Université De Sfax
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2016-2017
Niveau : *PC1*

Devoir de Contrôle N^o 1 : **Analyse**
Durée : 1H :30

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage du calculatrice est interdit.

Exercice 1 : **(3 points)**

1. Montrer que :

$$\cos(x) + x\tan(x) - 1 - \frac{x^2}{2} = o(x^2), \quad \text{au voisinage de } 0.$$

2. En déduire un équivalent simple au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos(x) + x\tan(x) - 1.$$

3. Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{\cos(x) + x\tan(x) - 1}{2\sin^2(x)}.$$

Peut-on prolonger g par continuité en 0?

Exercice 2 : **(9 points)**

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et considérons la fonction f défnie par :

$$f(x) = \ln\big(xa + (1-x)b\big) - x\ln(a) - (1-x)\ln(b)$$

1. Donner, Df, le domaine de dérivablité de f et calcuer f' sur Df.
2. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Df et que pour tout $n \geq 2$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(a-b)^n}{\big((a-b)x+b\big)^n}.$$

   (b) Justifier que f admet un développement limité au voisinage de 0 à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Trouver le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   (d) Donner l'équation de la tangente T à la courbe de f, $\mathcal{C}_f$, au point $A(0,0)$, ainsi que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T au voisinage de 0.
3. Montrer que

$$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}.$$

4. En déduire que $f'(0) > 0$ et que $f'(1) < 0$.
5. Montrer qu'il existe un **unique** point $x_0 \in]0;1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.
6. Etablir le tableau de variation de f sur $[0;1]$.
7. En déduire que pour tout $x \in]0;1[$,

$$\ln\big(xa + (1-x)b\big) > x\ln(a) + (1-x)\ln(b).$$

Exercice 3 : **(8 points)**
Soit

$$f_\alpha(x) = \sqrt{\alpha + 2x + x^2} - x\arccos\left(\frac{1}{x}\right),$$

où α est un paramètre réel.

1. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

   (b) En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$u \longmapsto \arccos(u).$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$u \longmapsto \sqrt{1 + 2u + \alpha u^2}.$$

3. Déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{f_\alpha(x)}{x}.$$

   (a) En déduire que la courbe représentative $\mathcal{C}_{f_\alpha}$ de f_α possède une asymptote Δ au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera.

   (b) Discuter suivant les valeurs de α la position relative de $\mathcal{C}_{f_\alpha}$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.

Bon Travail