Université De Sfax
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2018-2019
Section : PC1

Devoir de synthèse N° 1 : **Analyse** .
Durée : 2H

Aucun document n'est autorisé.

Exercice:

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$ on a: $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
On considére E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuent en 0 et qui vérifient la relation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)chx$.

1. (a) Montrer qu'au voisinage de 0 , $shx \sim x$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Déduire un équivalent de la suite $\left(2^n sh(\dfrac{x}{2^n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose dans cette question $f \in E$. on pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{sh(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
   (a) Vérifier que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh2x = 2shx\, chx$ puis que, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(2x) = \dfrac{g(x)}{2}$
   (b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \dfrac{g(\frac{x}{2^n})}{2^n}$.
   (c) En déduire que $f(x) = \dfrac{f(\dfrac{x}{2^n})}{2^n\ sh(\dfrac{x}{2^n})}\ shx$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\dfrac{x}{2^n})$. En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = f(0)\dfrac{shx}{x}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} a\dfrac{shx}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Montrer que $f \in E$.

Problème:

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On admet que $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Partie I:

1. Donner l'expression du terme général de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déduire un équivalent de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
3. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée? Justifier votre réponse.
5. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = \dfrac{U_{2n+1}}{U_{2n}}$.
   (a) Donner un équivalent de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Partie II:

On souhaite, dans la suite, chercher la limite de V_n par une autre méthode.
On définit la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $W_n = \dfrac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} = (-1)^n$.
2. Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Monter que les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note l leur limite commune.
4. Montrer que $l \geq 1$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = 1 + \dfrac{1}{V_n}$.
6. Déduire la valeur de l.

Bon travail