

* * * * *

**Institut Préparatoire aux Etudes
D'ingénieurs de Sfax**

Devoir de Contrôle d'Algèbre N°1

Section : MP1

Durée : 01 Heure

N. de pages : 02

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $0 \leq k \leq n$, on rappelle que : $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

En développant $(1+x)^{2n}$, pour $x = \sqrt{2}$ puis pour $x = -\sqrt{2}$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1} 2^k.$$

Exercice 2

On appelle \mathcal{A} l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Le sous-ensemble de \mathcal{A} formé des bijections de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est noté par \mathcal{B} . On définit la relation de conjugaison sur \mathcal{A} par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{A}^2 : f \mathcal{R} g \iff \exists h \in \mathcal{B} \text{ tel que } g = h \circ f \circ h^{-1}$$

Lorsque $f \mathcal{R} g$, on dit que f et g sont conjuguées dans \mathcal{A} .

- (1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathcal{A} .
- (2) On rappelle que pour $f \in \mathcal{A}$, $cl(f) = \{g \in \mathcal{A}; f \mathcal{R} g\}$: classe d'équivalence de f modulo \mathcal{R} .
 - (a) Montrer que $cl(id_{\mathbb{R}})$ est formée par un seul élément qu'on déterminera.
 - (b) Montrer que $cl(\tilde{0})$ est l'ensemble des fonctions constantes sur \mathbb{R} , où $\tilde{0}$ désigne la fonction nulle.
- (3) Donner un exemple d'une fonction $f \in \mathcal{A}$ et d'une fonction $h \in \mathcal{B} \setminus \{id_{\mathbb{R}}\} : h \neq id_{\mathbb{R}}$ telles que : $f = h \circ f \circ h^{-1}$.
- (4) Soit $f \in \mathcal{A}$. On pose : $C_f = \{h \in \mathcal{B}; f = h \circ f \circ h^{-1}\}$.
 - (a) Montrer que pour tout $h \in C_f; h^{-1} \in C_f$.
 - (b) Montrer que pour tout $(h_1, h_2) \in C_f \times C_f; h_1 \circ h_2 \in C_f$.

Dans toute la suite, f et g sont deux éléments conjugués dans \mathcal{A} .

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$: n fois (et donc $f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n$).

(5) (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n \mathcal{R} g^n$.

(b) Montrer que, si $f \in \mathcal{B}$, alors il en est de même pour g et que de plus, $f^{-1} \mathcal{R} g^{-1}$.

(6) On rappelle que $a \in \mathbb{R}$ est un point fixe de f lorsque $f(a) = a$.

(a) Montrer que f possède un point fixe si, et seulement si, g possède un point fixe.

(b) Etablir une bijection entre l'ensemble des points fixes de f et l'ensemble des points fixes de g .

(c) En déduire que les applications $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^x - 1$ ne sont pas conjuguées dans \mathcal{A} .