Université de Sfax 2022-2023
IPEIS BG1

Devoir Surveillé N^o 1
Algèbre

On pose j= $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\left(= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Exercice 1

1. Vérifier que $j^3 = 1$ et que $\dfrac{1}{j} = \overline{j}$.

2. En déduire que $j^2 = \overline{j}$.

3. Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n, le nombre j^n.

   (Indication : Distinguer les cas $n = 3p$, $n = 3p + 1$ et $n = 3p + 2$, où $p \in \mathbb{N}$)

4. (*a*) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

   (Indication : On peut raisonner par récurrence)

   (b) En déduire la valeur de la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{2022} j^k$.

Exercice 2

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a + bj + cj^2 = 0$.

1. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$. (Indication : utiliser le fait que $j^2 = \overline{j}$)

2. (a) Justifier que $c = -aj - bj^2$.

   (b) En déduire que $c - a = j^2(a - b)$.

   (c) Prouver que $a - b = j^2(b - c)$.

3. En déduire que $|c - a| = |a - b| = |b - c|$.

4. Démontrer que $\dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} = 0$.

Bon travail