Matière : Algèbre
Date : 03-11-2018

Section : PC 1
Durée : 1 heure

Devoir de Contrôle N° 1

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $a_n = 7^n + 1$.

1. Montrer que 8 divise a_n si n est impair.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de a_n par 8 lorsque n est pair.
3. Déduire $\operatorname{pgcd}(a_n, 8)$.
4. Déterminer $\operatorname{pgcd}(a_n, a_{n+1})$.

Exercice 2

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les sommes suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx).$$

1. Calculer les sommes
$$S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k.$$
2. Trouver deux réels r et θ tels que $1 + e^{ix} = re^{i\theta}$.
3. Déduire les sommes $A_n(x)$ et $B_n(x)$.
4. Retrouver les sommes S et T.
5. Calculer les sommes suivantes :
$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^2(kx) \qquad \text{et} \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin^2(kx).$$
6. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, exprimer la somme
$$S_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n} k^p C_n^k \sin(kx)$$
en fonction de $A_n(x)$ et $B_n(x)$.