Université de sfax   Institut Préparatoire aux Etudes d'ingénieurs de Sfax

−Matière:Analyse .   Section : PB   A.U : 2021/2022

Devoir de synthèse du 2ième Semestre .

EXERCICE N° 1 :

1°) a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction :

$x \to \frac{1}{1+x^2}$.

b) Déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction :

$x \to arc\,\mathrm{tg}\, x$.

2°) Soit f la fonctioin définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2} \;\; -1}{x}\right) si\, x \neq 0 \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad si\, x = 0 \end{cases}$$

a) Déterminer le développement limité de la fonction :
$x \to (\sqrt{1+x^2} - 1)$ $en\ 0$ à $l'ordre\ 4$.

b) Donner alors le développement limité de $f\ en\ 0$ à $l'ordre\ 3$.

c) En déduire que $f\ est\ continue\ et\ d$é$rivable\ en\ 0$.

d) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $C_f\ de\ f$ au point d'abscisse 0

Puis préciser la position de C_f par rapport à T au voisinage de ce point.

On donne : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

EXERCICE N° 2 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} .$$

1°) Montrer que f *est Définie sur* $\mathbb{R}$ *et qu'elle est impaire.* (Poser $u = -t$).

2°) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x}{\sqrt{1+16x^4}} \leq f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3°) Montrer que f *est Dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer sa dérivée* .

4°) Déterminer le signe de f' *puis* Dresser le tableau de variations de f et donner l'allure de la représentation graphique de f (On ne cherchera pas à préciser les valeur extrémales de f).

EXERCICE N° 3 :

On considère l'équation différentielle (E): $9y'' + 6y' + y = e^x + 1$. Ou y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ *et* y' la fonction dérivée de y.

1°) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle*

$$(E_h): 9y'' + 6y' + y = 0 .$$

2°) Déterminer une solution particulière y_1 *de* (E_1): $9y'' + 6y' + y = e^x$

et y_2 *de* (E_2): $9y'' + 6y' + y = 1$.

3°) Déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

BONNE CHANCE