

Devoir de contrôle d'analyse

Exercice n°1 :

Soient  $(U_n)$  et  $(V_n)$  ;  $n \in \mathbb{N}$  les suites réelles déterminées par :

$$U_0=0 ; V_0=1 \text{ et pour } n \in \mathbb{N} : U_{n+1}=U_n+3V_n \quad \text{et} \quad V_{n+1}=V_n - \frac{1}{3} U_n .$$

1°) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $V_{n-1}$  et  $U_{n-1}$ .

2°) Dédire que la suite  $(U_n)$  vérifie la relation de récurrence pour  $n \in \mathbb{N}$  /

$$U_{n+1}=2U_n - 2U_{n-1} .$$

3°) Calculer  $U_1$  puis déterminer en fonction de  $n$  le terme général réel de la suite  $(U_n)$ .

4°) Dédire  $V_n$  en fonction de  $n$ .

Exercice n°2 :

I) Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  .

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .

2°) déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  et calculer  $f'(x)$  .

3°) Dresser le tableau de variation de  $f$  et calculer  $f(\mathbb{R})$  .

4°) Dédire que pour tout  $x$  appartient à  $\mathbb{R}$  on a  $|f(x)| < 1$ .

II) On définit la fonction  $g$  par :  $g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan(x)$ .

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $g$ .

2°) Prouver que  $g$  est impaire.

3°) calculer:  $g(0)$ ;  $g(1)$ ;  $g(-1)$ .

4°) déterminer le domaine de dérivabilité de  $g$  et calculer  $g'(x)$  .

5°) Dédire une expression plus simple pour  $g$ .

Bonne chance.