IPEIS A.U. 2017-2018

Devoir de contrôle n° 2

Analyse

MP1

Soit f la fonction définie par $f(0)=1$ et $f(1)=0$ et si $x\in]0,1[$ par $f(x)=\dfrac{-x}{\ln(1-x)}$.

1. (a) Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0. Etudier la position relative de C_f par rapport à T.
   (c) Montrer que f est continue sur $[0,1]$. f est-elle de classe C^1 sur $[0,1]$?

2. Soit $u_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n dx$. On se propose de montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, Montrer que :
   (i) $u_n \geq \displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{-x^{n+1}}{\ln(1-x)}dx$.
   (ii) $-\ln(1-x)\leq \ln n$, $\forall x\in[0,1-\frac{1}{n}]$.
   (b) En déduire que $u_n \geq \dfrac{1}{(n+2)\ln n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+2}$.
   (c) Montrer que $\dfrac{1}{(n+2)\ln n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+2} \backsim \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{n\ln n}$ lorsque $n\to+\infty$.
   (d) Soit $n\geq 2$. Calculer $\displaystyle\int_2^n \frac{dx}{x\ln x}$. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.
   (e) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

3. Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe C^1 et $u_n=\displaystyle\int_0^1 g(x)x^n dx$. On se propose de montrer que :

$$\text{la série } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge si et seulement si } g(1)=0.$$

   (a) Montrer que $u_n=\dfrac{g(1)}{n+1}+\displaystyle\int_0^1 (g(x)-g(1))x^n dx$.
   (b) Montrer qu'il existe $M>0$ tel que $\forall x\in[0,1]$, $|g(x)-g(1)|\leq M|x-1|$.
   (c) En déduire que $\left|\displaystyle\int_0^1 (g(x)-g(1))x^n dx\right| \leq M\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$.
   (d) Conclure que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $g(1)=0$.