IPEIS **Université De Sfax**
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2022-2023
Niveau : *PC1*

Devoir de Contrôle 1 : **Analyse**
Durée : 1H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 :

Pout tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \arccos\left(\dfrac{sh(x)}{ch(x)}\right)$.

1. Donner le domaine de dérivabilité de f puis calculer f'.
2. Dresser le tableau de variation de f puis montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un interval I qu'on déterminera.
3. Calculer pour tout $x \in I$, $f^{-1}(x)$.
4. Montrer que
$$\arccos\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right) + \arctan(sh(x)) = \frac{\pi}{2}.$$
5. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{sh(x)}{ch(x)} = \dfrac{5}{13}$.
6. En déduire la valeur de $\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) + \arctan\left(\dfrac{5}{12}\right)$.

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est de calculer par deux méthodes la valeur de l'intégrale
$$J = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

1. (a) Indiquer un intervalle I sur lequel la fonction tan réalise une bijection de I vers $\mathbb{R}$.
   (b) En effectuant le changement de variable $x = \tan(t)$, $t \in I$, montrer que $J = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}$.
2. Soit
$$K = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}.$$
   (a) En procédant par intégration par parties, montrer que $K = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}$.
   (b) Calculer $J + K$ puis déduire la valeur de J.