Institut Préparatoire aux études **A . U : 2019/2020**

D'ingénieurs de Sfax. **Section : PB 1 .**

Devoir D'Analyse

Durée : 2 H

Exercice 1 :

Soit (E_1) l'équation différentielle définie par :

$$(E_1) : \sqrt{1+x^2}\, y' - xy = \sqrt{1+x^2} - x(x+1).$$

Ou y est la fonction inconnue de la variable x et à valeurs réelles .

1°) Résoudre sur IR l'équation homogène associée à (E_1).

2°) Vérifier que $x+1$ est une solution particulière de (E_1) et en déduire l'ensemble des solutions sur IR de l'équation (E_1).

Exercice 2 :

Soit f une application définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} & si\, x \neq 0 \\ 1 & si\, x = 0 \end{cases}$$

1°) Montre que le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro est donné

par :$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + O(x^2)$.

2°) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer$f'(0)$.

c) En déduire l'équation de la tangente Δ à la courbe Cf de f au point (0 , 1) ainsi que la position relative de Cf par rapport àΔ .

On donne :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots\ldots + O(x^{2p+1}).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\ldots\ldots O(x^n).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + O(x^n)$$

Exercice :3

Etude de la suite $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx$.

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ et $x \in [0,1]$: $\frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$.

b) déduire pour tout $n \in IN$ que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c)Donner la limite de la suite I_n .

2°)En utilisant une integration par partie vérifier que :

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx .$$

3°) a) Montrer que $\forall\, x \in [0\ 1]$ on a $\ln(1+x) \leq x$.

b) Déduire que $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \leq \frac{1}{n+1}$.

4°) Vérifier que $I_n \sim \frac{\ln(2)}{n}$.