Université De Sfax
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2020-2021
Niveau : *PC1*

Devoir de Contrôle : **Analyse**
Durée : 1H

N.B : **Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.**

Exercice 1 : Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.
On suppose que $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ et $f'(x) < 0, \quad \forall x \in [a, b]$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$, que l'on notera c.
2. (a) Montrer qu'il existe $L > 0$, tel que $|f'(x)| \leq L, \quad \forall x \in [a, b]$.
   (b) Déduire que pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq L|x - c|$.
3. Justifier l'existence de réels m, M **strictement** positifs tels que
$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \geq m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M.$$
4. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et calculer sa dérivée.
   (b) Calculer $g(c)$.
   (c) Soit $x \in [a, b]$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que
$$|g(x) - c| \leq \frac{ML}{m^2}|x - c|^2.$$

Exercice 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x < 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$, où P_n est un polynôme.
4. Calculer $\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ puis déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Bonne chance