UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2016/2017

Devoir de contrôle d'algèbre N°1
Sections : P.C.1/P.T.1

Durée : 1,5 h **Date : 18 octobre 2016** **Nbre de pages : 2**

N.B :

- *La qualité de la rédaction ainsi que le détail des calculs seront pris en compte dans la note.*
- *Calculatrices et documents sont non autorisés.*
- *Le sujet comporte deux pages.*

Exercice 1

Soient $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 - i$ deux nombres complexes.

1. Trouver la forme algébrique puis la forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.
3. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue réelle x :

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) = 2.$$

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sin(\frac{x}{3^k}) = 3\sin(\frac{x}{3^{k+1}}) - 4\sin^3(\frac{x}{3^{k+1}}).$$

3. En déduire alors que :

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3(\frac{x}{3^{k+1}}) = \frac{3^{n+1}}{4}\sin(\frac{x}{3^{n+1}}) - \frac{1}{4}\sin(x).$$

Exercice 3

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $n^2 + n$ est divisible par 2.
2. En déduire que 6 divise $n^3 + 5n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^j$.

1. Montrer que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
2. Démontrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)2^k$.
3. Déduire à l'aide d'un changement d'indice que : $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.
4. Déterminer alors la valeur de $T_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j+1} k2^{k-1}$.

**** Bonne Chance ****