UNIVERSITÉ DE SFAX

Année universitaire : 2021/2022

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N°1

Section : P.T.1

Durée : 2h | **Date : 16 Décembre 2021** | **Nbre de pages : 2**

Exercice 1

On se propose de résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) : x^2y'' + xy' = \frac{1 + \ln(x)}{x}.$$

1. Par une intégration par partie, déterminer sur $]0, +\infty[$ la primitive de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$$

.

2. Déterminer l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E') : x^2z' + xz = \frac{1 + \ln(x)}{x}.$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2

Soit α un réel strictement positif et $\frac{1}{A}$ l'ensemble défini par :

$$\frac{1}{A} = \left\{\frac{1}{a} : \ a \in A\right\}.$$

avec A une partie non vide de $]0, \alpha]$.

1. Vérifier que A admet une borne supérieure non nulle.
2. Montrer que $\frac{1}{A}$ admet une borne inférieure et que $\inf\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\sup(A)}$.

Problème

On se donne dans ce problème la suite récurrente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in [-1, +\infty[, \\ U_{n+1} = f(U_n), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ avec\ f(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

Partie 1

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur $[-1, +\infty[$.
3. En cas de convergence, quelles sont les limites possibles de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Si $U_0 = 0$ ou $U_0 = 2$, que peut-on dire de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Etudier sur $[-1, +\infty[$ le signe de la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$.

Partie 2

Dans cette partie, on suppose que $U_0 \in [-1, 0[$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \in [-1, 0[$.
2. Montrer que (U_n) est convergente.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Partie 3

Dans cette partie, on suppose que $U_0 \in]0, 2[$.

1. Trouver la monotonie de de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire que (U_n) est convergente.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Partie 4

Dans cette partie, on suppose que $U_0 > 2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \in]2, +\infty[$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire la nature de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver sa limite.