Université de Sfax
IPEIS

Année universitaire : 2016-2017
MP1

Devoir de synthèse N°1

Durée: 2h **Epreuve: Analyse** **Date: 13-12-2016**

Problème I

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ donnée par :

$$(E_p) : \ln x + x = p$$

Partie I :

1. Montrer que l'équation (E_p) possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et que celle-ci appartient à $[1, p]$.
   On note x_p la solution de l'équation (E_p).
2. Montrer que la suite $(x_p)_{p \geqslant 1}$ est strictement croissante.
3. (a) Montrer que $x_p \sim p$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} x_{p+1} - x_p$.
   (c) Déterminer un équivalent simple à $\ln(x_p)$ et déduire que
   $$x_p = p - \ln(p) + o(\ln(p)).$$

Partie II

On fixe $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que
   $$\forall x \geqslant 1, \quad \ln x \leqslant x - 1.$$
   On considère la fonction
   $$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = p - \ln x \end{array}$$
   On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
   $$\begin{cases} U_0 \in [1, p] \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$
2. Justifier que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [1, p]$.
3. Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, que sera sa limite ?
4. Montrer que les suites $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
   On note $\alpha = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} U_{2n}$ et $\beta = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} U_{2n+1}$.
5. (a) Montrer que $f(\alpha) = \beta$ et $f(\beta) = \alpha$.
   (b) Déduire que $\alpha = \beta$.
6. Déduire finalement que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_p.

Problème II

On considère $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, non nulles, qui s'annulent au moins une fois sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Soit $f \in \mathcal{E}$.

1. Montrer que
   (a) $f(0) = 1$.
   (b) f est paire.
   (c) f s'annulle au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On pose l'ensemble $E = \{x > 0; f(x) = 0\}$
   (a) Justifier que E admet une borne inférieure. On notera $\alpha = \inf(E)$.
   (b) Montrer que $\alpha \in E$.
   (c) Justifier que f garde un signe strictement positif sur $[0, \alpha[$.
3. On note $\omega = \dfrac{\pi}{2\alpha}$ et on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(\omega x)$.
   (a) Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que
   $$f\left(\frac{\alpha}{2^q}\right) + 1 = 2f^2\left(\frac{\alpha}{2^{q+1}}\right)$$
   (b) Déduire que
   $$\forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{\alpha}{2^q}\right) = g\left(\frac{\alpha}{2^q}\right)$$
   (c) Montrer alors que
   $$\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{p\alpha}{2^q}\right) = g\left(\frac{p\alpha}{2^q}\right)$$
   (On rappelle la formule : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$.)
4. On considère l'ensemble
   $$D_\alpha = \left\{\frac{p\alpha}{2^q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$$
   (a) Montrer que D_α est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Déduire que les éléments de $\mathcal{E}$ sont exactement les fonctions de la forme $x \longmapsto \cos(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.