Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax

Sections : PC1 - PT1 | Date : 23-10-2021

Matičre : Algčbre | Durée : 1 heure

Devoir de Contrôle N° 01

- L'usage de calculatrices est interdit.
- **Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.**

Exercice 1

Considérons dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice $A^3 - 5A^2 + 3A$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Déduire la résoluation du système linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 4 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

4. Retrouver la solution du système (S) en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 2

Soient n, p et s trois entiers naturels non nuls tels que $p \leq s \leq n$.

1. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.
2. Comparer $C_n^s C_s^p$ et $C_n^p C_{n-p}^{s-p}$.
3. Calculer la somme $\sum_{k=p}^{n} (-1)^{k+p} C_n^k C_k^p$.
4. Considérons dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ définies par :

$$a_{ij} = C_{j-1}^{i-1} \quad \text{et} \quad b_{ij} = (-1)^{i+j} C_{j-1}^{i-1} \quad \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2.$$

   (a) Montrer que A est inversible et $A^{-1} = B$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (x-1)^k \qquad \text{et} \qquad T(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} C_{n-1}^k x^k.$$

   (c) Retrouver la matrice A^{-1}.