Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Sfax	المعهد التحضيري للدراسات الهندسية بصفاقس IPEIS	MP 1 A.U : 2018-2019 Durée : 3 heures

Devoir de Synthèse 1er Semestre

Physique

Mardi 11 Décembre 2018

- *Les résultats littéraux devront être encadrés.*
- *Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.*
- *Les calculatrices sont autorisées.*

★★★

Exercice 1:

Soient $\Re(O,xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\Re_1(O_1,x_1y_1z_1)$ le référentiel relatif muni de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$. Une tige (T) est en rotation d'angle $\theta(t)$ autour de l'axe (Oz) (voir figure). Une deuxième tige (T_1), liée à la tige (T) en un point mobile O_1, est située dans le plan vertical $(\vec{e}_\rho, \vec{k})$ faisant un angle constant α avec la verticale (Oz).

Le point O_1 est repéré par $\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\vec{e}_\rho$ .Un mobile ponctuel M est assujetti à se déplacer sur la tige (T_1) tel que $\overrightarrow{O_1M} = V_0.t\,\vec{u}$. Où V_0 est une constante positive et $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la tige (T_1).

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

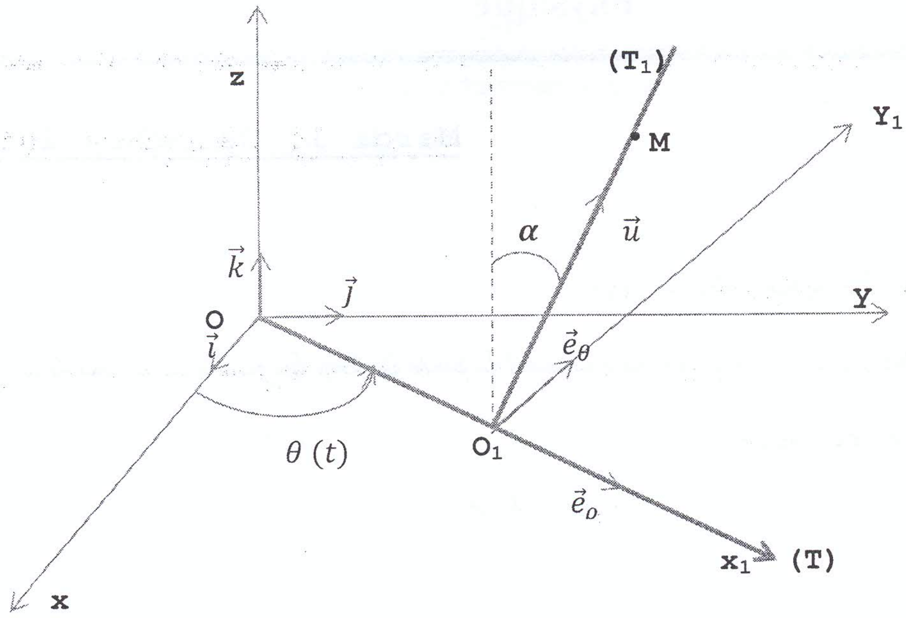
I- Etude de la cinématique de M par calcul direct :

1. Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}_\rho$ $\vec{k}$ et α.
2. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
3. Déterminer $\vec{V}(M)/\Re$, la vitesse de M dans le repère $\Re$.
4. Déterminer $\vec{a}\,(M/\Re)$, l'accélération de M dans le repère $\Re$.

II-Etude de la cinématique de M par composition de mouvement :

5. Exprimer $\vec{\Omega}$ la vitesse angulaire de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$.

6. Déterminer $\vec{V}r(M)$ la vitesse relative de M.
7. Déterminer $\vec{V}e(M)$ la vitesse d'entrainement de M. En déduire $\vec{V}a(M)$ la vitesse absolue de M.
8. Déterminer $\vec{a}r(M)$ l'accélération relative de M.
9. Déterminer $\vec{a}e(M)$ l'accélération d'entrainement de M.
10. Déterminer $\vec{a}c(M)$ l'accélération de Coriolis de M.
11. Déduire $\vec{a}(M)$ l'accélération absolue de M.

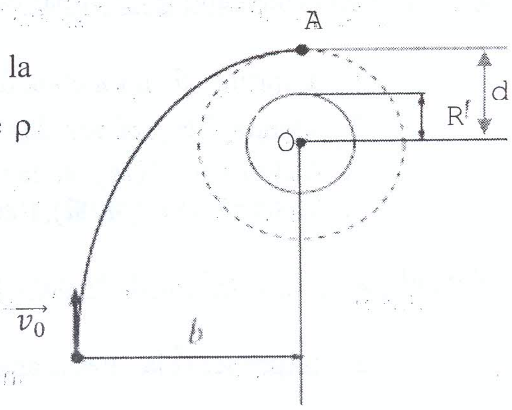


Exercice 2:

Un météorite, de masse m, <u>très loin de la Terre</u>, a une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ de module v_0 portée par une droite Δ située à une distance b du centre O de la Terre. On suppose que le météorite est soumis uniquement au champ gravitationnel terrestre et qu'il n'y a jamais de forces de frottement. Soit A le point de la trajectoire telle que la distance Terre-météorite soit minimale. On note $OA = d$. On supposera que la Terre reste immobile dans un référentiel galiléen.

On veut déterminer à partir de quelle valeur de b le météorite s'écrasera sur la Terre.

On notera G la constante de gravitation, M est la masse de la Terre, supposée sphérique, homogène, de masse volumique ρ et de rayon R.



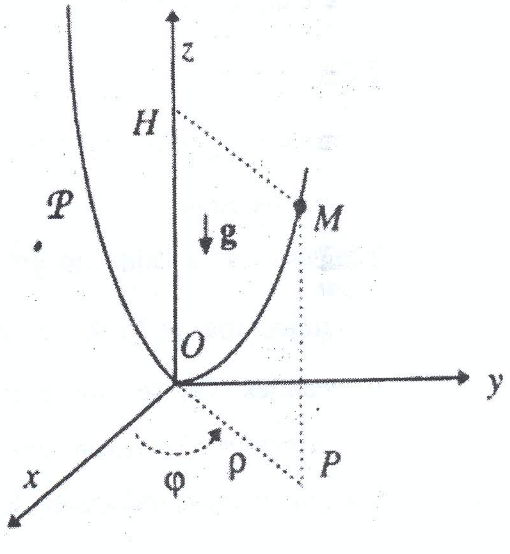
1. Donner l'expression de la force de gravitation en un point P de la trajectoire tel que $OP=r$.

2. Calculer l'énergie potentielle $Ep(r)$ du météorite en ce point. On prendra $Ep(\infty) = 0$.
3. Quelles sont les grandeurs physiques conservées au cours du mouvement ? On donnera une justification. En déduire que la trajectoire est plane.
4. Donner l'expression de la vitesse en coordonnées polaires. Montrer qu'en A, point de la trajectoire le plus proche de O, la vitesse $\overrightarrow{v_1}$ (de norme v_1) est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{OA}$.
5. En explicitant la question 2), trouver deux relations liant b. d. G, M v_0.et v_1. Déduire l'expression de la distance d en fonction de G, M, b et v_0.
6. Soit R le rayon de la Terre. Quelle condition doit satisfaire b pour que le météorite de vitesse initiale v_0 rencontre la Terre ?

Problème :

On désire étudier le mouvement d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur$\vec{g}$, à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ supposé galiléen. La surface extérieure de cette cavité est un paraboloïde de révolution, appelé $\mathcal{P}$, d'axe vertical ascendant Oz, dont l'équation en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) est :

$$\rho^2 - az = 0 \text{ avec } a > 0 .$$



On suppose que le point matériel M glisse sans frottement sur $\mathcal{P}$. Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M, la base de projection étant celle de $R_c(O, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$ (voir figure).

1. *Moment cinétique*

1.1. Exprimer, dans la base de R_C, la vitesse de M par rapport à R en fonction de ρ, φ et de leurs dérivées.

1.2. Exprimer en fonction des coordonnées cylindriques de M, le vecteur moment cinétique en O de M.

On note par L la composante sur Oz du vecteur moment cinétique.

1.3. Montrer que la réaction $\vec{R}$ qu'exerce $\mathcal{P}$ sur M est contenue dans le plan OHP.

1.4. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, sous forme vectorielle, montrer que L se conserve au cours du temps. Expliciter L en fonction de ρ et $\dot{\varphi}$.

2. *Energie*

2.1. Quelle est, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique E_c de la particule M par rapport à R ? Exprimer E_c en fonction de L ,ρ et $\dot{\rho}$.

2.2. Déterminer l'énergie potentielle E_p associée à la force subie par M. Exprimer E_p en fonction de ρ en supposant que $E_p(O) = 0$.

2.3. Que peut-on dire de l'énergie mécanique E_m.

3. *Discussion générale du mouvement*

3.1. Déduire de ce qui précède une équation différentielle du premier ordre, à une seule fonction inconnue $\rho(t)$, de la forme :

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 G(\rho) + E_{p,ef}(\rho) = E_m$$

où $G(\rho)$ est positif et sans dimension et $E_{p,ef}(\rho)$ est appelé énergie potentielle effective.

Expliciter $G(\rho)$ et montrer que $E_{p,ef}(\rho) = \frac{mg\rho^2}{a} + \frac{L^2}{2m\rho^2}$.

3.2. Représenter le graphe $E_{p,ef}(\rho)$. Montrer que $E_{p,ef}(\rho)$ passe par un minimum $E_{p,ef^{min}}$, pour une valeur ρ_m de ρ. Exprimer valeur ρ_m et $E_{p,ef^{min}}$ en fonction de L, m, a et g intensité du champ de pesanteur.

3.3. Discuter, à l'aide du graphe $E_{p,ef}(\rho)$, la nature du mouvement de M. En déduire que la trajectoire de M sur $\mathcal{P}$ est nécessairement tracée sur une région de $\mathcal{P}$ limitée par deux cercles. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer les rayons des deux cercles.

3.4. Quelle est la trajectoire de M dans le cas où E_m est égale à la valeur minimale de $E_{p,ef.}$

4. *Trajectoire circulaire*

4.1. Déterminer le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ pour que la trajectoire de M sur $\mathcal{P}$ soit un cercle horizontal.

4.2. Déduire les expressions des accélérations normale et tangentielle.

4.3. L'expérience montre qu'en réalité le mobile se stabilise finalement au fond de la cuvette, quelles que soient les conditions initiales du mouvement. Interpréter ce résultat.

☙★★★❧