

Devoir de Contrôle N° 1

- ☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Soient k, p et n trois entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$.

1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. Vérifier l'égalité suivante :

$$C_n^k \cdot C_k^p = C_n^p \cdot C_{n-p}^{n-k}.$$

3. Dédurre la somme

$$\sum_{p=0}^k C_n^p \cdot C_{n-p}^{n-k}.$$

Exercice 2

Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la somme suivante

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n k z^k.$$

1. Montrer que

$$(1-z)S_n(z) + n z^{n+1} = \sum_{k=1}^n z^k.$$

2. Dédurre que

$$S_n(z) = \frac{n z^{n+2} - (n+1) z^{n+1} + z}{(1-z)^2}.$$

3. Mettre le nombre complexe $S_n(e^{\frac{2i\pi}{n}})$ sous la forme algébrique.
4. Dédurre les sommes suivantes

$$\sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$