Examen d'Algèbre - Semestre N°2
Sections : M.P.1

Durée : 2h

Date : 07 Juin 2021

Nbre de pages : 2

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (-2x + 5y - 2z, -3x + 6y - 3z, -x + y - z).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $A = \text{mat}(f, \mathcal{B})$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.
3. On considère les vecteurs suivants : $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (-1, 1, 3)$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (b) Déterminer la matrice P de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
 - (c) Ecrire $T = \text{mat}(f, \mathcal{B}')$.
 - (d) Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$ vérifiant $T = P^{-1}AP$.
4. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - (a) Déterminer les matrices D et N telles que D est diagonale, $N^2 = 0$ et $C = D + N$.
 - (b) Calculer C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. (a) Calculer P^{-1} .
 - (b) En déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n .

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle commutant de A toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AM = MA$, dont l'ensemble est noté $\mathcal{C}(A) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); AM = MA\}$.

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si $M, N \in \mathcal{C}(A)$ alors, $MN \in \mathcal{C}(A)$.
3. Montrer que si $M \in GL_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{C}(A)$, alors, $M^{-1} \in \mathcal{C}(A)$.

Partie II

Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$.

1. a) Montrer que $\mathcal{C}(D) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$: l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Donner une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et déduire la dimension de $\mathcal{C}(D)$.
c) Montrer que $\mathcal{B} = (I_n, D, \dots, D^{n-1})$ constitue une famille libre de $\mathcal{C}(D)$.
d) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{C}(D)$.
2. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A = PDP^{-1}$.
a) Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Montrer que $\varphi(\mathcal{C}(D)) = \mathcal{C}(A)$.
c) Déduire que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ constitue une base de $\mathcal{C}(A)$.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
a) Déterminer le rang de P puis déduire que P est inversible.
b) Sans calculer P^{-1} , vérifier que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$
c) En déduire $\mathcal{C}(A)$.