UNIVERSITÉ DE SFAX

A.U : 2015-2016

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

I.P.E.I.S

Examen d'Analyse - Semèstre N°1

Section : PC1 **Durée : 2heures** **N. de pages : 02**

N.B: L'usage de la calculatrice est **interdit**. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité. Donner l'expression de ce prolongement, qu'on notera g.
2. (a) Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer la derivée g' sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Étudier la dérivabilité de g en 0. En donner une interprétation graphique.
3. (a) Étudier la convexité de g sur $\mathbb{R}_+^*$. Vérifier que le graphe de g admet un point d'inflexion.
   (b) Déduire que g' admet un minimum. Conclure la monotonie de g sur $\mathbb{R}_+$.
4. (a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle que l'on précisera.
   (b) Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $g(x_k) = k$.
   (c) Donner la valeur de x_0.
   (d) On donne $\ln(2) \simeq 0.69$ et $\ln(3) \simeq 1.09$.
   Calculer $g(\frac{3}{2})$ et $g(2)$. Déduire un encadrement de x_1.
5. On définit la suite $(U_n)_n$ par $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ \forall\ n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases}$

   où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$.
   (a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Si on considère la restriction de φ à $]0, 2]$, que peut on dire de la monotonie des suites $(U_n)_n, (U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$?
   (b) Montrer que $[\frac{3}{2}, 2]$ est stable par φ.
   (c) Quelle est la monotonie de φ' sur $[\frac{3}{2}, 2]$? En déduire que $\forall\ x \in [\frac{3}{2}, 2]$, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$.
   (d) Montrer que le réel x_1 est l'unique point fixe de la fonction φ.
   (e) Montrer successivement que pour tout entier naturel n :
   i) $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$,

ii) $|U_{n+1} - x_1| \leq \dfrac{2}{9}|U_n - x_1|$,

iii) $|U_n - x_1| \leq (\dfrac{2}{9})^n$.

(f) En déduire la limite de la suite $(U_n)_n$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{dx}{ch^n(x)}$.

1. (a) Justifier que u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

   (b) Calculer la valeur de u_1, à l'aide du changement de variable $t = e^x$.

   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$(E) : y' + \frac{1}{ch(x)} y = x e^{-2\arctan(e^x)}.$$

2. (a) Vérifier que la suite $(u_n)_n$ est monotone.

   (b) Déduire que $(u_n)_n$ converge. On note ℓ sa limite.

3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ 1 + \dfrac{x^2}{2} \leq ch(x)$.

4. On admet que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \forall\, n \in \mathbb{N}$, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

   (a) Vérifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, ch^n(x) \geq 1 + n\dfrac{x^2}{2}$.

   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{dx}{1 + n\frac{x^2}{2}}$.

   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n}} \arctan(\sqrt{\dfrac{n}{2}} \ln(3))$. Déduire la valeur de ℓ.

Bon Travail