

Devoir de Synthèse N° 02



- ☞ Le sujet comporte deux pages.
- ☞ L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

Soient \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} f(1) = -1 + 2X + X^2 \\ f(X) = 2 - X^2 \\ f(X^2) = -4 + 4X + 3X^2 \end{cases}$$

1. Déterminer $A = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$ puis donner $\text{rg}(f)$.
2. Montrer que f n'est ni injectif ni surjectif.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$.
4. Soient $P_1 = -2 + X + X^2$, $P_2 = f(X)$ et $P_3 = f(X^2)$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Montrer que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.
 - (c) A-t-on f est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$?
 - (d) Déterminer la matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' .
 - (e) Déduire l'expression de la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.
 - (f) Déterminer $T = \text{Mat}(f, \mathcal{B}')$, puis calculer T^2 et T^3 .
 - (g) Déduire que (P_2, P_3) est une base $\text{Im}(f^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère f_α l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini comme suit :

$$f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (a, b, c) \longmapsto (a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha), -a \sin(\alpha) + b \cos(\alpha), c).$$

1. Déterminer A_α la matrice de f_α dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Déduire $f_\alpha \circ f_\beta$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. Trouver $(f_\alpha)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer $\text{rg}(f_\alpha)$.
5. Si f_α est un automorphisme de \mathbb{R}^3 , déterminer son inverse f_α^{-1} .

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension $n \geq 2$. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$ et $u \in E$.

1. Montrer que $E = F \oplus \text{vect}(u) \iff u \notin F$.
2. Déterminer $\dim(F \cap G)$.
3. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tel que $F = \ker(f)$.