

Devoir de Contrôle N° 2



Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

? Exercice 1

1. On considère dans \mathbb{R}^3 l'ensemble suivant :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Déterminer une base de F .
2. Soit $G = \text{vect}(u, v)$ avec $u = (1, 7, 4)$ et $v = (3, 1, 0)$.
- (a) Déterminer une base de G .
 - (b) A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

? Exercice 2

On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (3x - 2y - 4z, x - 2z, x - y - z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. Déterminer l'endomorphisme f^2 .
5. Dédire que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.
6. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Montrer les égalités suivantes :
 - (a) $\ker(g \circ f) = \ker(f) \oplus (\ker(g) \cap \text{Im}(f))$.
 - (b) $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f) \cap (\ker(f) + \text{Im}(g))$.