Université de Sfax

IPEIS

A.U. 2019-2020

PB&G1

Algèbre / E.S.N°2

Exercice : Soit le polynôme P défini pour la variable x par,

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 4x - 3 \quad , \quad \text{pour tout } x \text{ de IR}$$

1) Donner le polynôme dérivé P' de ce polynôme P.

2) Prouver que **1** est une racine double de P (autrement dit racine de P d'ordre de multiplicité 2).

3) Déduire qu'il existe un polynôme Q tel que,

$$P(x) = (x-1)^2\, Q(x) \quad , \quad \text{pour tout } x \text{ de IR}$$

4) Déduire qu'il existe des réels a , b , c et d avec $a \neq 0$ tel que,

$$P(x) = (x-1)^2\,(a x^3 + b x^2 + c x + d) \quad , \quad \text{pour tout } x \text{ de IR}$$

5) Déduire que,

$$a = 1 \quad , \quad b = -2 \quad , \quad c = -2 \quad , \quad d = -3$$

(et donc que $P(x) = (x-1)^2\,(x^3 - 2x^2 - 2x - 3)$, pour tout x de IR).

6) Prouver que **3** est une racine simple (: racine d'ordre de multiplicité 1) de « $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ ».

7) a) Prouver que **j** (où $j = e^{i2\pi/3}$) est aussi une racine simple de « $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ ».

b) Déduire que toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme « $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ ». sont les trois racines deux à deux distinctes **3** , **j** et le conjugué de **j**, et que ces trois racines sont chacune une racine simple.

8) Déduire la factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme « $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ »

9) Donner la factorisation dans IR du polynôme « $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ ».

10) a) Déduire la factorisation dans IR du polynôme P.

b) Quelle est la factorisation de ce polynôme dans $\mathbb{C}$.

Bonne Chance