Examen semestriel n°1 d'algèbre	MP1
Lundi 10/12/2018	Durée : 2h

EXERCICE

Soient $(G, .)$ un groupe de cardinal fini $n \geq 1$, d'élément neutre e, et H un sous-groupe de G.

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur G par :

$$\forall (a,b) \in G^2, \qquad a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a.b^{-1} \in H$$

1° Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.

2° Soient $(a,h) \in G \times H$. Montrer que $h.a \,\mathcal{R}\, a$.

3° Soit a un élément quelconque de G. On note $cl(a)$ la classe de a modulo la relation d'équivalence $\mathcal{R}$: $cl(a) = \{x \in G \text{ tel que } x\mathcal{R}a\}$.

a) Montrer que les classes d'équivalence par $\mathcal{R}$ forment une partition de G.

b) Montrer que l'application $f : H \to cl(a)$, telle que $f(h) = h.a$, est une bijection.

c) Montrer alors que le cardinal de H divise n (**Théorème de Lagrange**).

4° **APPLICATIONS**

a) On suppose que n est premier. Déterminer tous les sous-groupes de G.

b) On suppose que $G = \mathcal{U}_4 = \{z \in \mathbb{C} \,;\, z^4 = 1\}$. Chercher les sous- groupes de G.

PROBLÈME

On dit qu'une partie I d'un anneau commutatif $(A,+,.)$ est un **idéal** de A si :

$$\begin{cases} (i)\ I \text{ est un sous-groupe de } (A,+) \\ (ii)\ \forall x \in I,\ \forall y \in A, \text{ on a } x.y \in I \end{cases}$$

Pour $x \in A$, on définit l'ensemble : $< x >= \{x.y \text{ tel que } y \in A\} \subseteq A$.

I^ère Partie

Dans cette partie, $(A,+,.)$ est un anneau commutatif d'élément neutre 0_A et d'élément unité 1_A, et $x \in A$.

1° Montrer que $\{0_A\}, A$ et $< x >$ sont des idéaux de A.

2° Soit I un idéal de A.

a) Montrer que $(I = A)$ si et seulement si $(1_A \in I)$.

b) On rappelle qu'un élément a de A est **inversible** s'il existe a' dans A tel que : $a.a' = 1_A$. Soit A^* le groupe des éléments inversibles de A.

Montrer que $(< x > = A) \Leftrightarrow (x \in A^*)$.

3° Montrer que :

A est un corps si seulement si les seuls idéaux de A sont A et $\{0_A\}$.

4° Soient I et J deux idéaux de A. On définit l'ensemble :

$$I + J = \{x + y \text{ tel que } (x, y) \in I \times J\}.$$

Montrer que $I \cap J$ et $I + J$ sont des idéaux de A.

*5° **APPLICATIONS**. On prend $A = \mathbb{Z}$ muni des lois usuelles $\times$ et .*

a) Montrer que si $d \in \mathbb{N}$, alors $d.\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

b) Montrer $12.\mathbb{Z} \cap 30.\mathbb{Z}$ et $12.\mathbb{Z} + 30.\mathbb{Z}$ sont des idéaux de $\mathbb{Z}$ et les écrire sous la forme $m.\mathbb{Z}$ où $m \in \mathbb{N}^*$.

2ème Partie

On prend $A = \mathbb{Q}[X]$ où $(P + Q)(x) = P(X) + Q(X)$ et $(P.Q)(X) = P(X).Q(X)$.

*$\mathbb{Q}[X]$ est l'anneau **des polynômes à coefficients rationnels**.*

*On dit qu'un nombre complexe z est **algébrique** s'il existe un polynôme P non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(z) = 0$.*

***Exemples :** $\sqrt{2}$ est algébrique car il est annulé par le polynôme $X^2 - 2$.*

$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est algébrique car il est annulé par le polynôme $X^2 + X + 1$.

Soit z un nombre complexe algébrique.

Soit l'ensemble $I_z = \{ P \in \mathbb{Q}[X] \text{ tel que } P(z) = 0\}$.

1° Montrer que $\sqrt[3]{2} + 1$ est un nombre algébrique.

2° a) Vérifier que I_z est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$ non réduit à $\{0\}$.

b) Soit l'ensemble $D = \{ deg(P) \text{ tel que } P \in I_z \backslash \{0\} \}$.

Justifier que D admet un plus petit élément r et que $r \geq 1$.

c) Déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire π_z de degré r

*à coefficients rationnels tel que $\pi_z(z) = 0$, appelé **polynôme minimal de z** sur $\mathbb{Q}$.*

3° a) Montrer que $(P \in I_z) \Leftrightarrow (P$ est divisible dans $\mathbb{Q}[X]$ par $\pi_z)$.

b) En déduire que $I_z = <\pi_z>$.

4° Montrer que $(z \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow (r = 1)$.

*5° **APPLICATION**: On prend $z = \sqrt[3]{2} + 1$.*

a) Montrer que z est irrationnel puis en déduire que $r \in \{2 ; 3\}$.

b) Montrer que z est la seule racine réelle du polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 3$.

c) Montrer par l'absurde que $r \neq 2$. En déduire que $\pi_z(X) = P(X)$.