Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax

Section : P C 1 — Matière : Algèbre

A. U. : 2019-2020 — Durée : 2 heures

Devoir de Synthèse N° 01

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. Montrer les équivalences suivantes :

1. f est surjective $\Longleftrightarrow \forall B \in \mathscr{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) = B$.
2. f est injective $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathscr{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) = A$.
3. f est bijective $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathscr{P}(E),\ f\left(\overline{A}\right) = \overline{A}$.

Exercice 2

Soient E un ensemble et f une application de E vers $\mathscr{P}(E)$. Montrer que f n'est pas surjective (Indication : on pourra s'intéresser à la partie $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$).

Problème:

(A) Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Considérons l'application suivante :

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^n.$$

1. Calculer $f(1)$ et $f(u)$.
2. L'application f est-elle injective ?
3. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) La restriction de f à $\mathbb{R}$ est injective ;
   (b) L'entier n est impair.
4. Montrer que f est surjective.
5. On considère sur $\mathbb{C}$ la relation binaire $\mathscr{R}$ définie comme suit :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \ z \mathscr{R} z' \Longleftrightarrow f(z) = f(z').$$

   (a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.
   (b) Déterminer $\mathrm{cl}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(B) Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2, $d = \text{pgcd}(n,p)$ et $m = \text{ppcm}(n,p)$.

Considérons les ensembles suivants :

$$S_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \quad \text{et} \quad S_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}.$$

1. Montrer que $n = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 1\right\}$.
2. Déduire que $S_n \subset S_p$ si et seulement si n divise p.
3. Montrer que $S_n \cap S_p = S_d$.
4. A-t-on $S_n \cup S_p = S_m$?
5. Soit $g : S_n \longrightarrow S_p$ une application telle que $g(zz') = g(z)g(z')$ pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.
   (a) Montrer que pour tout $(z,k) \in S_n \times \mathbb{Z}$, $\quad g(z^k) = g(z)^k$.
   (b) Déduire que g est injective si et seulement si $g^{-1}(\{1\}) = \{1\}$
   (c) Expliciter l'application f lorsque n et p sont premiers entre eux.

2 JAN 2020