INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
DE SFAX

Département de la Préparation
Mathématiques Physique
Section MP1

Devoir de synthèse d'Algèbre MP1

Durée : 2 h **Date : 07-05-2018** **Nb pages : 2**

Exercice On définit dans $(\mathbb{R}[X])^2$ l'application : $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.

On considère $H = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(0) = 0\}$.

1. Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $H^{\perp} = \{0\}$.
4. A-t-on $\mathbb{R}[X] = H \oplus H^{\perp}$?
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n = H \cap \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = H_n \oplus H_n^{\perp}$.

Problème

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $M_n(\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. I_n désigne la matrice unité.

Partie I : Spectres de matrices et d'endomorphismes

On adopte la définition suivante :

Définition : Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v E.

Un élément λ de $\mathbb{K}$ est dit

(i) **valeur propre de** A s'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})\backslash\{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.

(ii) **valeur propre de** f s'il existe $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda x$.

On note $S_p(A)$ (respectivement $S_p(f)$) l'ensemble des valeurs propres de A (respectivement de f), appelé **spectre de** A (respectivement de f).

1. Montrer que $\lambda \in S_p(A)$ si et seulement si $\det(\lambda I_n - A) = 0$.
2. On suppose que E est muni d'une base B et que $A = Mat(f, B)$.

   Montrer que $S_p(A) = S_p(f)$.
3. Montrer que si $\lambda \in S_p(A)$, alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lambda^k \in S_p(A^k)$
4. Justifier que deux matrices semblables ont même spectre.
5. Prouver que A est inversible si, et seulement si, $0 \notin S_p(A)$. Déterminer dans ce cas le spectre de A^{-1}.

6. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice triangulaire.

   Montrer que $S_p(A) = \{a_{i,i},\ 1 \leq i \leq n\}$.

7. **Exemples** : Déterminer $S_p(A)$ et $S_p(f)$ dans chacun des cas suivants :

   (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

   (ii) f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(X^k) = X^{k+1}.$$

Partie II : Matrices nilpotentes

Définition : Une matrice carrée, A, d'ordre n est dite **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Le plus petit de ces entiers p s'appelle **indice de nilpotence de** A.

Notation : $Tr(A)$ désigne la trace de A.

On admet le résultat suivant :

$\mathcal{R}$: **"Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure".**

Dans cette partie, on se propose de montrer quelques propriétés des matrices nilpotentes, puis montrer l'assertion suivante :

$$\text{si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente, alors } Tr(A^k) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

1. (a) Montrer que si A est nilpotente d'indice p, alors il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que la famille $\{X, AX, ..., A^{p-1}X\}$ est libre.

   (b) En déduire que $p \leq n$ et que $A^n = 0$.

2. On suppose que A est nilpotente d'indice n

   (a) Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que la famille $\{X, AX, ..., A^{n-1}X\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

   (b) Soit $i \in \mathbb{N}$.
   Montrer que si $\ker(A^i) = \ker(A^{i+1})$, alors $\ker(A^i) = \ker(A^j)$, $\forall j \geq i$.

   (c) Montrer que si $i \leq n$, alors $\ker(A^i) \neq \ker(A^{i+1})$.

   (d) En déduire que, $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, $dim(\ker(A^k)) = k$.

3. Montrer que si A est nilpotente, alors 0 est la seule valeur propre de A (indication : utiliser la Partie I, question 3).

4. En utilisant la Partie I, question 4, question 6 et le résultat $\mathcal{R}$, déduire que

   si la matrice A est nilpotente, alors $Tr(A^k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.