UNIVERSITÉ DE SFAX

Année universitaire : 2017/2018

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen d'Algèbre N°1

Sections : PC 1 - PT 1

Durée : 2h   Date : Décembre 2017   Nbre de pages : 2

N.B : L'utilisation des calculatrices est interdite.

Exercice 1 (4.5 pts)

On pose $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$
2. Soient d et n deux entiers naturels tels que d divise n.
   Montrer que u_d divise u_n.
3. Montrer que si u_n est premier, alors n est également un nombre premier.
4. Ecrire la division euclidienne de u_{n+1} par u_n, pour tout $n \geq 2$.
5. Déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n-1} sont premiers entre eux.

Exercice 2 (3.5 pts)

Soit E un ensemble non vide et $f : E \longrightarrow E$ une application. On considère la relation binaire $\mathfrak{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A \, \mathfrak{R} \, B \iff f^{-1}(A) = f^{-1}(B).$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Montrer que f est surjective $\iff Cl_{\mathfrak{R}}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Problème (12 pts)

Partie I :

Pour tout $n \geq 2$, on pose $P = (X+1)^n - X^n$.

1. Montrer que $\deg P = n - 1$ et donner son coefficient dominant.
2. Vérifier que 0 et -1 ne sont pas des racines de P.
3. Montrer que toutes les racines de P sont simples. *(On pourra raisonner par l'absurde).*
4. Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifiant $Z^n = 1$. Montrer que $Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, où $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
5. Déduire les racines de P. Ecrire ces racines sous forme algébrique.

Partie II :

Soit E un ensemble non vide et $f : E \longrightarrow E$ une application. On considère la relation binaire $\mathfrak{R}$ définie sur E par :

$$x \,\mathfrak{R}\, y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Montrer que f est injective $\Longleftrightarrow \forall x \in E. Cl_{\mathfrak{R}}(x) = \{x\}$.

Partie III :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. on pose $\mathbb{C}_n[X] = \{P \in \mathbb{C}[X] \colon \deg P \leq n\}$. On considère l'application

$$f : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}_n[X] : P \longmapsto P(X-1) - P(X).$$

1. (a) Donner $f(X^k)$, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
   (b) Montrer que, $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. $\deg f(X^k) \leq k - 1$.
   (c) Déduire que. $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$. $\deg f(P) \leq n - 1$.
   (d) En déduire que f n'est pas surjective.
2. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ vérifiant $P(X+1) = P(X)$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} P(j+1) - P(j)$ et déduire que $P(k) = P(0)$.
   (b) On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$.
      i. Montrer que Q est le polynôme nul.
      ii. Déduire que P est constant.
3. Montrer que $Cl_{\mathfrak{R}}(0) = \mathbb{C}_0[X]$. où $\mathbb{C}_0[X]$ désigne l'ensemble des polynômes constants et $\mathfrak{R}$ est la relation définie dans la Partie II.
4. A-t-on f injective? Justifer