−Matière: Analyse . Section : PB A.U : 2022/2023

Devoir de Synthèse du 1ière Semèstre

EXERCICE N° 1 :

1) Répondre par vraie ou faux.

a) $\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{5}$

b) $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}$

c) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\pi}{9}$

d) $arctgx = \frac{arc(sinx)}{arc(cosx)}$

e) *la fonction arccos est définie sur* $[0, \pi]$

f) *La fonction arcsin est con tinue et dérivable sur* $[-1, 1]$

2) *calculer les limites suivantes.*

$\lim_{x\to 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|}$; $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-\cos x)}{x^2}$

$\lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)$; $\lim_{x\to 1} \frac{4\sqrt{x} - 1}{x-1}$; $\lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x}$

EXERCICE N° 2 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue en* 0 *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}; f(3x) = f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}$ *on pose* $U_n(x) = \frac{x}{3^n}$.

1) *Montrer par récurrence sur* $\mathbb{N}$ *que* $\forall n \in \mathbb{N}; f\left(U_n(x)\right) = f(x)$.

2) *Caculer* $\lim_{n\to\infty} U_n(x)$

3) *Déduire que* $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = f(0)$.

EXERCICE N° 3 :

I) Soit $f :]0\,;\pi[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = cotg(x) = \frac{cosx}{sinx}$$

1°) Montrer que f admet une application réciproque f^{-1} qu'on note arc co

2°) a – Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)$

b – Déduireque la fonction arccotg est définie sur $\mathbb{R}$.

3°) déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction arccotg et montr

que $(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{1+x^2} = (arccotgx)'$

II) Soit $g(x) = arccotg(x) + arccotg(\frac{1}{x})$

a) Préciser l'ensemble de définition et de dérivabilité de g .

b) Calculer le dérivé de la fonction g.

c) Déduire que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ si \ \ x > 0 \\ \\ \frac{3\pi}{2} \ si \ x < 0 \end{cases}$$