UNIVERSITÉ DE SFAX — Année universitaire : 2019/2020

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen de Mathématiques N°1

Section : BG 2

Durée : 2h — **Date : Janvier 2020** — **Nbre de pages : 2**

Exercice 1 :

On pose $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a \\ b & b-a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base et déduire la dimension de E.

Exercice 2 :

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On désigne par f l'application définie par :

$$\forall P \in E,\ f(P) = -2XP(X) + X^2P'(X).$$

On note $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

1. Rappeler la dimension de E.
2. (a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
   (b) Déterminer M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_c$ de E.
   (c) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ l'image et $rg(f)$ le rang de f.
3. (a) Déterminer P_M le polynôme caractéristique de M.
   (b) En déduire les valeurs propres de M.
4. (a) Déterminer une base (P_1, P_2) de $\ker(f)$ et une base (P_3) de $\ker(f + id)$.
   (b) En déduire que f est diagonalisable.
5. On pose $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ forme une base de E.
   (b) Déterminer D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'expression de f.
2. On note P_A le polynôme caractéristique de A.
   (a) Montrer que $P_A(X) = (5 - X)(X + 1)(X - 2)$.
   (b) Trouver les valeurs propres de A.
   (c) En déduire que A est diagonalisable.
   (d) Calculer $\det(A)$. Que dire alors de f?
3. On pose $u_1 = (-2, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (0, 0, 1)$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres de f.
   (b) Donner D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. On pose P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ vers $\mathcal{B}'$.
   (a) Calculer P et P^{-1}.
   (b) Donner une relation entre A, P, D et P^{-1}.
   (c) Calculer D^n et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles vérifiant $x_0 = z_0 = 1$, $y_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -4\, x_n - 6\, y_n \\ y_{n+1} = 3\, x_n + 5\, y_n \\ z_{n+1} = 3\, x_n + 6\, y_n + 5\, z_n. \end{cases}$$

   On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A\, X_n$.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n\, X_0$.
   (c) Trouver alors les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.