Algèbre / E.C.

Exercice 1 : Soit le nombre complexe $W = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. Déduire W sous forme exponentielle.

2. Déduire que : $W^5 = 1$.

3. Déduire que : $1 + W + W^2 + W^3 + W^4 = 0$.

4. Soit $U = W + W^4$. Vérifiez que $U^2 + U - 1 = 0$.

5. a) Justifiez que $W^4 = \overline{W}$.

   b) En déduire U.

6. i) Résoudre l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$.

   ii) Déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

7. Déterminez W^{2016} (par déduction de 2., c'est une méthode rapide).

Exercice 2 :

1. Donnez la formule de Moivre.

2. En utilisant la formule de Moivre prouvez que pour tout x de IR,

$$\sin(5x) = 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)$$

[Ind. : $(u+v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5$, pour tous nombres complexes u et v]

3. En déduire que pour tout x de IR,

$$\sin(5x) = 5\sin(x) - 20\sin^3(x) + 16\sin^5(x)$$

Exercice 3 :

1. Prouvez en appliquant la formule d'Euler donnant le sinus que pour tout x de IR,

$$\sin^5(x) = \frac{1}{16}\left[\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x\right]$$

[Ind. : En utilisant l'indication précédente donnant $(u+v)^5$]

2. Vérifiez cette formule pour $x = \frac{\pi}{2}$ et pour $x = -\frac{\pi}{2}$.

Bon Travail