IPEIS **A.U.2017-2018**

MP1 **11/05/2018**

Devoir de synthèse d'analyse n^{o}2.
2 heures.

Exercice : (03 points)
Dans la salle des professeurs 60% sont des femmes; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes.
Quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme?

Problème: (17 points)

I- Le critère spécial des séries alternées: (06 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant les conditions suivantes:

① la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

② $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
2. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k.$$
Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. (a) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ converge.
   (b) Soit $L = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$, prouver que L est positive.
4. **Application:** prouver que la série $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ converge. Cette série converge t'elle absolument?
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k$.
   (a) Justifier l'existence de R_n et déterminer sa limite.
   (b) Discuter suivant la parité de n, le signe de R_n et justifier alors que $|R_n| = (-1)^n R_n$.

II- Etude du reste de séries alternées particulières: (06 points)

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, en plus:

③ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

④ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_n$.
2. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| - |R_{n+1}| = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (u_{n+p} - u_{n+1+p})$.

   (b) En déduire la monotonie de la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \dfrac{u_{n-1}}{2}$.
4. En déduire qu'au voisinage de l'infini, $R_n \sim (-1)^n \dfrac{u_n}{2}$.
5. **Application:** déterminer un équivalent au voisinage de l'infini de $A_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.

III - Calcul d'une somme de restes: (05 points)

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Justifier que, pour $t \in [0;1]$, on a :

   $$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}.$$

   (b) Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = 0$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

   (a) Montrer que la suite $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$ vérifie les hypothèses ①, ②, ③ et ④.

   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.