

**Devoir d'Algèbre - Semestre N°2**  
**Section : M.P.1**

Durée : 1 Heure 30 min

Date : Février 2023

**Exercice 1**

On se propose d'étudier la suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}[X]$  définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall n \geq 2, T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

1. (a) Calculer  $T_2$  et  $T_3$ .  
 (b) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  est de degré exactement  $n$  et si  $n \neq 0$  son coefficient dominant est  $2^{n-1}$ .
2. On rappelle que pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b)$ .  
 (a) Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ .  
 (b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que l'équation  $\cos(n\theta) = 0$  admet exactement  $n$  racines distinctes.  
 (c) Dédurre que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  est scindé à racines simples tous dans  $[-1, 1]$ .  
 (d) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant :  $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), \forall \theta \in \mathbb{R}$ .  
 Montrer que  $P = T_n$ . ( indication : l'application  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  est une bijection)
3. On rappelle que  $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq n\}$  et on se propose de montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X] = \text{vect}\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ .  
 (a) Montrer que  $\mathbb{R}_n[X]$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .  
 (b) Vérifier le résultat pour  $n = 0$ .  
 (c) On suppose que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X] = \text{vect}\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ .  
 i. Trouver le quotient de la division Euclidienne de  $X^{n+1}$  par  $T_{n+1}$ .  
 ii. Conclure.  
 (d) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $F = \{X^{n+1}P; P \in \mathbb{R}[X]\}$ .  
 i. Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .  
 ii. Montrer que  $\mathbb{R}[X] = \text{vect}\{T_0, T_1, \dots, T_n\} \oplus F$ .

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On cherche à expliciter le polynôme  $T_n$ .

(a)  $i$  étant le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ .

Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i^{2k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

(b)  $E(\alpha)$  désigne la partie entière du réel  $\alpha$  et  $C_n^p$  les coefficients binômiaux ( $0 \leq p \leq n$ ).

i. En remarquant que :  $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n]$ , exprimer  $\cos(n\theta)$  en fonction de  $\cos(\theta)$ .

ii. Dédire une expression de  $T_n(X)$ .

### Exercice 2

Pour tout polynôme  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_kX^k \in \mathbb{K}[X]$ , et pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , on note

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_kA^k.$$

On rappelle que  $A^0 = I_n$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k\text{-fois le } A}$ .

On note  $H = \{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\}$ .

- (a) Montrer que  $H$  est un sous espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $M_n(\mathbb{R})$ .

(b) Vérifier que pour tout  $k, k' \in \mathbb{N}$   $A^k A^{k'} = A^{k'} A^k$ .

(c) Dédire que pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ ,  $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$ .
- Soit  $P(X) = (X - 1)(X - 2)^2$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n$  désigne le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $P$ .

(a) Donner les valeurs possibles du degré de  $R_n$ .

(b) Justifier qu'il existe trois suites réelles  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n = a_nX^2 + b_nX + c_n$ .

(c) Trouver les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

(d) On suppose que  $A$  est une Matrice telle que  $P(A) = 0$ . Exprimer  $A^n$  en fonction de  $I_n, A$  et  $A^2$ .
- (a) Décomposer en éléments simples la fraction  $F(X) = \frac{1}{(X - 1)(X - 2)^2}$  dans  $\mathbb{R}(X)$ .

(b) Dédire qu'il existe deux polynômes  $U_0$  et  $V_0$  tels que

$$(X - 1)U_0(X) + (X - 2)^2V_0(X) = 1 \text{ avec } \deg(U_0) < 2 \text{ et } \deg(V_0) < 1.$$

(c) Résoudre dans  $\mathbb{R}[X]^2$  l'équation d'inconnues  $(U, V)$  :

$$(X - 1)U(X) + (X - 2)^2V(X) = 1$$

(d) Pour toute matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$ , montrer qu'il existe  $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que

$$(M - I_n)(aM^2 + bM + cI_n) + \lambda(M - 2I_n)^2 = I_n.$$