UNIVERSITÉ DE SFAX Octobre 2016

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Etudes D'ingénieurs de Sfax

Devoir d'Algèbre N°1

NB : L'usage de la calculatrice est strictement interdit.

Section : MP1 **Durée : 01H30mn** **N. de pages : 01**

Exercice 1

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$ et que $j^2 = \overline{j}$.

(2) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $x + jy + j^2z = 0$ si, et seulement si : $x = y = z$.

(b) Calculer $(x + y + z)(x + jy + j^2z)(x + j^2y + jz)$.

(c) En déduire que $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ si, et seulement si : $x = y = z$ ou $x = -y - z$.

(3) (a) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $z = a - jb$. Calculer $|z|^2$.

(b) En déduire que $\forall\ (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\forall\ (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{Z}^n$, ils existent $A, B \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$A^2 + B^2 + AB = \prod_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2 + a_kb_k)$$

Exercice 2

(1) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$; 30 divise $n^5 - n$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = 2^n - 1$.

(a) Vérifier que M_2, M_3, M_5 et M_7 sont des nombres premiers et que M_{11} n'est pas premier.

(b) Montrer que, si M_p est premier, alors p est premier. Etudier la réciproque.

(3) Soient $a, b \geq 2$ deux entiers naturels premiers entre eux.

(a) Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au - bv = 1$.

(b) En déduire qu'il existe un seul couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{N}^2$ tel que $au_0 - bv_0 = 1$ avec $0 \leq u_0 < b$ et $0 \leq v_0 < a$.

(c) Résoudre l'équation diophantienne d'inconnu $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $ax - by = 1$.

(On donnera les solutions en fonction de u_0, v_0, a et b).

(d) Déduire les solutions, dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation : $47x - 111y = 1$.