Université de Sfax
IPEIS

Année universitaire : 2020-2021
MP1

Devoir de Synthèse N°2

Durée: 2 heures **Epreuve: Analyse** **Date: 11-06-2021**

Problème

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**.

Partie I : 11 points

On suppose dans cette partie que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 f(t)e^{ixt}dt.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$F(x) = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}dt.$$

   (b) Justifier que f et f' sont bornées sur $[0,1]$. On note $M = \sup\limits_{[0,1]} |f|$ et $M' = \sup\limits_{[0,1]} |f'|$.

   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $|F(x)| \leqslant \dfrac{2M + M'}{|x|}$.

   (d) Déduire les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de F.
3. Montrer que pour tous $a, x \in \mathbb{R}$ on a :

   (a) $|e^{ix} - e^{ia}| \leqslant |x - a|$.

   (b) $|e^{ix} - e^{ia} - i(x-a)e^{ia}| \leqslant \dfrac{|x-a|^2}{2}$.
4. (a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$|F(x) - F(y)| \leqslant |x - y| \int_0^1 t|f(t)|dt.$$

   (b) Déduire que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
5. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_p(x) = \displaystyle\int_0^1 t^p f(t)\, e^{ixt}dt$

   (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, F_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_p'(x) = iF_{p+1}(x)$, (**Ind.** utiliser la question (3)(b)).

   (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, F_p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_p^{(k)}(x) = i^k F_{p+k}(x)$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Justifier que F admet un développement limité à l'ordre n au voisinage zéro et donner ce développement, (**NB** : les coefficients seront exprimés sous forme d'intégrales en fonction de f).
   (b) Justifier que dans le cas où f est non identiquement nulle et garde un signe constant sur $[0,1]$ on a :
$$F(x) \underset{x\to 0}{\sim} \int_0^1 f(t)dt.$$
7. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que : $|F(x) - \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(itx)^k}{k!}\Big) f(t)dt| \leqslant \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.
   (b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(itx)^k}{k!}\Big) f(t)dt$.

Partie II : 6 points

On suppose dans cette partie que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(1-x)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$U_n(f) = \int_0^1 f(t)\sin^n(\frac{\pi}{2}t)dt, \quad V_n(f) = \int_0^1 f(t)\cos^n(\frac{\pi}{2}t)dt \quad \text{et} \quad \alpha_n = U_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sin^n(\frac{\pi}{2}t)dt.$$
Pour la simplicité, dans le reste de cette partie $U_n(f)$ et $V_n(f)$ seront notées U_n et V_n.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = V_n$.
2. Montrer que $U_n = O(\alpha_n)$.
3. Montrer que $\alpha_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$. (appelée intégrale de Wallis)
4. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\alpha_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\alpha_n.$$
6. Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\alpha_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$
7. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2(n+1)\alpha_n\alpha_{n+1} = \pi$.
8. Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$ et déduire que $\alpha_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
9. En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie III : 3 points

1. En justifiant que la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\exp\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp\Big(f(\frac{k}{n})\Big).$$
2. En déduire que $\exp(U_0(f)) \leqslant U_0(\exp \circ f)$.

Bon travail