UNIVERSITÉ DE SFAX | Année universitaire : 2016/2017

* * * * *

Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Sfax

Examen d'algèbre
Section : P.C.1

Durée : 2h | Date : 10 Mai 2017 | Nbre de pages : 2

Définitions et notations

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et à cœfficients réels.
- $\mathbb{R}_n[X]$: l'ensemble des polynômes à cœfficients réels et de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$.
- $0_{\mathbb{R}[X]}$: le polynôme nul.
- $id_{\mathbb{R}_n[X]}$: l'application identité de $\mathbb{R}_n[X]$.
- I_n : la matrice identité d'odre $n \in \mathbb{N}^*$.
- 0_n : la matrice nulle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
- Soient $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit le polynôme de la matrice M par :
$$P(M) = aM^3 + bM^2 + cM + dI_3.$$

Exercice

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot,\cdot \rangle : & \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \longmapsto & P(0)Q(0) + P(1)Q(1). \end{array}$$

1. Montrer que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Soient $P_1 = 1$ et $P_2 = X$. Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas orthogonaux dans $(\mathbb{R}_1[X], \langle \cdot,\cdot \rangle)$.

Problème

On désigne par : $\mathcal{B}$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit f une application définie par :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & (X+2)P' - P \end{array}$$

Partie A.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. (a) Déterminer la matrice $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

   (b) L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$? Justifier votre réponse.
3. (a) Montrer que $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{u\}$ où $u = X + 2$.

   (b) Déterminer une base $\{v, w\}$ de $\mathrm{Im}(f)$.
4. (a) Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

   (b) Déduire que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.

   (c) En déduire alors que $\mathcal{B}' = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. (a) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis P^{-1}.

   (b) Déterminer $N = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$.

Partie B.

On considère le polynôme P défini par :

$$P(X) = \det(M - XI_3).$$

1. Montrer que $P(X) = X - X^3$.
2. Montrer que :

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ est une racine de } P \Longleftrightarrow (f - \lambda id_{\mathbb{R}_2[X]}) \text{ n'est pas bijective .}$$

3. En déduire les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application $(f - \lambda id_{\mathbb{R}_2[X]})$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer $rg\big(f - 3id_{\mathbb{R}_2[X]}\big)$.
5. On pose $J = M - 3I_3$.

   (a) Montrer que le système $(S) : J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^3$.

   (b) Résoudre (S).

Partie C.

1. (a) Montrer que : $M(I_3 - M)(I_3 + M) = 0_3$.

   (b) Déduire que $P(M) = 0_3$. (Voir définitions et notations page 1).
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.

   (b) Déduire l'expression de M^n en fonction de M et M^2.

   (c) En déduire l'expression de N^n en fonction de P, M et M^2.