

Devoir de contrôle de Mathématiques

Exercice 1 :

Montrer la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{3n(n-1) - 5n + 7 + \frac{1}{n!}}{9^n}.$$

$$(ii) \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2 :

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.
2. Déterminer le maximum de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$ converge.

Exercice 3 :

Une souris entre dans un appartement composé de deux pièces A et B . Elle est dans la pièce A à $t = 0$, et évolue ainsi :

- ♦ si elle est en A à l'instant n , elle reste en A avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en B avec probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n + 1$.
- ♦ si elle est en B à l'instant n , elle retourne en A avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste en B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\frac{1}{4}$.
- ♦ si elle est dehors à l'instant n , elle y reste.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

A_n : " La souris est en A à l'instant n ."

B_n : " La souris est en B à l'instant n ."

C_n : " La souris sort de l'appartement à l'instant n ."

1. Calculer $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2$ et c_2 .
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$. Montrer que la suite (u_n) est constante.
4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
5. En déduire les valeurs de (a_n) et (b_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Que vaut c_n ?

Exercice 4 :

On utilise deux pièces de monnaies : l'une pipée (truquée), de sorte que lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{4}$; l'autre est équilibrée.

1. On prend une pièce au hasard.
 - (a) En appliquant la formule de probabilités totales, déterminer la probabilité d'obtenir pile.
 - (b) On a obtenu pile : quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée ?
 - (c) On choisit une pièce de monnaie au hasard, qu'on lance trois fois. Quelle est la probabilité d'obtenir trois faces ?
2. Trois fois on choisit l'une des pièces au hasard qu'on lance. Déterminer la probabilité d'avoir trois faces ?
3. On lance les deux pièces ensembles. Déterminer la probabilité d'obtenir le même résultat (deux piles ou deux faces) pour les deux pièces.