UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2019/2020

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre 2
Section : P.T.1

Durée : 2h | Date : 2 juillet 2020 | Nbre de pages : 2

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Partie 1

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que la fonction f est continue en 0.
3. Montrer que la fonction f est dérivable en 0.
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, 1[$.
5. Etudier les variations de f.

Partie 2 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$U_0 = 3 \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{U_n}{\ln(U_n)}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \geq e$.
2. En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que pour tout $x \geq e$, on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
4. Enonçer le théorème des accroissements finis.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$| U_{n+1} - e | \leq \frac{1}{4} | U_n - e | .$$
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$| U_n - e | \leq \frac{1}{4^n}.$$
7. Conclure $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité à gauche et à droite de f en 0.
2. Vérifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = \frac{1 - 2x}{x^4}\, e^{\frac{-1}{x}}.$$
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}\, e^{\frac{-1}{x}} \qquad \text{et que}$$
$$P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + [1 - 2(n+1)x] P_n(x).$$
5. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 f(x)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n+1)} = f^{(n)}$.
6. En appliquant la formule de Leibniz pour la fonction g, montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$
$$P_{n+1}(x) = [1 - 2(n+1)x] P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x).$$
7. En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.
8. Conclure que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$
$$x^2 P_n''(x) + (1 - 2nx) P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) = 0.$$