Université de Sfax | A.U. 2020/2021
Institut Préparatoire aux | Section P.C.1
Etudes d'Ingénieurs de Sfax

Devoir surveillé d'Algèbre N°2

Durée: 1 heure.

Exercice 1.

(1) On considère le polynôme $Q(X) = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^3 + 2X^2 - X$.

(a) Montrer que 0 et 1 sont deux racines de Q, préciser leurs multiplicités.

(b) Factoriser Q dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

(2) On pose $P(X) = 2X + 1$ et $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$.

(a) Donner la partie entière de F.

(b) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$, sans faire aucun calcul.

(c) Décomposer en éléments simples F dans $\mathbb{C}(X)$.

(d) En déduire la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 2.

Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. On considère l'ensemble

$F_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = (0)\}$ où (0) désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) (a) Justifier que si A est inversible alors $F_A = \{(0)\}$.

(b) Montrer que si $A = (0)$ alors $F_A = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(3) Montrer que si $A \neq (0)$ alors F_A ne contient aucune matrice inversible.

(4) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que $B \in F_A$.

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \in F_A$.

Déterminer les valeurs possibles des coefficients de M.

(c) Soit $G_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \right\}$.

(i) Montrer que G_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(ii) Montrer que F_A et G_A sont supplémentaires.