Université de Sfax 2022-2023
IPEIS BG1

Devoir de fin de semestre N^o 1
Algèbre

Exercice 1
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1. On considère l'application

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$$

Alors f est injective.

2. Soient E et F deux ensembles non vides, A et B deux parties non vides de E et f une application de E vers F. Alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

3. Soient E, F, G trois ensembles non vides, f une application de E vers F et g une application de F vers G. Alors on a
a. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
b. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors f est bijective.

Exercice 2
1. Résoudre le système (H) donné par

$$(H): \begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

où $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice $A(A+I_3)$, où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Déduire que A est inversible et d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Indication : $M(\lambda N) = \lambda(MN)$ et $(\lambda M)N = \lambda(MN)$, pour tout $M, N \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$)

4. Déterminer le rang de A.
5. Retrouver par la méthode des transformations élémentaires (méthode du pivot de Gauss) la matrice inverse A^{-1}.
6. En déduire la résolution du système linéaire suivant :

$$(S_1): \begin{cases} -x+y+z=2 \\ x-y+z=-2 \\ x+y-z=-4 \end{cases}$$

7. En utilisant la méthode du pivot de Gauss (méthode des transformations élémentaires) résoudre le système (S_1).

8. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et le système d'équations

$$(S_2) : \begin{cases} -x + y + z = \alpha \\ x - y + z = \beta \\ x + y - z = \gamma \end{cases}$$

où $x, y, z \in \mathbb{R}$. Résoudre (S_2).

Bonne chance