Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Sfax

AU 2015-2016
1ère année PC

Examen de Physique de fin du 1er Semestre

(Durée : 2h30mn)

N.B: Il sera tenu compte de la présentation des copies.

Problème

L'espace physique est rapporté au repère absolu, supposé galiléen, $\mathcal{R}_O(OXYZ)$ muni de la base orthonormée directe $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$, avec l'axe OZ vertical ascendant.

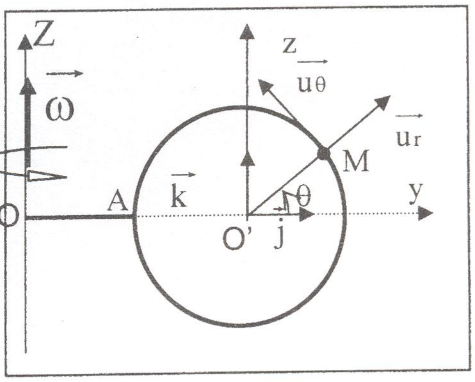
On considère une circonférence C de centre O' et de rayon a dans un plan vertical qui est solidaire d'un axe OZ à l'aide d'une tige horizontale OA (OA=a). On désigne par $\mathcal{R}(O'xyz)$ le repère relatif lié à la circonférence et muni de la base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k}=\vec{K})$. La circonférence et la tige OA tournent autour de OZ à la vitesse angulaire constante ω. $\vec{\omega}=\omega\vec{k}$ étant le vecteur rotation instantané.

On se propose d'étudier le mouvement d'un anneau de petite taille assimilé à un point matériel M qui glisse **sans frottement** sur la circonférence C située dans le plan vertical (yO'z).

La position de M est repérée par l'angle $\theta=(\vec{j},\overrightarrow{O'M})$ et par le vecteur $\overrightarrow{O'M}=a\vec{u}_r$.

On exprimera toutes les grandeurs vectorielles dans la base $\mathcal{B}$ ($\vec{i}$, $\vec{u_r}$, $\vec{u_\theta}$).

I. Etude cinématique



I.1. Quel est le mouvement du repère $\mathcal{R}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_O$?

I. 2. Exprimer les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base ($\vec{u_r}$, $\vec{u_\theta}$).

I.3. Déterminer les vecteurs vitesses relative $\vec{V}_r$ et d'entraînement $\vec{V}_e$ de M. Déduire la vitesse absolue $\vec{V}_a$ (M), du point M.

I.4. Déterminer les vecteurs accélération relative $\vec{\gamma}_r$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ du pont M.

Déduire le vecteur accélération absolue $\vec{\gamma}_a$(M), du point M.

II. Etude dynamique

II. 1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.

II. 2. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans le référentiel $\mathcal{R}$ et la projeter dans la base $\mathcal{B}$.

II. 3. En déduire l'équation différentielle du mouvement de M et les composantes de la réaction de la circonférence sur le point matériel M.

II. 4. En appliquant le théorème du moment cinétique au point O', retrouver l'équation différentielle du mouvement de M par rapport au repère $\mathcal{R}$.

II. Etude Energétique

III. 1. Donner l'expression du travail élémentaire de chaque force s'exerçant sur M.
III. 2. Montrer que les forces appliquées à M sont conservatives et calculer l'énergie potentielle E_p correspondante. On prendra $E_p(\theta=0) = 0$
III. 3. Déterminer l'énergie totale du mouvement du point M.
III. 4. Retrouver l'équation différentielle du mouvement de M, dans $\mathcal{R}$.

Exercice

Dans le plan xOy d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point M se déplace sur un cercle de rayon R et de centre I (R, 0, 0). A l'instant t = 0, P se trouve en A (2R, 0, 0) et possède la vitesse positive $\vec{v}_0\,(0, v_0, 0)$.

On désigne par ρ et θ les coordonnées polaires de P.

1. Montrer que $OP = \rho = 2R\cos(\theta)$, en déduire son équation cartésienne.
2. Représenter sur la figure la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ de P. Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes polaires des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ de P dans le repère $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.
3. Soit s l'abscisse curviligne de P (l'origine est en A).
   a. Donner l'expression de s en fonction de θ.
   b. Représenter sur la figure la base Frenet-Serret $(\vec{T}, \vec{N})$ de P.
   c. Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$ dans cette base.
   d. Calculer les composantes polaires de $\vec{T}$ et de $\vec{N}$. Retrouver dans ces conditions les composantes polaires de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$.