UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2016/2017

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N°1
Section : P.T.1

Durée : 2h **Date : 13 Décembre 2016** **Nbre de pages : 2**

Exercice

1. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, et on définit l'ensemble suivant :

$$A - B = \{a - b;\ (a, b) \in A \times B\}.$$

   (a) Montrer que $A - B$ admet des bornes supérieure et inférieure.

   (b) Montrer que : $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$ et $\inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B)$.

2. Soit F l'ensemble défini par : $F = \left\{\frac{n}{2^n} - \frac{1}{m};\ (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$

   (a) Montrer que la suite $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (b) Montrer que F est borné.

   (c) Calculer $\inf(F)$ et $\sup(F)$.

Problème

On se donne dans ce problème un réel $x > 0$ et la suite récurrente $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} X_0 = x, \\ X_{n+1} = f(X_n),\ \forall n \in \mathbb{N},\ avec\ f(t) = \sqrt{t}. \end{cases}$$

Partie 1

1. On suppose dans cette question que $x \geq 1$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \geq 1$.

   (b) Vérifier que : $\forall a \geq 1$ et $\forall b \geq 1$, on a $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$.

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |X_n - 1| \leq \frac{1}{2^n}|x - 1|$.

   (d) En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

2. On suppose dans cette question que $x < 1$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \in]0,1[$.

(b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Partie 2

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant :

$$\begin{cases} U_n = 2^n(X_n - 1),\ \forall n \in \mathbb{N}; \\ V_n = 2^n(1 - \dfrac{1}{X_n}),\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Vérifier que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies.
2. Montrer que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n \leq U_n$.
4. En déduire que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n - U_n = (1 - X_n)V_n$.
6. (a) Déduire que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite L et montrer que : $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(U_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(V_n)$.

   (b) Calculer U_0 et V_0 en fonction de x.

   (c) En déduire que : $\dfrac{x-1}{x} \leq L \leq x - 1$.

   (d) Vérifier l'équivalence suivante : $x \neq 1 \Leftrightarrow L \neq 0$.
7. Montrer que si $x \neq 1,\quad X_n - 1 \sim \dfrac{L}{2^n}$.