Université De Sfax
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2016-2017
Niveau : *PC1*

Devoir de Synthèse N° 1 : **Analyse**
Durée : 2H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage du calculatrice est interdit.

Exercice 1 : (**4 points**)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(\mathbf{E}): \quad \mathrm{ch}(x)y' + \mathrm{sh}(x)y = \frac{1}{1+x^2}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer l'unique solution de $(\mathbf{E})$, notée f_n, qui vérifie $f_n(0) = n$.
   (b) Soit
   $$A_n = \{x \in \mathbb{R}, \quad \text{tel que}: \quad \mathrm{ch}(x)f_n(x) \geq n\}.$$
   Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure et inférieure de A_n.

Exercice 2 : (**4 points**)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(\mathbf{E}): \quad y" + 2y' + 4y = xe^x.$$
2. Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et qui vérifie :
$$t^2 f"(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\ln(t).$$
   (a) Vérifier que $f(e^x)$ est une solution de $(\mathbf{E})$.
   (b) En déduire une expression de f.

Problème : (**12 points**)
Soit
$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right) - \dfrac{1}{x+1}$, $\forall x \in \Big]-\infty, -1\Big[\cup \Big]0, +\infty\Big[$.
3. Dresser le tableau de variations de f (avec les valeurs des limites aux bornes et les valeurs extrémales si elles existent).

4. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = 2.$

5. On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$v_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(v_n) = -\dfrac{\ln(w_n)}{n}\cdot$

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = f(n)\cdot$$

   (c) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et minorée par 1.

   (d) i. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leq x - \ln(1+x) \leq \dfrac{x^2}{2}\cdot$

   ii. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq 1 + \ln(w_k) - \ln(w_{k+1}) \leq \dfrac{1}{2k}\cdot$

   iii. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq n - \ln(w_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot$$

   (e) i. En utilisant le fait que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(1+\dfrac{1}{k})$, montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)\cdot$$

   ii. Déduire que $\ln(w_n) \sim n$.

   (f) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ et que $v_n = \dfrac{1}{e} + o(1)$.

6. (a) Montrer que les suites $(f(n))_{n\geq 2}$ et $(f(-n))_{n\geq 2}$ sont adjacentes.

   (b) En déduire que : $\forall n \geq 2$, on a :

$$f(n) \leq e \leq f(-n),$$

   puis déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=2}^{k=n} f(-k) = +\infty.$

7. (a) Montrer que : $\forall n \geq 1$, on a : $\prod\limits_{k=1}^{k=n} f(k) = w_n f(n).$

   (b) Déduire que : $\prod\limits_{k=1}^{k=n} f(k) = O(w_n).$

Bon Travail