
Durée: 3 H **Epreuve: Mathématiques**

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clartée et aussi à la présentation.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Cette épreuve comporte deux problèmes indépendents. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Problème 1

Dans tout le problème on se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée (e_1, e_2, e_3). On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et les matrices de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
Dans ce problème, on étudie une situation probabiliste faisant intervenir une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$. Ensuite on détermine les puissances successives de A. Enfin, dans la dernière partie, on calcule la moyenne d'une variable aléatoire discrète. Les parties du problème peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.

Partie I

En cas d'incident et sans intervention d'un technicien, un système électrique se trouve dans un des trois états suivants :
– état E_1 : premier type d'incident non critique.
– état E_2 : second type d'incident non critique.
– état E_3 : incident critique. Le système est définitivement à l'arrêt.
Dans une telle situation, son état est, à chaque heure, susceptible d'évoluer et de passer d'un état à un autre. Pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on note $a_{i,j}(1)$ la probabilité de passer de l'état E_j à l'état E_i au bout d'une heure. Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On a les probabilités suivantes :

$$a_{1,1}(1) = a_{2,2}(1) = p \qquad a_{2,1}(1) = a_{3,2}(1) = q\ .$$

1. On appelle instant initial l'instant où le système subit un premier incident. On suppose qu'à l'instant initial le système est dans l'état E_1.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit encore à l'état E_1 au bout de trois heures ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il soit à l'état E_3 au bout de trois heures ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il soit à l'état E_3 en exactement trois heures ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note u_k (respectivement v_k et w_k) la probabilité que le système soit dans l'état E_1 (respectivement E_2 et E_3) au bout de k heures.
   (a) En faisant l'arbre des choix entre l'instant k heures et l'instant $k+1$ heures, démontrer que $\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) On note $A^k(a_{i,j}(k))_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$. Interpréter alors le coefficient $a_{i,j}(k)$ pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$.

Partie II

1. (a) Montrer que 1 et p sont les seules valeurs propres de la matrice A.
   (b) Déterminer les sous espaces propres associés.
   (c) A est elle inversible ? diagonalisable ?

2. (a) Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ kqp^{k-1} & p^k & 0 \\ a_k & 1-p^k & 1 \end{pmatrix}$, où a_k est un coefficient vérifiant la relation : $a_{k+1} = a_k + kq^2p^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
   (Indication : on fait le produit matriciel $A.A^k$)
   (b) Montrer que $a_k = 1 - kp^{k-1} + (k-1)p^k$.
   (c) Déduire pour $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$ la convergence de $(a_{i,j}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ vers un réel $l_{i,j}$. On dit que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est la matrice $L = (l_{i,j})$.

Partie III

On rappelle que p désigne un réel de $]0,1[$ et que $q = 1-p$.

1. Sans justification, rappeler la nature de la série $\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)p^{k-2}$ et en donner sa somme.
2. On suppose que le système est dans l'état E_1 à l'instant initial et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre exact d'heure(s) pour que le système atteigne l'état E_3.

   (a) Démontrer que : $P(X=0)=0$, $P(X=1)=0$ et $P(X=2)=q^2$.
   (b) a_k désignant le coefficient introduit dans la partie A, justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X=k) = a_k - a_{k-1}.$$

   (c) En déduire que $E(X) = \frac{2}{q}$.

Problème 2

Soient $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $k \in \{1,...,p\}$.
Si X est une variable aléatoire à densité on note F_X sa fonction de répartition, f_X une densité de X et $\overline{F}_X$ la fonction définie par $\overline{F}_X(t) = 1 - F_X(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

On considère p variables aléatoires $X_1, ..., X_p$ mutuellement indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre λ.

1. (a) Rappeler la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$. Etablir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $I_n = n\, I_{n-1}$.
   En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
   (c) Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda t^n e^{-\lambda t}dt$ coverge et que :

$$\int_0^{+\infty} \lambda t^n e^{-\lambda t}dt = \frac{n!}{\lambda^n} \qquad \forall n \in \forall\mathbb{N}$$

2. On note $Y_p = \min(X_1, ..., X_p)$.

   (a) Montrer que $\overline{F}_{X_1}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

   (b) Démontrer que $\overline{F}_{Y_p}(t) = \begin{cases} e^{-p\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

   (c) En déduire que Y_p suit une loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.

   (d) Exprimer $E(Y_p)$ et $V(Y_p)$ en fonction de λ.

3. On prend $p = 2$ et on suppose que la moyenne de X_1 est égale à 2. Calculer alors les probabilités suivantes : $P(X_2 \leqslant 2)$, $P(Y_2 \leqslant 1/X_2 \geqslant 2)$ et $P(Y_2 \leqslant 1/X_2 \leqslant 2)$.

4. On note $Z_2 = \max(X_1, X_2)$.

   (a) Montrer que la variable aléatoire Z_2 admet une densité que l'on exprimera à l'aide de densités des lois exponentielles.

   (b) Calculer $E(Z_2)$ et démontrer que $E(Y_2) + E(Z_2) = E(X_1 + X_2)$.

   (c) Justifier l'existence de $V(Z_2)$ et la calculer.

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   Démontrer que la variable aléatoire $aX_2 + b$ admet une densité définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{aX_2+b}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} & \text{si } t \geqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On admet que les variables aléatoires X_1 et $aX_2 + b$ sont indépendantes.

6. On note $T = X_1 + aX_2 + b$ et on rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f_X et f_Y alors $X + Y$ est une variable aléatoire dont la densité est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt.$$

   Démontrer que T admet une densité définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_T(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-a}\left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)}\right) & \text{si } x \geqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$