Devoir de contrôle N°2

Durée: 1h30mn **Epreuve: Mathématiques** **Date: 21-02-2017**

Exercice 1

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires.
On tire au hasard, successivement et sans remise, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Préciser l'univers Ω et la probabilité P que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience.
2. Soit i et j deux entiers entre 1 et N. Montrer que l'on a :

$$P(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N. \end{cases}$$

3. Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?
4. (a) Démontrer que la variable $N+1-X_2$ a même loi que X_1.
   (b) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.
5. A l'aide des résultats de la question 4 :
   (a) Montrer que : $E(X_2) = 2E(X_1)$ et $E(X_1) = \frac{N+1}{3}$.
   (b) Montrer que : $V(X_1) = V(X_2)$.
   (c) Etablir la relation : $2Cov(X_1, X_2) = V(X_1)$
   où $Cov(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2.
6. (a) Montrer, pour tout entier naturel non nul n, les égalités suivantes :
   $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   (b) Calculer $V(X_1)$; en déduire $V(X_2)$ et $Cov(X_1, X_2)$.

Exercice 2 :

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On suppose que X, Y et Z suivent toutes les trois la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$.

1. (a) Montrer que, pour tout k de $\{2, ..., n+1\}$:

$$P(X + Y = k) = \frac{k-1}{n^2}.$$

   (b) Montrer que, pour tout k de $\{n+2, ..., 2n\}$:

$$P(X + Y = k) = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

   Indication : un tableau à double entrée (contenant les valeurs possibles de X et Y) peut aider dans cette question.

2. A l'aide de la première question et la formule des probabilités totales, montrer :

$$P(X+Y=Z)=\frac{n-1}{2n^2}.$$

3. On définit la variable aléatoire T par $T=n+1-Z$.
   (a) Montrer que T suit la loi uniforme sur $\{1,...,n\}$.
   (b) Justifier que les variables aléatoires T, X et Y sont mutuellement indépendantes.
   (c) En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer :

$$P(X+Y+Z=n+1).$$

Exercice 3

Soient U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p\in]0,1[$.
On note : $q=1-p$, $R=|U-V|$ et $S=\min(U,V)$.

1. Soient $i\in\mathbb{N}$ et $j\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'on a :

$$P(R=i,S=j)=\begin{cases} p^2q^{2j-2} & \text{si } i=0 \\ 2p^2q^{i+2j-2} & \text{si } i>0. \end{cases}$$

2. En déduire la loi de R et celle de S.
3. Montrer que les variables aléatoires R et S sont indépendantes.