Université De Sfax
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2017-2018
Niveau : *PC1*

Devoir de Synthèse N° 1 : **Analyse**
Durée : 2H

N.B : **Aucun document n'est autorisé et l'usage du calculatrice est interdit.**

Exercice : On considère I l'intervalle $]-1,1[$ et l'équation différentielle suivante

$$(\mathbf{E}): \quad (1-x^2)y'' - xy' + 4y = \arccos(x)\cdot$$

1. En considérant la fonction z définie par $z(x) = y(\cos(x))$, montrer que y est solution de $(\mathbf{E})$ sur I si et seulement si z est solution de

$$(\mathbf{E1}): \quad z''(x) + 4z(x) = x, \quad x \in]0,\pi[.$$

2. Résoudre $(\mathbf{E1})$.
3. En déduire que f est solution de (E) sur $]-1,1[$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tels que

$$f(x) = \frac{1}{4}\arccos(x) + a(2x^2-1) + 2bx\sqrt{x^2-1}, \quad \forall x \in I.$$

Problème :

Partie I

1. Déterminer la borne inférieure et supérieure s'il existent des ensembles suivants :

$$A = \left\{\frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad B = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{k},\ n, k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

2. Montrer que : $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
3. En déduire que : $\forall n \geq 1$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ puis que : $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1)$.
4. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \geq 1$, on a : $\ln(n+1) \leq U_n \leq \ln(n) + 1$.
   (b) Déduire que $U_n \underset{\infty}{\sim} \ln(n)$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

5. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = U_n - \ln(n+1)$ et $b_n = U_n - \ln(n)$.
   (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note γ leurs limites commune.
   (b) Justifier qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers 0, telle que $U_n = \ln n + \gamma + c_n$.
6. Montrer que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} = \ln 2$.
7. Soit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n \geq U_n - U_2 + X_2$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$.

Partie II

On définit deux suites réelles $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ et } W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{V_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 + 3V_n + \dfrac{n(3n+5)}{2}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. (a) Déterminer a, b, c, tels que $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k+1} = U_{2n+1} - \dfrac{1}{2}U_n - 1$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} W_n$.

Partie III

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les suites extraites $(Z_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Z_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite l.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_{2n} = U_{2n} - U_n$.
4. Déterminer l.

Bon Travail