Université De Sfax
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2018-2019
Niveau : *MP1*

Devoir de Contrôle N° 1 : **Analyse**
Durée :1H

Problème :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et on pose

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}.$$

Partie I

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$(E_1) : y' + \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} y = 1.$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$, (H), l'équation homogène associée à (E_1).
2. En prenant le changement de variable $t = f_1(x)$, calculer sur $]0, \pi[$,

$$A(x) = \int \frac{dx}{2+\cos(x)}.$$

   (**Indication :** pour ce changement de variable, on pourra utiliser le fait que : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$).
3. Déduire l'ensemble des solutions de (E_1) sur $]0, \pi[$.

Partie II

1. Résoudre sur $]0, \pi[$, l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(E_2) : y'' + y = \frac{1}{1+f_2(x)}.$$

2. Déduire l'unique solution de (E_2) qui passe par le point $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ avec une tangente horizontale.

Partie III

1. Déterminer le domaine de définition de f_α et justifier que f_α est 2π-périodique.
2. Soit $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que f_α admet sur $]0, \pi[$ une fonction réciproque, f_α^{-1}, dont on déterminera.
   (b) Simplifier $\tan(f_\alpha^{-1}(x))$, tout en précisant son domaine d'existence.
   (c) i. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \pi\right[$, $f_\alpha\left(2\arctan\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) \geq 1 + \alpha\frac{x}{2}$.
   ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\alpha \arctan\left(\frac{1}{k}\right)\right) \leq (n+1)^\alpha$.

Bon Travail