Devoir de Synthèse N° 1

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Problème

(A) Soit $P = X^3 - 3X^2 + 4$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $X + 1$.
2. Déduire les racines de P et donner leur ordre de multiplicité.

(B) Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application qui à tout polynôme S associe le reste de la division euclidienne de S par P.

1. Déterminer $\varphi(P^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. L'application φ est-elle injective ?
3. Déterminer $\varphi^{-1}(\{X^7\})$.
4. L'application φ est-elle surjective ?
5. Montrer que $\varphi(E) = \mathbb{R}_2[X]$.

(C) On considère sur $\mathbb{R}[X]$ la relation binaire $\mathscr{R}$ définie par :

$$\forall (S,T) \in \mathbb{R}[X]^2,\ S \mathscr{R} T \Longleftrightarrow P \text{ divise } S - T.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $S \mathscr{R} T$;
   (b) $S(2) = T(2)$, $S'(2) = T'(2)$ et $S(-1) = T(-1)$;
   (c) $\varphi(S) = \varphi(T)$.
3. Soient S, T, U et V des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $S \mathscr{R} T$ et $U \mathscr{R} V$. Montrer que $SU \mathscr{R} TV$.
4. Soit $E = \{\mathrm{cl}(S) \mid S \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que l'application suivante

$$\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}_2[X],\ \mathrm{cl(S)} \longmapsto \varphi(S)$$

est une bijection.

? Exercice

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $G = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid f^{-1}(f(X)) = X\}$.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $X \subset f^{-1}(f(X))$.
2. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective ;
   (b) $\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$;
   (c) $G = \mathscr{P}(E)$.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) \in G$.
4. Soit $(X, Y) \in G^2$.
   (a) Montrer que $X \cup Y$ et $X \cap Y$ appartiennent à G.
   (b) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $A \cap X = \varnothing$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.
   (c) Déduire que $\overline{X}$ et $Y \backslash X$ appartiennent à G.
5. Montrer que l'application suivante

$$g : G \longrightarrow \mathscr{P}(f(E)),\ A \longmapsto f(A)$$

est une bijection.