UNIVERSITÉ DE SFAX

Année universitaire : 2016/2017

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen d'Algèbre N°1

Section : P.C.1

Durée : 2 h **Date : 15 décembre 2016** **Nbre de pages : 2**

N.B :

- *La qualité de la rédaction ainsi que le détail des calculs seront pris en compte dans la note.*
- *Calculatrices et documents sont non autorisés.*

Exercice 1 : (8,25 pts)

1. Soit $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4$.
   (a) Vérifier que (-1) est une racine de B et préciser son ordre de multiplicité.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B(X) = (X+1)^2 Q(X)$.
   (c) Déterminer $Q(X)$.
   (d) En déduire toutes les racines de B dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $A = X^6 - X^5 - 4X^4 - X^3 + \alpha X^2 + \beta X + 4$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer α et β pour que B divise A.
3. Soit $P = X^6 - X^5 - 4X^4 - X^3 + 5X^2 + 8X + 4$.
   (a) Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$.
   (b) Conclure.
4. Décomposer P en produit de polynômes irréductibles **dans** $\mathbb{C}[X]$ **puis dans** $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 : (11,75 pts)

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Partie I.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que :

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

Partie II.

On considère l'ensemble T défini par :

$$T = \big\{X \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que } f^{-1}\big(f(X)\big) = X\big\}.$$

1. Vérifier que $\emptyset \in T$.
2. Soit $(A, B) \in T^2$. Montrer que :
   (a) $A \cup B \in T$.
   (b) $A \cap B \in T$.
   (c) $\overline{A} \in T$.
3. En déduire que $A \cap \overline{B} \in T$, $\forall (A, B) \in T^2$.
4. Soit $A \in T$ et $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $A \cap f^{-1}\big(f(B)\big) = \emptyset$.
5. Montrer que $T = \mathcal{P}(E) \iff f$ est injective.

Partie III. Dans cette partie, on suppose que $E = F$.

On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

1. (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
   (b) Montrer que :
   $$f \text{ est injective } \iff \forall x \in E,\ Cl_{\mathcal{R}}(x) = \{x\}.$$
2. On prend $E = \mathbb{R}[X]$ et f définie par :
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto XP' - P. \end{aligned}$$
   (a) Calculer $f(0)$.
   (b) Montrer que : $f(P - Q) = f(P) - f(Q)$, $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.
   (c) En déduire que :
   $$f \text{ est injective } \iff Cl_{\mathcal{R}}(0) = \{0\}.$$
   (d) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.
      i. Montrer que $f(P) = \sum_{k=0}^{n} (k-1) a_k X^k$.
      ii. En déduire que :
      $$f(P) = 0 \iff P = a_1 X.$$
   (e) Déterminer alors $Cl_{\mathcal{R}}(0)$.
   (f) En déduire que f n'est pas injective.