IPEIS Université De Sfax
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax
****

A.U : 2022-2023
Niveau : *PC1*

Devoir de synthèse N° 1 : **Analyse**
Durée : 2H

N.B :Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 :

Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ et on définit l'ensemble suivant :

$$A - B = \{a - b;\ (a, b) \in A \times B\}.$$

1. Montrer que l'ensemble $A - B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.
2. Montrer que : $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$ et $\inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B)$.
3. Soit l'ensemble $C = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{m};\ n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déduire $\sup(C)$ et $\inf(C)$.

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables qui vérifient l'équation différentielle :

$$(E) : \quad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dans les questions 1 et 2, on suppose que y est solution de (E) et on va chercher son expression de deux manières **indépendantes**.

1. **Par un changement d'inconnue.**
   (a) Vérifier que la fonction $y_0 : x \to x$ est solution de (E).
   (b) On va alors chercher y sous la forme $y(x) = y_0(x)z(x)$ avec z deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que z vérifie l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad z''(x) + \frac{1}{x} z'(x) = 0.$
   (c) Déterminer l'expression de z' sur $\mathbb{R}_+^*$ puis déduire l'expression de z sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (d) Procéder de même sur $\mathbb{R}_-^*$ et en déduire que y vérifie : $\begin{cases} \forall x > 0,\ y(x) = \lambda_1 x + \mu_1 x \ln(x), \\ y(0) = 0, \\ \forall x < 0,\ y(x) = \lambda_2 x + \mu_2 x \ln(-x), \end{cases}$
   où $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ et $\mu_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes qu'on ne cherchera pas à déterminer pour le moment.

2. **Par un changement de variable**. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Vérifier que z est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que z vérifie l'équation différentielle (E') : $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0$.
   (b) Résoudre (E') et en déduire que $\exists(\lambda_1, \mu_1) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ y(x) = \lambda_1 x + \mu_1 x \ln(x)$.
3. **Synthèse**. On reprend alors l'expression de y de la question 1.d et on cherche pour quelles valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ et μ_2 la fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour avoir y dérivable en 0, alors on doit avoir $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\lambda_1 = \lambda_2$.
   (b) En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 3 :</u>

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $\begin{cases} U_0 = a > 0, \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{3}{U_n}\right). \end{cases}$

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$.

1. (a) Etudier les variations de f et déterminer le signe de $f(x) - x$ selon les valeurs de x.
   (b) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq \sqrt{3}$.
   (c) Déterminer la monotonie de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (d) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = \dfrac{U_n - \sqrt{3}}{U_n + \sqrt{3}}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n^2$.
   (b) Exprimer V_n en fonction de V_0 et de n.
   (c) Retrouver le fait que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ainsi que sa limite.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = U_n - \sqrt{3}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq e_{n+1} \leq \dfrac{e_n^2}{2\sqrt{3}}$.
   (b) En déduire une majoration de e_n en fonction de e_1 et de n.

Bonne Chance