

<b>Examen d'Algèbre - Semestre N°2</b> <b>Section : M.P.1</b>
--

Durée : 2 Heures

Date : 16 Mai 2022

**Exercice 1(7 points)**

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  et  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$  sa base canonique. On désigne par  $id$  l'application identité de  $E$ . On note

Pour tout  $P \in E$ , on pose

$$u(P) = (X^2 + 5)P'' - (X + 1)P' - 3P.$$

où  $P'$  désigne le polynôme dérivé de  $P$  et  $P''$  le polynôme dérivé de  $P'$ .

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Ecrire la matrice  $A$  de  $u$  selon la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $E$ .
3. (a) Déterminer le rang de  $A$ .  
(b) En déduire les dimensions de  $\text{Im}(u)$  et  $\ker(u)$ .  
(c) L'endomorphisme  $u$  est-il un automorphisme?
4. Déterminer une base de  $\text{Im}(u)$ .
5. Soit  $Q_0 = X^3 - X^2 + 8X - 6$ .  
(a) Calculer  $u(Q_0)$ .  
(b) Déduire une base de  $\ker(u)$ .
6.  $\text{Im}(u)$  et  $\ker(u)$  sont-ils des sous-espaces supplémentaires de  $E$ ?

**Problème(13 points)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Un sous espace vectoriel  $F$  de  $E$  est dit stable par un endomorphisme  $f$  de  $E$  si :

Pour tout  $x \in F$ ,  $f(x) \in F$ . Ainsi, l'application

$$\begin{aligned}
 f_F : F &\longrightarrow F && \text{est un endomorphisme de } F. \\
 x &\longmapsto f(x)
 \end{aligned}$$

On se propose de résoudre l'équation

$$(\mathcal{E}) : (M - I_n)(M^2 + I_n) = (0) \text{ dans } M_n(\mathbb{R}).$$

On notera  $S$  l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$ .

On considère l'équation

$$(\tilde{\mathcal{E}}) : (f - id_E) \circ (f^2 + id_E) = \tilde{0} \text{ dans } \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E).$$

On notera  $\tilde{S}$  l'ensemble des solutions de  $(\tilde{\mathcal{E}})$ .

### Question préliminaire

Soit  $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ . Montrer que si  $F_1, \dots, F_k$  sont des sous espaces vectoriels de  $E$  stables par  $g$ , alors  $F_1 + \dots + F_k$  est stable par  $g$ .

### Partie I : Généralités sur les solutions

- (a) Montrer que tout  $A \in S$ ,  $A$  est inversible.  
(b) Montrer que si  $A \in S$  et  $B$  une matrice semblable à  $A$  alors  $B \in S$ .  
(c) Soit  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ , et  $A_f$  sa matrice selon une base de  $E$ .  
Justifier que  $f \in \tilde{S}$  si et seulement si  $A_f \in S$ .
- Soit  $f \in \tilde{S}$ .
  - Calculer  $(f^2 + id_E) - (f + id_E) \circ (f - id_E)$ .
  - Déduire que, pour tout  $x \in E$ ,  $x = \frac{1}{2}(f^2 + id_E)(x) - \frac{1}{2}(f - id_E)[(f + id_E)(x)]$ .
  - Montrer que  $\ker(f - id_E) \oplus \ker(f^2 + id_E) = E$ .
  - En déduire que  $\dim(\ker(f^2 + id_E)) = 0$  si et seulement si,  $f = id_E$ .

### Partie II : Etude des solutions où $\dim(\ker(f - id_E)) = 0$

- Soit  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$  telle que  $\dim(\ker(f - id_E)) = 0$ .  
Montrer que  $f \in \tilde{S}$  si et seulement si,  $f^2 = -id_E$ .

Dans toute la suite de cette partie  $f \in \tilde{S}$  et vérifiant  $\dim(\ker(f - id_E)) = 0$ .

- (a) Justifier que  $n$  est paire (Indication : calculer  $\det(f^2)$ ).  
On se propose dans la suite d'identifier de telles solutions.  
(b) Montrer que pour tout  $x \in E \setminus \{0_E\}$ , la famille  $(x, f(x))$  est libre.  
(c) Pour tout  $x \in E \setminus \{0_E\}$ , on note  $F_x = \text{vect}(x, f(x))$ . Montrer que  $F_x$  est un plan stable par  $f$ .
- On se propose de montrer qu'il existe  $x_1, \dots, x_p \in E \setminus \{0\}$ , ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) tels que

$$E = F_{x_1} \oplus \dots \oplus F_{x_p}.$$

- Montrer que pour tout  $x, y \in E \setminus \{0\}$ ,  $y \in F_x$  si et seulement si  $F_x = F_y$ .

(b) Dédurre que si  $y \notin F_x$ , alors  $F_x + F_y = F_x \oplus F_y$ .

(c) On suppose qu'on a des vecteurs  $x_1, \dots, x_q \in E \setminus \{0\}$ , tels que :

$$F_{x_1} + \dots + F_{x_q} = F_{x_1} \oplus \dots \oplus F_{x_q} \text{ et que } E \neq F_{x_1} \oplus \dots \oplus F_{x_q}, \text{ et soit } x_{q+1} \notin F_{x_1} \oplus \dots \oplus F_{x_q}.$$

Montrer que  $F_{x_{q+1}} \cap (F_{x_1} \oplus \dots \oplus F_{x_q}) = \{0_E\}$ .

(d) Soit  $I$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  tel qu'il existe  $x_1, \dots, x_k \in E \setminus \{0_E\}$  vérifiant

$$\sum_{i=1}^k F_{x_i} = F_{x_1} \oplus \dots \oplus F_{x_k}.$$

(i) Justifier que  $I$  est un ensemble non vide et majoré de  $\mathbb{N}$ . On note  $\max I = p$ .

(ii) Montrer que  $p = \frac{n}{2}$ . et que  $E = F_{x_1} \oplus \dots \oplus F_{x_p}$ .

(c) Justifier que  $\mathcal{B} = (x_1, f(x_1), \dots, x_p, f(x_p))$  est une base de  $E$  est donner la matrice de  $f$  dans cette base.

### Partie III : Solutions générales

Soit  $A$  une solution de  $(\mathcal{E})$ , et  $f$  un endomorphisme de matrice  $A$  dans une base arbitraire.

1. Montrer que  $G = \ker(f - id)$  et  $F = \ker(f^2 + id)$  sont stables par  $f$ .

2. Déterminer  $f_G$ .

3. Montrer que  $f_F - id_F$  est inversible et que  $\dim(F)$  est paire.

4. Dédurre qu'il existe  $x_1, \dots, x_p \in E \setminus \{0\}$ ,  $p \leq \frac{n}{2}$  tels que  $\mathcal{B}_F = (x_1, f(x_1), \dots, x_p, f(x_p))$  soit une base de  $F$ .

5. Soit  $\mathcal{B}_G = (u_1, \dots, u_q)$  une base de  $G$ . Montrer que  $\mathcal{B}_E = (u_1, \dots, u_q, x_1, f(x_1), \dots, x_p, f(x_p))$  est une base de  $E$  puis Donner la matrice de  $f$  relativement a cette base.

6. Soit  $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $\forall p \in \{0, \dots, [\frac{n}{2}]\}$ ,  $D_p = \begin{pmatrix} I_{n-2p} & & & \\ & R & & \\ & & \ddots & \\ & & & R \end{pmatrix}$

Montrer que

$$S = \bigcup_{p \in \{0, \dots, [\frac{n}{2}]\}} \{P^{-1}D_pP, P \in GL_n(\mathbb{R})\}$$