UNIVERSITÉ DE SFAX — Année universitaire : 2017/2018

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de Contrôle d'Algèbre - Semestre N°2
Section : M.P.1

Durée : 01 heure — **Date : 28 Avril 2018** — **Nb de page : 01**

Exercice 1 Soient

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que la famille $\{A, J, I_3\}$ est liée.

(2) Montrer que $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$.

(3) Donner l'expression de A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

(1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

(2) On considère les endomorphismes suivants f et g définis par :

$$\forall\ P \in E;\ f(P) = P' \text{ et } g(P) = P - P'$$

(a) Déterminer Ker (f) et Im (f).

(b) Montrer que f est un endomorphisme nilpotent de E.

(c) Montrer que g est un automorphisme de E et que $g^{-1} = \sum_{k=0}^{n} f^k$,

où $f^0 = id_E$ et $f^k = f \circ ... \circ f$: k-fois.

(3) On considère l'endomorphisme h de E défini par : $\forall\ P \in E;\ h(P) = ((1 - X^2)P')'$ et $H = \{P \in E;\ \int_{-1}^{1} P(t)dt = 0\}$.

(a) Montrer que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Préciser sa dimension.

(b) Montrer que Ker $(h) = \mathbb{R}$.

(c) Montrer que Im $(h) = H$.

(d) Prouver que $E = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}(h)$.