Section : PC1-PT1 Matière : Algèbre

A. U. : 2021-2022 Durée : 2 heures

Devoir de Synthèse N° 01

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Soient E un ensemble non-vide et A une partie de E. On considère les deux applications suivantes :

$$f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E),\ X \longrightarrow (A \cup X, A \cap X).$$

$$g : \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E),\ (X, Y) \longmapsto X \setminus Y = X \cap \overline{Y}.$$

1. L'application f est-elle surjective ?
2. Déterminer $g(X, \overline{X})$ pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$.
3. L'application g est-elle surjective ?
4. Déterminer $g(\varnothing, E)$ et $g(\varnothing, \varnothing)$.
5. Que peut-on en déduire à propos l'injectivité de g ?
6. Montrer que $(g \circ f)^2 = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$.
7. Prouver que $g \circ f$ est bijective et déterminer sa réciproque.
8. En déduire que f est injective.

Exercice 2

Soient a, b et c trois entiers naturels tels que a et b sont premiers entre eux.

1. Montrer que $\mathrm{pgcd}(a, bc) = \mathrm{pgcd}(a, c)$.
2. Montrer que $\mathrm{pgcd}(ab, c) = \mathrm{pgcd}(a, c)\mathrm{pgcd}(b, c)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n. Montrer que l'application f définie comme suit

$$f : \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b) \longrightarrow \mathcal{D}(ab),\ (p, q) \longmapsto pq$$

est une bijection.

Problème:

(A) Pour tout P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, considérons l'application suivante :

$$f_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \longmapsto PMP^{-1}.$$

1. Déterminer l'application f_{I_n}.
2. Montrer que pour tous $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $f_P \circ f_Q = f_{PQ}$.
3. En déduire que f_P est bijective et $(f_P)^{-1} = f_{P^{-1}}$.
4. Considérons sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la relation binaire $\mathscr{R}$ définie comme suit :

$$\forall P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ P\mathscr{R}Q \Longleftrightarrow f_P = f_Q.$$

   (a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Déterminer $\mathrm{cl}(P)$, pour tout P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(B) Considérons dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(P)$. Déduire que P est inversible.
2. Déterminer P^{-1} puis $f_P(A)$.
3. Montrer que pour tous $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f_P(MN) = f_P(M)f_P(N)$.
4. En déduire $f_P(A^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par la donnée de leurs premiers termes

$$x_0 = y_0 = z_0 = 2.$$

   et par le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + 4z_n \end{cases}$$

   Notons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Déduire que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.