UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

INSTITUT PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGÉNIEURS DE SFAX

Section: B.G.1 **A.U. 2016/2017**

Devoir de synthése du 1^{er} semestre en Algèbre

Date: 15 Décembre 2016 **Durée: 2 Heures** **Nombre de pages: 2**

N.B L'usage d'une calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1:(4 points).

1. Resoudre le système suivant: (les inconnues sont dans $\mathbb{R}$)

$$(S) : \begin{cases} x + t = 1 \\ 2x + y - z - t = 2 \\ y + 2z - t = 1 \end{cases}$$

2. Discuter suivant le réel m l'ensemble des solution du système (S_m) :

$$(S_m) : \begin{cases} x - my = 1 \\ mx - y = 2 \end{cases}$$

Exercice 2:(6 points).

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ ct $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $f \circ g(n)$ et $g \circ f(n)$.
2. Montrer que f est injective et non surjective.
3.
   (a) Vérifier que g n'est pas injective.
   (b) g est-elle surjective ? Justifier.

Problème :(10 points).

a et b étant deux nombres complexes.
Soit le polynôme P donné par, $P(x) = x^5 - x^4 - x^2 + ax + b$ pour tout x de $\mathbb{C}$.

1. (a) Donner a et b sachant que 0 et 1 sont des racines de P.
   (b) Vérifier que 1 est une racine double du polynôme P.

2. (a) Déduire qu'il existe un polynôme Q tel que, $P(x) = x(x-1)^2Q(x)$ pour tout x de $\mathbb{C}$
   (b) Justifier que $Q(1) \neq 0$.
   (c) Donner le degré de Q.

3. a) Soit le nombre complexe $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$. Vérifiez que j est une racine du polynôme P.
   b) Quelle est la multiplicité de cette racine j ?
   c) Déduire que $\overline{j}$ est une racine du polynôme P.

4. Montrer que $Q(x) = x^2 + x + 1$ pour tout x de $\mathbb{C}$.

5. Déduire une factorisation (maximale) de $P(x)$ pour $x \in \mathbb{C}$.

6. Déduire une factorisation (maximale) de $P(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.