Université de SFAX **2019-2020**
IPEIS : PT1 **Algèbre**

Devoir de contrôle n 2

Exercice I:

On définit sur $\mathbb{R}^3$ les ensembles : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \;\; x - y - z = 0\}$ et $G = vect((0, 1, 1))$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $dim(F)$.

3. Déterminer $dim(F + G)$.

Exercice II:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application ;

$$\begin{array}{rccc} f \; : & \mathbb{R}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & (n+1)P(X) - XP'(X) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Soit $B = (1, X, X^2, ..., X^n, X^{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
  a. Déterminer $f(B)$.
  b. Déduire que f est surjective.

3. Rappeler la formule du rang.

4. Donner une base de $ker(f)$.

Exercice III:

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que :

$$(f + Id_E) \circ (f - Id_E) = 0.$$

1. Montrer que f est bijective et donner f^{-1}.

2. Montrer que : $E = Im(f + Id_E) \oplus Im(f - Id_E)$. (ind : Si $x \in E$: $x = \frac{f(x)+x}{2} - \frac{f(x)-x}{2}$).

3. Montrer que : $ker(f + Id_E) \cap ker(f - Id_E) = \{0\}$.

4. Déterminer $dim(ker(f + Id_E)) + dim(ker(f - Id_E))$. (ind : utiliser (**2.**) et la formule du rang.)

5. Déduire que : $ker(f + Id_E) \oplus ker(f - Id_E) = E$.

Barème
Ex1 :5 points (1,2,2)
Ex2 :9 points (2,2,2,1,2)
Ex3 :6 points (1,1,1,2,1)

..........**Bon Travail**..........