Université De Sfax
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2016-2017
Niveau : *PC1*

Devoir de Synthèse N° 2 : **Analyse**
Durée : 2H

Exercice 1: (3 points)
Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1; 2; ...; n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i, j) \in \{1; 2; ...; n\}^2$, on définit la loi conjointe du couple (X, Y) par:

$$P\Big[(X = i) \cap (Y = j)\Big] = \frac{a_n}{2^{i+j}}.$$

1. Calculer a_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2: (5 points)
Une urne contient une boule blanche. On lance une pièce truqué n fois. On obtient pile avec la probabilité p. Si on obtient pile, on ajoute à l'urne une boule noire. Si on obtient face on tire une boule de l'urne.
On considère la famille des évènements $\{A_1, \ldots, A_n\}$ telle que pour tout $1 \leq k \leq n$, A_k désigne l'évènement "obtenir face pour la première fois au k-ième lancer".
Soit B l'évènement "tirer une boule blanche".

1. Calculer les probabilités $P(A_k)$ et $P(B|A_k)$, avec $1 \leq k \leq n$.
2. Montrer que $P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{p^{k-1}(1-p)}{k}$.
3. En déduire que si la pièce est équilibré alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B) = \ln(2)$.
   (**Indication:** on pourra utiliser le fait que: $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}dx$).

Problème: (12 points)
Ce problème comporte 3 parties. Le but est d'étudier la nature de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$$

selon la valeur du réel α. On va admettre, sans le démontrer, que pour $\alpha = \frac{1}{2}$ la série diverge.

I) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

II) Dans cette partie, on prend $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Soit la fonction ϕ définie par: $\phi : t \in [1, +\infty[\longmapsto \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \phi(n) \quad \text{et} \quad v_n = \int_n^{n+1} \phi(t)\ dt.$$

1. (a) Montrer que pour $x > 1$,

$$\int_1^x \phi(t)dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}\ dy.$$

(b) En utilisant une intégration par partie, déduire que pour tout $x > 1$,

$$\int_1^x \phi(t)\ dt = 2\Big(-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}^{2\alpha-1}} - \frac{1}{\pi}\Big) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\ dy.$$

(c) En déduire que la fonction $\psi : x \longmapsto \int_1^x \phi(t)dt$ est bornée sur $]1, +\infty[$.

2. (a) Montrer que ϕ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et que pour tout $t \geq 1$,

$$\phi'(t) = \frac{\pi}{2t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\cos(\pi\sqrt{t}) - \frac{\alpha}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{\sqrt{t}}.$$

(b) Montrer que $u \mapsto \frac{\sin(\pi u)}{u}$ est bornée sur $[1, +\infty[$.

(c) En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que pour tout $t \geq 1$, on a:

$$|\phi'(t)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

(d) Montrer que pour tout $(a, b) \in [1, +\infty[^2$ tel que $a < b$, on a:

$$\Big|\phi(b) - \phi(a)\Big| \leq \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}|b - a|.$$

3. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la somme partielle $\sum_{n=1}^{p} v_n$ comme une intégrale.

   (b) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$.

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $u_n - v_n = \int_n^{n+1} (\phi(n) - \phi(t))dt$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\Big|u_n - v_n\Big| \leq \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

   (c) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1}(u_n - v_n)$.

5. Déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

III) Dans cette partie on suppose que $\alpha < \frac{1}{2}$.

On va montrer, par l'absurde, que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge. Supposons donc que cette série converge. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = n^{\alpha-\frac{1}{2}}\Big(S_n - S_{n-1}\Big).$$

2. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = (p+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\ S_p + \sum_{n=1}^{p}\big(n^{\alpha-\frac{1}{2}} - (n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\big)S_n.$$

3. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4. En déduire que $\sum_{n\geq 1}\big(n^{\alpha-\frac{1}{2}} - (n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\big)S_n$ converge.

5. Montrer que la suite $\big(S_p(p+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

6. En déduire une contradiction.

*** **Bon Travail** ***