UNIVERSITÉ DE SFAX

Année universitaire : 2015/2016

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen d'algèbre - Semestre N°1

Sections : P.C.1 et P.T.1

Durée : 2h	Date : 04 Janvier 2016	Nbre de pages : 2

N.B : L'utilisation des calculatrices est interdite.

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $S(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx$.

1. Calculer $S(x)$ pour $x \in \pi\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $x \notin \pi\mathbb{Z}$.
   a) Montrer que : $2\sin x \cos 2kx = \sin\big((2k+1)x\big) - \sin\big((2k-1)x\big)$.
   b) En déduire que : $\cos^2 kx = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin\big((2k+1)x\big) - \sin\big((2k-1)x\big)}{4\sin x}$.
3. Déduire $S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soient E un ensemble non vide et $f : E \longrightarrow E$ une application.

1. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$A \mathcal{R} B \iff f(A) = f(B).$$

   a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
   b) Montrer que : f est injective $\iff Cl_{\mathcal{R}}(E) = \{E\}$.
2. On suppose que $f \circ f = f$. Montrer que :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Exercice 3

On désigne par : $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$,

$\mathbf{0}_3$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie I

Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence 3.

On définit l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = I_3 + tN + \dfrac{t^2}{2}N^2$.

1. Vérifier que $\varphi(t) \cdot \varphi(s) = \varphi(t+s)$, $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$.
2. En déduire que $(\varphi(t))^n = \varphi(nt)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\varphi(t)$ est inversible $\forall t \in \mathbb{R}$. Quel est son inverse.
4. a) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha N + \beta N^2 = \mathbf{0}_3$. Montrer que $\alpha = \beta = 0$.
   b) En déduire que φ est injective.
5. a) Montrer que N n'est pas inversible.
   b) En déduire que φ n'est pas surjective.

Partie II

Soient N et A deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que N est une matrice nilpotente et donner son indice de nilpotence.
2. Calculer $\varphi(2)$.
3. En déduire que A est inversible et trouver l'expression de A^{-1}.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $(S) \begin{cases} x + 2z & = & -1 \\ -2x - y & = & -2 \\ -2x - 2y + 3z & = & -3. \end{cases}$