Université de Sfax

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

**Matière** : Analyse **Section** : PB **A. U** : 2016 – 2017

**Examen du 1^er Semestre Durée : 2 Heures**

**(Documents non autorisés)**

*Une grande importance sera accordée à la rédaction et à la clarté du raisonnement, il convient de noter avec précision les numéros des différentes questions*

---

**Exercice 1** :

Soient deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ de terme général $w_n = v_n - u_n$, $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique de raison $q$ que l'on déterminera.
2. Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ et calculer $lim_{n\to+\infty} w_n$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
4. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
5. Vérifier que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$2 \leq u_n \leq v_n \leq 10.$$

6. Montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ définie par : $s_n = 3u_n + 4v_n$ est constante
7. Déduire alors la limite commune des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$
8. Donner un équivalent simple des suites de terme général

$$A_n = \ln(1 + w_n), \quad B_n = 1 - \cos((-1)^n w_n), \quad \text{et} \quad C_n = e^{(-1)^n w_n}.$$

**Exercice 2 :** Soit $a, b$ deux réels, avec $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle

$$(E) : a\,x^2\,y'' + b\,x\,y' - b\,y = 0, \quad \textit{pour} \quad x \in ]0, +\infty[.$$

1. Soit $y$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$. Vérifier que $y$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $z$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Effectuer le changement d'inconnue précédent dans l'équation différentielle $(E)$ et vérifier que la résolution de $(E)$ se ramène à la résolution de l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants $(E_1)$

$$a\,z''(t) + (b - a)\,z'(t) - b\,z(t) = 0, \qquad (E_1)$$

3. Résoudre l'equation $(E_1)$, distinguer les cas $b = -a$ et $b \neq -a$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation
$x^2\,y'' - x\,y' + y = 0, \qquad x \in ]0, +\infty[$

---

## Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{2(1-x)}{2x-x^2}\right)$. ,

1. Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$.
2. Vérifier que pour tout $x \in D_f$, $f(2-x) = -f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
5. Exprimer $f(x)$ en fonction de $\arctan(x-1)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Bon Courage ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆