Université de Sfax
Institut Préparatoire aux
Etudes d'Ingénieurs de Sfax

A.U. 2020/2021
Section P. C.1

Devoir de synthèse d'Algèbre

Durée: 2 heures.

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$f(x,y,z) = (x+4y-4z, x, y).$$

(1) Ecrire la matrice A de f relativemant à la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soient $v_1 = (1,1,1), v_2 = (4,2,1)$ et $v_3 = (4,-2,1)$.

Montrer que $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) (a) Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.

(b) Calculer P^{-1} .

(4) (a) Ecrire la matrice D de f relativement à la base B'.

(b) Calculer D^n, $n \in \mathbb{N}$.

(5) En déduire l'expression de A^n, $n \in \mathbb{N}$ *à* l'aide de P, P^{-1} et D^n .

(6) Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_{n+3} & = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n \\ u_0 & = 1, u_1 = -3, u_2 = 1. \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$.

(b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes *à* coefficients réels de degré ≤ 5.

(1) On considère l'ensemble suivant
$$H = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$$

(a) Montrer que H est un sous espace vectoriel de E.

(b) Soit $P = a_5X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, où $a_0, a_1, .., a_5 \in \mathbb{R}$.

Justifier que si $P \in H$ alors

$$P = a_1(-X^5 + X) + a_2(-X^5 + X^2) + a_3(-X^5 + X^3) + a_4(-X^5 + X^4).$$

(c) Déterminer une base de H et en déduire sa dimension.

(d) Soit $G = vect(1, X^5 + 1)$.

Montrer que H et G sont supplémentaires dans E.

(2) Soit ϕ l'application défine sur E par

$$\phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$$

avec P' et P'' désignent respectivement le polynôme dérivé et dérivé seconde de P.

(a) Prouver que ϕ est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer $\phi(X^k)$, $k \in \{0, 1, .., 5\}$.

(c) Donner la matrice A de ϕ relativemant à la base canonique B de E.

(d) L'application ϕ est elle bijective? Justifier.

(e) Déterminer Im ϕ puis vérifier que $rg(\phi) = 5$.

(f) En déduire Ker $\phi = \mathbb{R}_0[X]$.