Université de sfax Institut Préparatoire aux Etudes d'ingénieurs de Sfax

Matière:Analyse . Section : PB A.U : 2021/2022

Devoir de controle du 2^{ième} Semestre Durée : 1^{h}

EXERCICE N° 1 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2\pi x}{x} & si x \neq 0 \\ 0 \quad si\, x = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
3) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N° 2 :

Soit $f(x) = \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$

1) Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de la fonction f Puis vérifier que $f'(x) = -1 - cotg^2(x)$.
2) Montrer que f est bijective de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$; on note $f^{-1}(x) = Arc\, cotg\, x$.
3) a - Montrer que $(Arc\, cotg\,)'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

   b - Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $Arc\, tg\,(x) + Arc\, cotg(x) = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE N° 3 :

1)En appliquant le théorème des accroissements finis à : $t \longmapsto \ln(t)$ *sur* $[1,x]$, *montrer que pour tout* $x > 1$. *on a*

$$\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x - 1 \ .$$

2) En déduire que $\forall x > 0$; $\qquad e^{\frac{x}{x+1}} < x + 1 < e^x$

Bonne chance