Université De Sfax
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2020-2021
Niveau : *PC1*

Examen N° 2 : **Analyse**
Durée : 2H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 :

On considére la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_1^e x\ln^n(x)dx$.

1. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n.
   (b) Calculer I_0 et I_1.
2. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}dx$.
   (b) En remarquant que $x = \dfrac{x^2}{x}$ si $x \neq 0$, montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [1, e]$,
   $$x\ln^n(x) \leq e^2\frac{\ln^n(x)}{x}.$$
   (c) En déduire que $I_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$. Quelle est la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. (a) En procédant par intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n+1}{2}I_n$.
   (b) En déduire la valeur de I_2.
4. (a) Comparer $\ln^n(x)$ et $\ln^{n+1}(x)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1, e]$. En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq \dfrac{e^2}{n+3}$.
   (b) Quelle est la limite de $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \dfrac{(-1)^n n! e^2}{2^{n+1}}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2}\right)$.
   (b) Si $n \geq 3$, montrer que $\dfrac{n!}{2^n} \geq \dfrac{n}{4}$.
   (c) Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}$? Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-2)^n}{n!}$?

Exercice 2 :

On considére la fonction F définie par
$$\forall x > 0,\ \ F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt.$$
La courbe représentative de F sera notée $\mathcal{C}_f$.

1. (a) Montrer que F est bien définie et justifier que $F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en 1.
   (d) Déterminer le développement limité de F au voisinage de 1 à l'ordre 3.
2. Pour tout $x > 0$, montrer que $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. (a) On pose $\phi(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}, \forall x > 0$. Donner le développement limité de ϕ au voisinage de 0 à l'ordre 1.
   (b) Montrer que ϕ est prolongeable par continuité . On note aussi ϕ son prolongement. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
   (c) Montrer que $\displaystyle\int_1^x \phi(t)dt = \arctan(x)\ln(x) - F(x)$.
   (d) Montrer que F est prolongeable par continuité en 0 .On note aussi F son prolongement. Déterminer $F(0)$.
   (e) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ dont on précisera son équation.
   (f) Etudier la dérivabilité de F en 0. Conclure.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(t)t^k dt$.
   (a) Montrer que
$$I_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2}.$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, montrer que
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$, montrer que
$$|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)| \leq I_{2n+2}(x).$$
   (d) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} I_{2k}(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$. Quelle est donc la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$?

Bonne Chance