**Université Sfax** A.U. 2021-2022

IPEIS PB&G1

**Mathématiques / Algèbre**

E.F.S- N°2

**Exercice 1** : Soit $IR^3$ l'espace vectoriel sur IR, dit aussi le IR-e. v. $IR^3$ ( e.v. signifie espace vectoriel ), muni de « + » et « . » usuelles ( : $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ et $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ pour tout $\lambda$ de IR ) et soit les vecteurs $u_1$, $u_2$ et $u_3$ suivants,

$$u_1 = (1,2,0) \quad , \quad u_2 = (3,2,1) \quad , \quad u_3 = (2,0,2)$$

**1)** Que signifie que ce espace vectoriel $IR^3$ est de dimension 3 ?

**2)** a) Que signifie que $(u_1, u_2, u_3)$ est libre ?

b) Prouver que $(u_1, u_2, u_3)$ est libre.

**3)** Soit $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des nombres réels.

**i)** Déterminer les réels a, b et c solutions du système d'équations suivantes,

$$a + 3b + 2c = \alpha$$

$$2a + 2b = \beta$$

$$b + 2c = \gamma$$

**ii)** Ces solutions sont-elles uniques ? ( pour $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ fixés ).

**4) i)** Déduire de **3)** que $(u_1, u_2, u_3)$ est générateur ( dit aussi famille génératrice ) de ce e.v. $IR^3$.

**ii)** Retrouver que $(u_1, u_2, u_3)$ est générateur de ce e.v. $IR^3$ par déduction de **2) b)**.

**5) a)** Déduire aussi de **3)** que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de ce e.v. $IR^3$.

**b)** Retrouver que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de ce e.v. $IR^3$ par déduction de **2) b)**.

**c)** Quelles sont les coordonnées du vecteur $(\alpha, \beta, \gamma)$ de $IR^3$ dans la base $(u_1, u_2, u_3)$ ?

**Exercice 2 :** Soit $E$ le IR-e.v. ( espace vectoriel sur IR ) des polynômes de IR vers IR à coefficients réels muni de « + » et « . » usuelles ( Pour tous polynômes $f_1$ et $f_2$ de $E$, $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ et pour tout $f$ de $E$ et tout $\lambda$ de IR, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, pour tout $x$ élément de IR, et le vecteur nul $0_E$ de $E$ est le polynôme nul, le polynôme de IR vers IR tel que la valeur en tout $x$ de IR est $0$ ) et soit $F$ défini par,

$$F = \{ f \in E \mid d°(f) \leq 2 \}$$

C'est-à-dire que $F$ est l'ensemble des polynômes de IR vers IR à coefficients réels et de degré $\leq 2$.

( *Rappel* : Pour tous $f_1$ et $f_2$ de E, par définition, $f_1 = f_2$ signifie que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x$ de IR ).

**1)** Prouver que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

( Indication : Pour tous polynômes $f_1$ et $f_2$ de E, on a, $d°(f_1 + f_2) \leq \text{Max}(\{d°(f_1), d°(f_2)\})$, où $\text{Max}(\{d°(f_1), d°(f_2)\})$ est le plus grand parmi $d°(f_1)$ et $d°(f_2)$, avec la convention le polynôme nul est de degré $-\infty$ ).

**2)** Soit $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois réels deux à deux distincts. Prouver que le polynôme g de F tel que,

$$g(\alpha) = 1 \quad , \quad g(\beta) = 0 \quad , \quad g(\gamma) = 0$$

est le polynôme g de IR vers IR défini pour tout x de IR par ,

$$g(x) = \mu (x - \beta)(x - \gamma) \qquad \text{où} \quad \mu = 1/((\alpha - \beta)(\alpha - \gamma))$$

**3)** Déduire les polynômes $h_1$, $h_2$ et $h_3$ de F tel que ,

$$h_1(1) = 1 \quad , \quad h_1(2) = 0 \quad , \quad h_1(3) = 0$$
$$h_2(1) = 0 \quad , \quad h_2(2) = 1 \quad , \quad h_2(3) = 0$$
$$h_3(1) = 0 \quad , \quad h_3(2) = 0 \quad , \quad h_3(3) = 1$$

**4) a)** Prouver que $(h_1, h_2, h_3)$ est libre.

( Indication : en utilisant les conditions précédentes mentionnées en **3)** )

**b)** Sachant que F est de dimension 3, déduire que $(h_1, h_2, h_3)$ est une base de F.

**5)** Déduire ( d'après **3)** ) les coordonnées de tout polynôme f de F dans la base $(h_1, h_2, h_3)$.

***Bonne chance***