UNIVERSITÉ DE SFAX — A.U : 2015-2016

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Etudes
D'ingénieurs de Sfax

Devoir de Contrôle d'Analyse

Section : PC1 — **Durée : 1H30mn** — **N. de pages : 02**

N.B: La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

Soit f l'application définie par $f(x) = sh\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)$.

1. a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   b) Montrer que le graphe de f est invariant par la symétrie centrale S_Ω où Ω est un point à déterminer. Conclure.
2. a) Justifier que f est dérivable sur D_f puis Calculer sa dérivée f' .
   En déduire que f définit une bijection de D_f sur un ensemble J que l'on précisera.
   b) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
   c) Justifier que la bijection réciproque f^{-1} est une application dérivable sur J.
   d) Donner la valeur de $(f^{-1})'(0)$.
3. Soient $h : x \in]0, +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{1+2E(x)}$ où E désigne la fonction partie entière et g l'application définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $g(x) = (f^{-1}(x))^{h(x)}$.
   a) En utilisant la définition, montrer que g est strictement monotone (préciser le sens de monotonie).
   (Ind. Utiliser la monotonie des fonctions h, f^{-1}, ln, exp).
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ telque $|a|<1$, on pose

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1-acos(x)}.$$

1. Montrer que $I(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-acos(x)} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+acos(x)}$.

2. Montrer que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - acos(x)} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} Arctan\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right).$$

3. Montrer que $\forall x > 0, Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

4. Déduire que $I(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$.

Bon Travail