Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax

Section : P C 1 | Date : 02-01-2023

Matičre : Algčbre | Durée : 2 heures

Devoir de Synthèse N° 01

- L'usage de calculatrices est interdit.
- Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Considérons dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et considérons sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ la relation binaire $\mathscr{R}$ définie comme suit :
$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})^2, \;\; X \mathscr{R} Y \quad \Longleftrightarrow \quad BX = BY.$$
   (a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $\det(A)$ puis vérifier que A est inversible.
   (c) Déduire $\mathrm{cl}(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ lorsque $B = A$
   (d) Résoudre le système linéaire suivant :
$$(S) : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$
   (e) Déduire $\mathrm{cl}(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ lorsque $B = 2\mathrm{I}_3 - A$.
2. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice M telle que $M^n = A$.

Exercice 2

Soient E, F et G trois ensembles non-vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer les assertion suivantes :
   (a) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
   (b) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
2. Montrer les équivalences suivantes :
   (a) f est injective $\Longleftrightarrow \forall\, A, A' \in \mathscr{P}(E),\ f(A) = f(A') \Longrightarrow A = A'$.
   (b) f est surjective $\Longleftrightarrow \forall\, B \in \mathscr{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Soit φ l'application définie comme suit :

$$\varphi : \mathscr{P}(E)^2 \longrightarrow \mathscr{P}(E),\ \ (X, Y) \longmapsto X \cup Y.$$

   (a) Déterminer $\varphi(E, \varnothing)$ et $\varphi(E, E)$.
   (b) L'application φ est-elle injective ?
   (c) Montrer que φ est surjective.
4. On suppose que $E = F$ et considérons ψ l'application suivante :

$$\psi : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)^2,\ \ X \longmapsto \big(f(X), f^{-1}(X)\big)$$

.

   (a) Montrer que si f est injective ou surjective, alors ψ est injective.
   (b) Monter que si ψ est surjective, alors f est bijective.
   (c) A-t-on l'application ψ est surjective lorsque f est bijective ?
   (Indication : On pourra considérer $f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.)
   (d) Montrer que si $\varphi \circ \psi$ est surjective, alors f est aussi surjective.
   (e) Déduire que si $\varphi \circ \psi$ est surjective, alors $f^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
   (f) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
      (i) L'application $\varphi \circ \psi$ est bijective.
      (ii) L'application f est bijective et $f^{-1} = f$.