Université De Sfax
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2019-2020
Section : PC1

Examen N^o 1 : **Analyse**
Durée : 2H

N.B: Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1:
Soient $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant le système différentiel:

$$(S) : \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + e^t \cos(t) \\ \\ y'(t) = x(t) + y(t) + e^t \sin(t) \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de résoudre ce système différentiel par deux méthodes.

1. Méthode 1 : Soit $z(t) = x(t) + iy(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $(S) \Longleftrightarrow (E1) : z'(t) = \alpha z(t) + e^{\alpha t}, \forall t \in \mathbb{R}$, où $\alpha = 1 + i$.
   (b) Déterminer les solutions complexes d'inconnue z de l'équation $(E1)$.
   (c) En déduire les solutions x et y du système différentiel (S).
2. Méthode 2 :
   (a) Démontrer l'équivalence:

$$(S) \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2e^t \cos(t) \quad (E2) \\ \\ x(t) = y'(t) - y(t) - e^t \sin(t) \end{cases}$$

   (b) Déterminer les solutions réelles de l'équation $(E2)$.
   (c) Retrouver ainsi les solutions x et y du système (S).

Exercice 2:

1. On pose $A = \{\sqrt{n} - E(\sqrt{n}); n \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Montrer que A admet un minimum, que vous préciserez.
   (b) Justifier que A admet une borne supérieure.

2. On cherche à déterminer la valeur de $\sup A$.

   (a) Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^\star, E(\sqrt{p^2-1}) = p-1$ puis que

   $$\forall p \in \mathbb{N}^\star, \sqrt{p^2-1} - (p-1) = \frac{-1}{\sqrt{p^2-1}+p} + 1.$$

   (b) Soit M un majorant de A, déduire de ce qui précède que $M \geq 1$.

   (c) Donner la valeur de $\sup A$.

Problème:

Soient $a \in]0,+\infty[$ et f la fonction définie par $f(x) = a(x + \frac{1}{x})$. On admet que $f(]a,+\infty[) \subset]a,+\infty[$.
Soit $u_0 \in]0,+\infty[$ fixé, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]a,+\infty[$.

   (b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite l vérifie une équation que l'on précisera puis déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors le réel a vérifie nécessairement une condition (à déterminer).

   (c) Si $1 \leq a$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

2. Dans cette question, on suppose $1 < a$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a^{-n}u_n$.

   (a) Calculer v_{n+1} en fonction de a, n et v_n.

   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_0$.

   (c) Soit $y_n = \sum_{k=0}^{n}(v_{k+1} - v_k)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

      i. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a^{-2k} \leq \frac{1}{1-a^{-2}}$ puis déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

      iii. En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Dans cette question, on suppose cette fois que $a = 1$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - \sqrt{2(n-1)}$.

   (a) Calculer u_{n+1}^2 en fonction de u_n^2. Montrer alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2n} < u_n$.

   (b) Pour $n \geq 1$, montrer que $\sqrt{2n} - \sqrt{2(n-1)} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

   (c) Déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.

   (d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

Bon Travail