

DEVOIR DE CONTRÔLE

Exercice I:

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $W = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

1. On note $U_n = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$.
 - a. Exprimer les z_k en fonction de $W, 0 \leq k \leq n - 1$.
 - b. Montrer que $S = \sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.
2. On pose $A = 1 + 2W + 3W^2 + \dots + nW^{n-1} = \sum_{k=1}^n kW^{k-1}$.
 - a. Calculer $(1 - W)A$.
 - b. Dédurre A .

Exercice II:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on définit $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$.

1. Donner les expressions de $S_0(n), S_1(n)$ et $S_2(n)$.
2.
 - a. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $T_n = \sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4)$.
 - b. En déduire la valeur de $S_3(n)$.
3.
 - a. Montrer que $\sum_{k=p}^n C_k^p = C_{n+1}^{p+1}, \forall n \geq p$, pour p un entier naturel fixé.
 - b. Calculer $6C_{k+1}^3 + k$, pour $k \geq 1$.
 - c. Retrouver alors la valeur de $S_3(n)$.
4. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme double $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (3^i - j)$.

Bon travail