Université de Sfax
IPEIS

Année universitaire : 2019-2020
MP1

Devoir de synthèse N°2

Durée: 2h **Epreuve: Analyse** **Date: 02-07-2020**

Exercice :

Soit f la fonction définie pour $x \in [-1,1]\backslash\{0\}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{\sin(x)} - 1}{\arcsin(x)}$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, et déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.
3. Déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement, notée toujours f, est dérivable en 0.
4. Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point $(0, f(0))$.
5. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T au voisinage du point $(0, f(0))$.

Problème 1 :

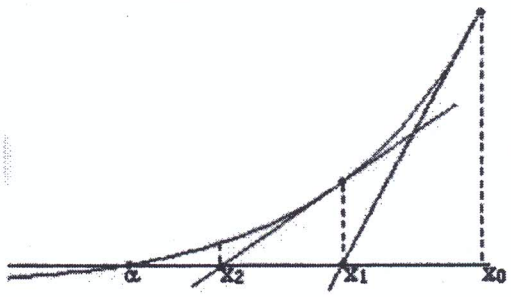
Partie I : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $I = [a, b]$.
On considère la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $g(I) \subset I$ et il existe une constante $k \in [0, 1[$ pour laquelle on ait $\forall (x, y) \in I^2, |g(x) - g(y)| \leqslant k|x - y|$.

1. (a) Justifier que g est continue.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ possède une solution dans l'intervalle I puis que celle-ci est unique. On la notera α.
2. Soit $t \in I$ et $(x_n)_n$ la suite définie par : $x_0 = t$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |x_n - \alpha| \leqslant k^n|t - \alpha|$.
   (b) En déduire que la suite $(x_n)_n$ est convergente et trouver sa limite.

Partie II : On se donne $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant $f(a) < 0, f(b) > 0$ et $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$.

1. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α appartenant à $]a, b[$.
   (b) Pour $x_0 \in [a, b]$, déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe de f en x_0.

   On s'intéresse dans ce qui suit à construire une suite $(x_n)_n$ d'éléments dans $[a, b]$ qui converge vers α comme l'illustre la figure suivante.



2. Pour tout $x \in [a,b]$, on pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
   (a) Justifier que $g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
   (c) Justifier qu'il existe $h > 0$, tel que, en notant $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait pour tout $x \in I, |g'(x)| < 1$.
   (d) Montrer que $g(I) \subset I$.
   (e) Justifier qu'il existe k dans $[0,1[$ tel que pour tout $x \in I, |g'(x)| \leqslant k$.
   (f) En déduire que pour tout $t \in I$ la suite $(x_n)_n$ définie par : $x_0 = t$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α.
   (g) On suppose de plus que $g \in C^2([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \neq \alpha$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \dfrac{g''(\alpha)}{2}$.

Problème 2 :

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(2n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie I : Le but de cette partie est de montrer que $f^{(n)}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Justifier que $f^{(2n)}$ est bornée sur un intervalle de la forme $]a,+\infty[$, avec $a > 0$.
   (b) Montrer alors que $f^{(2n)}$ est bornée sur $[0,+\infty[$. On pose ainsi : $M_{2n} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |f^{(2n)}(x)|$.
2. Soient $x \geqslant 0$ et $h > 0$.
   (a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ à la fonction f, montrer que :
   $$|f'(x)| \leqslant \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0.$$
   (b) En étudiant les variations de la fonction $\varphi : h \in]0,+\infty[\longmapsto \dfrac{h}{2}M_2 + \dfrac{2}{h}M_0$, montrer que pour tout $x \geqslant 0$,
   $$|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$
3. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée sur $[0,+\infty[$.

Partie II : Le but de cette partie est de discuter la limite éventuelle de la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $x > 0$. Soit $M_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |f^{(n)}(x)|$.

1. Montrer que si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors, pour tout $x > 0$,
   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x).$$
2. Peut-on trouver le résultat souhaité si (M_n) est non majorée ? expliquer la réponse tout en donnant des exemples.