Université de sfax Institut Préparatoire aux Etudes d'ingénieurs de Sfax

–Matière: Analyse . Section : PB A.U : 2022/2023

Devoir de contrôle du 1^{ier} Semestre. **Durée : 1^h**

EXERCICE N°1 :

Soit α un réel strictement positif. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $et(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par la donnée de $u_1 > 0$ et pour tout entier naturel $n \geq 1. u_{n+1} = a(u_n)^2$ et $v_n = \ln(u_n)$.

1°) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et qu'elle est

arithmético – géométrique qui vérifie $v_{n+1} = 2v_n + \ln(a) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2°) Donner l'expression de v_n en fonction de n .

3°) Déduire l'expression de u_n en fonction de n .

EXERCICE N°2 :

On définit les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad \text{Et } \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} v_n \\ v_{n+1} = \frac{4}{5} v_n + \frac{1}{5} u_n \end{cases}$$

On désigne pour $n \in \mathbb{N}$ par: $w_n = u_n - v_n$.

1°) montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera sa raison.

Exprimer w_n en fonction de n .

2°) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N};\ v_n \leq u_n$.

3°) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

4°) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

5°) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

EXERCICE N°3 :

Calculer les limites suivantes ;

$\lim_{n\to+\infty}(n^{\frac{1}{n}} - 1)$; $\lim_{n\to+\infty} n\sin(\frac{2}{n})$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n - 4}{4^n + 3}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(2 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$