UNIVERSITÉ DE SFAX

Année universitaire : 2021/2022

* * * * *

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen de Mathématiques
BG 2

Date : 09/05/2022	Durée : 3 heures	Nombre de pages : 3

Notations et rappels:
les notations suivantes sont considérés au cours de ce texte:

- $\mathbb{R}$: le corps des réels.
- E: l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- E_0: l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- P_2: l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2.
- E_1: l'espace vectoriel des fonctions continuement dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé donné.
- Les variables aléatoires notées v.a. sont à valeurs réelles et définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.
- $P(X = i)$ désigne la probabilité que la v.a. X prenne la valeur i.
- $p_X(\cdot)$: la loi de probabilité d'une v.a. discrète X.
- $f_X(\cdot)$: la densité de probabilité d'une v.a. continue X.
- $F_X(\cdot)$: la fonction de répartition d'une v.a. X.
- $E(X)$: espérance mathématique de la v.a. X.
- $Var(X)$: variance de la v.a. X.
- $\rho(X, Y)$ est le coefficient de corrélation entre X et Y.

On considère l'application:

$$T: \begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & T_f \end{array}$$

où T_f est définie par:

$$T_f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x t f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I: Propriétés élémentaires de T_f

Dans cette partie, f désigne un élément de E_0.

1. Montrer que l'application $T : f \mapsto T_f$ est linéaire par rapport à f.

2. Montrer que si f est paire alors T_f est paire.

3. Montrer que si f est impaire alors T_f est impaire.

4. Montrer que si f est positive alors T_f est positive.

5. Déterminer T_f dans le cas où f est constante puis dans le cas où $f \in P_2$.

6. On suppose que a est un réel strictement positif et que sur l'intervalle $[-a, a]$, la fonction f est bornée par un réel M. Montrer qu'il en est de même pour T_f.

7. En déduire que T_f est continue en 0, que T_f appartient à E_0 puis que T définit un endomorphisme de E_0.
   (Indication: on remarquera que $f(0) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(0)dt$).

8. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $(T_f)'$ existe et vaut

$$(T_f)'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - 2T_f(x))$$

   où $(T_f)'$ désigne la dérivé de T_f par rapport à x.

Partie II: T_f et Probabilité discrète

Dans cette partie, on suppose que f appartient à P_2. On munit P_2 de la base canonique $B = (1, X, X^2)$.

1. Montrer que T_f appartient à P_2.

2. Déterminer la matrice A de T_f par rapport à la base B.

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de A.

4. Calculer A^n pour n entier ≥ 2.

5. Calculer, en fonction de $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, la suite de vecteurs colonnes $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par:

$$U_{n+1} = AU_n \quad n \geq 0,$$

   où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

6. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont les lois de probabilité sont données par $p_X(n) = P(X = n) = x_n$, $p_Y(n) = P(Y = n) = y_n$ et $p_Z(n) = P(Z = n) = z_n$. Déterminer x_0, y_0 et z_0 pour que x_n, y_n et z_n définissent bien des lois de probabilité.

Partie III: Calcul de lois

Dans cette partie, on considère la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 3t^2 - 2t^3 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que F est bien une fonction de répartition d'une v.a. continue X et déterminer sa densité f_X.
2. Soit la fonction G définie par $G(x) = 2T_F(x)$ pour tout réel x. Montrer que G est une fonction de répartition d'une v.a. continue Y dont on déterminera sa densité f_Y.
3. Soit la variable aléatoire Z définie par $Z = G(Y)$. Montrer alors que Z est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
4. Calculer $E(Z)$ et $Var(Z)$.
5. Montrer que, pour tout $a > 0$, on a $P(Z \geq a) \leq \dfrac{1}{2a}$.
6. Déduire que, pour tout $a > 0$, on a $P(|Z - \frac{1}{2}| \geq a) \leq \dfrac{1}{12a^2}$.
7. On pose $U = \min(Z, 1 - Z)$ et $V = \max(Z, 1 - Z)$. Déterminer f_U la densité de U et f_V celle de V.
8. Calculer $E(U + V)$ et $Var(U + V)$.

Partie IV: Tendance normale d'une v.a. uniforme

On considère une suite de variables aléatoires X_n, $1 \leq n \leq 10$, indépendantes et de même loi que la v.a. uniforme Z. On note par Φ la fonction de répartition d'une v.a. normale centré réduite $N(0, 1)$. On pose $H = \sum_{1}^{10} X_i$.

1. Vérifier qu'on a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ puis déduire $\Phi(0)$.
2. Calculer $E(H)$ et $Var(H)$.
3. Montrer que $P(H \geq 6) \leq \dfrac{5}{6}$.
4. En utiliser le théorème de la limite centrale, montrer que

$$P(H > 6) = 1 - \Phi(\sqrt{\frac{6}{5}}).$$

5. On donne $\Phi(\sqrt{\frac{6}{5}}) = 0.84$. Donner le pourcentage pour que la somme $H = \sum_{1}^{10} X_i$ dépasse 6.
6. On subit à H une transformation affine $K = aH + b$ de telle manière qu'on aura $P(K \geq 6) = 0.5$ et $P(K \leq 8) = 0.84$. Déterminer les valeurs possibles de a et b.
7. Calculer le coefficient de corrélation $\rho(K, H)$.