UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2021/2022

Devoir de contrôle d'Analyse Semestre 1

Section : P.T.1

Durée : 1h **Date : 19 octobre 2021** **Nbre de pages : 1**

L'objectif est d'étudier la fonction $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}\right)$.

Partie 1

I Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$.

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit D_1 le domaine de dérivabilité de g. Déterminer D_1 et montrer que

$$\text{pour tout } x \in D_1, \quad g'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{2}\sqrt{1+\sin x}}.$$

II 1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) Montrer que f est périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que la courbe de f admet $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.
   c) Justifier qu'on peut restreindre l'étude de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Soit D_2 le domaine de dérivabilité de f. Déterminer D_2 et montrer que

$$\text{pour tout } x \in D_2, \quad f'(x) = \frac{\cos x}{2|\cos x|}.$$

4. Trouver une expression simple de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis la déduire sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
5. Tracer la courbe de f sur deux périodes.

Partie 2

On propose de simplifier l'expression de f d'une autre manière.

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \sin x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.
2. Déduire une simplification de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.