Université De Sfax
INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEUR
****

A.U : 2018/2019
Section : MP1

Examen Semestriel n°1 en Analyse Mathématique

Durée : 2H

Problème I :

On rappelle qu'un intervalle I est dit stable par une fonction f si $f(I) \subset I$, et qu'un réel x est dit point fixe d'une fonction f si $f(x) = x$.
On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions $f(x) = 1 - x^2$ et $g = f \circ f$. On définit aussi la suite (U_n) par :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}, \\ U_{n+1} = 1 - U_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Le but de ce problème est d'étudier la suite (U_n) selon les valeurs de U_0.

Partie I : *Préliminaires*

1. (a) Déterminer les points fixes de f. On les notera α et β tels que $\alpha < \beta$. Donner le tableau de signe de $f(x) - x$.
   (b) Quels sont les valeurs possibles de la limite de (U_n) lorsqu'elle converge ?
   (c) Dresser le tableau de variations de f en précisant les valeurs extrêmales.
   (d) Vérifier que les intervalles $[0, 1]$, $]\alpha, 1]$ et $]-\infty, \alpha[$ sont stables par f.
2. Montrer que les point fixes de g sur $[0, 1]$ sont exactement 0, β et 1. Donner le tableau de signe de $g(x) - x$ sur $[0, 1]$.

Partie II : *Etude de la suite* (U_n)

1. Quel sera la nature de (U_n) si $|U_0| \in \{|\alpha|, \beta\}$?
2. On suppose dans cette question que $U_0 \in [0, \beta[\cup]\beta, 1]$.
   (a) On définit la suite (V_n) par : $\begin{cases} V_0 \in [0, \beta[\cup]\beta, 1], \\ V_{n+1} = g(V_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
      i. Montrer que (V_n) converge.
      ii. Préciser les valeurs de la limite de (V_n) selon V_0.
   (b) En appliquant les résultats de la question précédente (2.a) aux sous-suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}), montrer que (U_n) diverge.

3. On suppose maintenant que $U_0 \in]\alpha, 0[$.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n_0} \in [0,1]$. (Ind. On pourra raisonner par l'absurde.)
   (b) Déterminer, en utilisant ce qui précède, la nature de convergence de (U_n) selon les valeurs de U_{n_0}.
4. Lorsque $U_0 < \alpha$, montrer que (U_n) tend vers $-\infty$.
5. Lorsque $U_0 > 1$, vérifier que $U_1 < 0$ et discuter la nature de la suite (U_n) selon les cas.

Problème II :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit qu'un réel x est un point adhérent à A si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad [x - \epsilon, x + \epsilon] \cap A \neq \emptyset.$$

1. Vérifier que tout élément de A est adhérent à A.
2. Soit B une partie de $\mathbb{R}$ telle que $B \subset A$. Montrer que tout point adhérent à B est un point adhérent à A.
3. ***Caractérisation séquentielle d'un point adhérent*** :
   (a) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers un réel ℓ. Montrer que ℓ est un point adhérent à l'ensemble $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.
   (b) Déduire que s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers un réel x alors x est un point adhérent à A.
   (c) Réciproquement, montrer que si un réel x est un point adhérent à A alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.
4. ***Intervalle borné et points adhérents*** :
   Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ de bornes a et b réels tels que $a < b$.
   (a) Montrer que si x est adhérent à I alors $x \in [a, b]$.
   (b) Justifier que a et b sont des points adhérents à I. Quel est alors l'ensemble des points adhérents à I ?
5. ***Densité et points adhérents*** :
   (a) On suppose dans cette question que A est dense dans $\mathbb{R}$. Quel est l'ensemble des points adhérents à A ?
   (b) Justifier que si tout réel x est adhérent à A alors A est dense dans $\mathbb{R}$.
6. ***Quelques exemples :*** Quel est l'ensemble des points adhérents de chacun des ensembles suivants ?
   (a) $\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$