'ordre k si et seulement si $\Delta\lambda \geq \frac{\lambda}{kF} = \Delta\lambda_{\min}$</p> <hr/> <p>Pouvoir de résolution : $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = kF = k \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$</p> <p>La résolution est maximale pour $k = k_{\max} \Rightarrow \left(\frac{2e}{\lambda} \cos \theta\right)$ est max $\Rightarrow \theta = 0$ $k_{\max} \approx \frac{2e}{\lambda}$</p> <p>Donc la résolution au voisinage du centre de la figure d'interférences</p>
<p>Q34.</p>	<p>Pour $e = 0,1 \text{ mm}$ et $F = 60$; $\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{kF}$</p> <p>Au voisinage du centre</p> $\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{k_{\max} F} \text{ avec } \left(k_{\max} \approx \frac{2e}{\lambda}\right) \Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2eF}$ <p>A.N : $\Delta\lambda_{\min} \approx 0,029 \text{ nm}$</p> <p>Pour le doublet du sodium : $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,6 \text{ nm} > \Delta\lambda_{\min}$. Donc ce doublet est résolu.</p>
<p>Q35.</p>	<p>Pour les dispositifs interférentiels à deux ondes, la finesse est $F = 2$ qui très inférieure à celle de la cavité étudiée. D'où le pouvoir de résolution pour un dispositif interférentiel à deux ondes est relativement faible</p>

Filtre interférentiel

<p>Q36.</p>	<p>Différence de marche : $\delta = 2ne$</p> <p>Déphasage : $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi ne}{\lambda}$</p> 
<p>Q37.</p>	<ul style="list-style-type: none"> L'interférence est constructive si et seulement si : $\delta = k\lambda$; $k \in \mathbb{N}^*$ $2ne = k\lambda$ Dans le cas d'une cavité électromagnétique résonante de largeur e : <p>Le champ électrique est tel que :</p> $\vec{E}(0,t) = \vec{E}(e,t) = \vec{0} \Rightarrow \sin\left(\frac{\omega}{c}e\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}e = k\pi \Rightarrow 2e = k\lambda ; k \in \mathbb{N}^* (2ne = k\lambda ; n=1)$
<p>Q38.</p>	<p>Une longueur d'onde λ_k ne sera transmise que si elle donne des interférences constructives</p> $\Rightarrow 2ne = k\lambda_k \Rightarrow \lambda_k = \frac{2ne}{k} \quad \text{or } 400 < \lambda_k < 750 \text{ nm}$ $\Rightarrow 400 < \frac{2ne}{k} < 750 \text{ nm} \Rightarrow \frac{2ne}{750} < k < \frac{2ne}{400} \Rightarrow 1,27 < k < 2,39 \Rightarrow k = 2$ <p>Donc $\lambda_k = \lambda_2 = ne$ A.N : $\lambda_2 = 479,5 \text{ nm}$ qui correspond à une radiation bleue</p> <p>Le filtre ne laisse passer que les raies λ_k donnant des interférences constructives à la sortie de la lame.</p> <p>Le filtrage est basé sur le phénomène d'interférences. D'où le nom de filtrage interférentiel.</p>

<p>Q39.</p>	<ul style="list-style-type: none"> La bande passante du filtre est défini par l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ tel que : $I(\lambda_1) = I(\lambda_2) = \frac{I_{\max}}{2} \Rightarrow \Delta\varphi_{1/2} \simeq \frac{4}{\sqrt{m}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$ or $\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda} = 2k\pi$ au voisinage du centre ; ($k = 2$) $\Rightarrow \frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{d\lambda}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi_{1/2} = \varphi \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2k\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{2k\pi} \lambda = \frac{\lambda}{kF}$ A.N : $\Delta\lambda = \frac{479,5}{2 \times 61} = 3,9 \text{ nm}$ La longueur de cohérence ℓ_c est : $\ell_c = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ $\ell_c = 5,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
<p>Q40.</p>	<p>En doublant l'épaisseur de la lame ($e' = 2e$) et en faisant le même raisonnement que celle de la question (Q38), on obtient : $2,54 < k < 4,8$ Il y a deux valeurs possibles de k (3 et 4), ce qui correspond aux radiations de longueur d'onde $\lambda_3 = 639,3 \text{ nm}$ (rouge) et $\lambda_4 = 479,5 \text{ nm}$ (bleu).</p>

Troisième partie : États stationnaires d'une particule quantique

Préliminaire

<p>Q41.</p>	<ul style="list-style-type: none"> La fonction d'onde d'une particule est une représentation mathématique de l'état quantique de la particule. Elle représente l'amplitude de probabilité de présence de la particule. La densité de probabilité de présence de la particule est le carré du module de la fonction d'onde $\rho(x,t) = \Psi(x,t) ^2 = \Psi(x,t)\Psi^*(x,t).$ La fonction d'onde qui résulte de la superposition de deux états stationnaires (1) et (2) est : $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ La densité de probabilité est : $\rho = \Psi ^2 = \Psi_1 + \Psi_2 ^2 = \Psi_1 ^2 + \Psi_2 ^2 + 2\text{Re}(\Psi_1\Psi_2^*) \neq \rho_1 + \rho_2$ Le principe de superposition n'est pas applicable pour ρ.
<p>Q42.</p>	<p>La fonction d'onde qui décrit l'évolution d'une particule dans un état stationnaire $\Psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$. L'équation de Schrödinger s'écrit : $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} f(t) + V(x)\varphi(x)f(t) = i\hbar\varphi(x) \frac{df(t)}{dt}$ $\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x) = i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x) = E \\ i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} = E \end{cases} ;$ E est une constante homogène à une énergie $\Rightarrow f(t) = Ae^{-\frac{E}{\hbar}t} = Ae^{-i\omega t}$; A est une constante qu'on peut choisir égale à 1 et $\omega = \frac{E}{\hbar}$ ($E = \hbar\omega$)</p> <hr/> <p>Densité de probabilité de présence : $\rho = \Psi(x,t) ^2 = \varphi(x) ^2 = \rho(x)$ La densité de de probabilité de présence est indépendante du temps d'où la dénomination d'état stationnaire.</p>
<p>Q43.</p>	<p>Dans le cas d'une particule libre $V = 0$; $\varphi(x)$ est solution de l'équation : $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$ Cette équation s'écrit sous la forme : $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k^2\varphi(x) = 0$; $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ Cette équation n'a de solution acceptable que lorsque $E > 0$. La solution de cette équation différentielle est de la forme : $\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$.d'où La fonction d'onde : $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$; $\omega = \frac{E}{\hbar}$ Il s'agit d'une superposition de deux ondes planes progressive et monochromatique. La première se propage dans le sens des x croissants et la deuxième se propage dans le sens des x décroissants.</p> <hr/> <p>Le potentiel est nul $V = 0$. L'énergie de la particule se réduit à son énergie cinétique. $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow p = \hbar k = \frac{\hbar}{\lambda}$: Relation de Louis De Broglie</p>

Q44.	<p>Cette fonction d'onde n'est pas normalisable. En effet : $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi ^2 dx$ diverge</p> <p>Une onde plane ne peut pas représenter l'état d'une particule réelle. On représente alors l'état d'une particule par un paquet d'ondes sous forme d'une combinaison linéaire d'Ondes Planes Progressives et Monochromatiques.</p>
Q45.	<p>Longueur d'onde associée à l'électron : $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ avec $E = eU$</p> <p>Donc $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$</p> <p>A.N : $\lambda = 0,39 \text{ \AA}$ cette longueur d'onde est de l'ordre des dimensions des atomes. On peut envisager la diffraction d'un faisceau homocinétique d'électrons sur un cristal (expérience de Davisson et Germer 1927)</p>

Falaise de Potentiel

Q46.	<p>Une particule classique ayant une énergie $E > 0$ ne peut que traverser la falaise pour passer dans la région 2 et continuer son mouvement dans le sens des x croissants.</p>
Q47.	<p>L'équation différentielle vérifiée par $\varphi(x)$ s'écrit sous la forme générale :</p> $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\varphi(x)$ <p>Soit : $\begin{cases} \frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_1(x) = -k_1^2\varphi_1(x) & (\text{région 1}) \\ \frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2} = -\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\varphi_2(x) = -k_2^2\varphi_2(x) & (\text{région 2}) \end{cases}$ avec $\begin{cases} k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \end{cases}$ <p>Les solutions de ces équations différentielles sont de la forme :</p> $\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 \exp(ik_1x) + B_1 \exp(-ik_1x) & (\text{région 1}) \\ \varphi_2(x) = A_2 \exp(ik_2x) + B_2 \exp(-ik_2x) & (\text{région 2}) \end{cases}$ <p>La fonction d'onde $B_2 \exp(-i(k_2x + \omega t))$ caractérise une onde qui se propage dans le sens des x négatifs. En absence de particule provenant de $+\infty$, l'onde associée à la particule ne peut se propager que dans le sens des x positifs. $\Rightarrow B_2 = 0$</p> </p>
Q48.	<p>Continuité de la fonction $\varphi(x)$ et de sa dérivée en $x = 0$.</p> $\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ k_1(A_1 - B_1) = k_2A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \\ t = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{V_0}{E}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{V_0}{E}}} \\ t = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{V_0}{E}}} \end{cases}$ <p>Dans la région (1), la particule est caractérisée par une fonction d'onde qui résulte de la superposition d'une onde incidente et une onde réfléchie.</p>
Q49.	$\begin{cases} \Psi_i(x,t) = A_1 \exp i(k_1x - \omega t) & \text{onde incidente} \\ \Psi_r(x,t) = B_1 \exp(-i(k_1x + \omega t)) & \text{onde réfléchie} \\ \Psi_t(x,t) = A_2 \exp i(k_2x - \omega t) & \text{onde transmise} \end{cases}$ <p>Densités de courant de probabilité :</p> $\begin{cases} \vec{J}_i = \Psi_i ^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m} = A_1 ^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m} \\ \vec{J}_r = - \Psi_r ^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m} = - B_1 ^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m} = -\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 A_1 ^2 \frac{\hbar \vec{k}_1}{m} \\ \vec{J}_t = \Psi_t ^2 \frac{\hbar \vec{k}_2}{m} = A_2 ^2 \frac{\hbar \vec{k}_2}{m} = \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_2)^2} A_1 ^2 \frac{\hbar \vec{k}_2}{m} \end{cases}$

Probabilité de réflexion :

$$R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = r^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

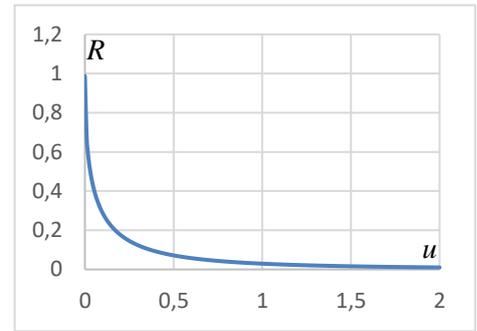
$$\Rightarrow R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{V_0}{E}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{V_0}{E}}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{u}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{u}}} \right)^2$$

Pour $u \rightarrow 0$; $R \rightarrow 1$: la particule reste dans la région 1

Pour $u \rightarrow \infty$; $R \rightarrow 0$: la particule passe dans la région 2

Pour $E \gg V_0$;

$$u \gg 1 \rightarrow R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{u}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{u}}} \right)^2 \approx \left(\frac{1 - \left(1 + \frac{1}{2u}\right)}{1 + \left(1 + \frac{1}{2u}\right)} \right)^2 \approx \frac{1}{16u^2} = \frac{V_0^2}{16E^2}$$



$\frac{R_a}{R_b} = \left(\frac{m_b}{m_a} \right)^2 > 1$ pour $m_a < m_b$ la probabilité de réflexion dépend de la masse de la particule.

Q50. En envoyant un faisceau de particules de masse m , le faisceau de particules réfléchi est plus riche en particules de faible masse. En répétant l'expérience plusieurs fois, on arrive à séparer les deux types de particules.

Si les particules proviennent depuis la région 2, on obtient la même probabilité de réflexion.