UNIVERSITÉ DE SFAX **Année universitaire : 2021/2022**

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen de Mathématiques
PB 2

Date : 13/12/2021	Durée : 2 heures	Nombre de pages : 2

Problème

On note $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit

$$\begin{array}{rcl} f ; \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X). \end{array}$$

Partie I

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Partie II

1. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$.
2. Vérifier que la matrice de f dans la base B est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. (a) Montrer que $A^3 - 3A^2 - A + 3I_3 = 0$.

   (b) Déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Partie III

On pose $P_1 = 1 - X^2$, $P_2 = 1 - 2X + X^2$ et $P_3 = 1 + 2X + X^2$.

1. Montrer que $B' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée par des vecteurs propres de l'endomorphisme f.
2. Déterminer la matrice de passage Q de B à B' puis Q^{-1}.

3. Déterminer une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.
4. Déterminer A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer $f^n(X^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie IV

Soient x, y et z trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système suivant

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + 2z(t), \\ z'(t) = y(t) + z(t), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = a, \\ y(0) = b, \\ z(0) = c, \end{cases}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $X'(t)$ en fonction de A et $X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. On pose $Y(t) = Q^{-1}X(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   Expliciter $Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ en fonction de t pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie V

Soient $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

On pose : $C = Q\Delta Q^{-1}$, $N = A + C$ et on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}_c) = N$.

1. Montrer que N est diagonalisable.
2. Déterminer le spectre de N.
3. Déterminer une base $B'' = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres de N.
4. Exprimer $g(e_1)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3.