INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
DE SFAX

Département de la Préparation
Mathématiques Physique
Section MP1

Devoir de contrôle d'Algèbre MP1

Durée : 01 h **Date : 03-11-2018** **Nb pages : 02**

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.

Exercice 1 :

Répondre par vrai ou faux **en justifiant votre réponse** *:*

1. $\forall\ (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2 \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ 1\leq j\leq n}}^{n} z_k z_j.$

2. $\prod_{k=1}^{n} 3e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} = 3(-1)^n.$

3. $e^z = -2$ *signifie que* $z = \ln 2 + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4. *Soit f une application d'un ensemble non vide E vers un ensemble non vide F. Alors :*

   (a) *Pour toutes parties A, B de E,* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

   (b) *Pour tout* $x \in A \cap B$, $f(x) \in f(A) \cap f(B)$,

   (c) *Si f est injective, alors* $\forall\ y \in F$, $card(f^{-1}(\{y\})) = 1$,

   (d) *Si* $f(E) = F$, *alors f est surjective,*

   (e) *Si* $E = F$ *et* $f \circ f = id_E$, *alors f est bijective,*

   (f) *Si* $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ *et* $f\ :\ (x, y) \longmapsto x - 3y$, *alors f est bijective.*

Exercice 2 :

Soient E un ensemble et par $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des applications de E vers E.

1. *On suppose que $E = \mathbb{R}$. On définit dans $\mathcal{F}(E)$ la relation R suivante :*

$$\forall\ (f,g) \in (\mathcal{F}(E))^2,\ f\ R\ g \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{N}^*;\ g = \alpha f$$

   Montrer que R est une relation d'ordre partiel.

2. *On suppose que $E = \mathbb{R}^3$.*

   Pour $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$, on considère l'ensemble

$$N_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

   Déterminer N_f, lorsque f est l'application nulle, puis $f = id_E$.

3. *Dans toute la suite, on suppose que*

$$\begin{aligned} f :\ &\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &(x,y,z) \mapsto (x-2y+z, 2x-y-z, x+y-2z) \end{aligned}$$

   N.B : Dans la résolution d'un système, on exige la méthode de Gauss-Jordan.

   (a) *Soit $Y = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.*

   Montrer que $X = (x,y,z)$ est solution de l'équation $f(X) = Y$, si, et seulement si, X est solution du système linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{aligned} x - 2y + z &= a \\ 2x - y - z &= b \\ x + y - 2z &= c \end{aligned} \right.$$

   (b) *Déterminer l'ensemble $f^{-1}\{(1,5,3)\}$. En déduire que f n'est pas surjective.*

   (c) *Soit $Y = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que :*

   Y admet un antécédent par f si, et seulement si, $a - b + c = 0$

   (d) *Déterminer l'ensemble N_f.*