INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEURS DE SFAX

Année Universitaire 2021-2022

Département des Etudes Préparatoires aux Concours de Technologie

Épreuve de Physique
($2^{ème}$ Année de Préparation Biologie - Géologie)

Jeudi 12 Mai 2022 de 8h30 à 11h30

DEVIOR DE SYNTHESE DU $2^{ème}$ SEMESTRE

Partie 1 : écoulements sanguins et échographie

Le système cardio-vasculaire a pour fonction d'apporter aux tissus et aux organes du corps l'oxygène et les nutriments nécessaires à leur fonctionnement, ainsi que de les débarrasser des déchets générés par leur métabolisme.

A. Mécanique des fluides et écoulements sanguins

A.1 Ecoulement de Poiseuille cylindrique

L'écoulement du sang dans une artère peut être décrit en première approximation comme l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible et homogène dans un tronçon cylindrique horizontal d'axe (Ox), de rayon R et de longueur L, illustré sur la figure 1. On notera η la viscosité dynamique du fluide et ρ sa masse volumique. On suppose que l'écoulement est laminaire en régime permanent et que les phénomènes de pesanteur sont négligeables du fait de l'échelle du problème. Pour les applications numériques, la masse volumique du sang ρ sera prise égaleà $1,06.10^3\ kg.m^{-3}$ et la viscosité dynamique η à $6\ mPa.s$.

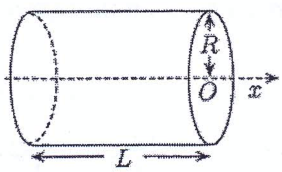

Figure 1. Artère

A1.1 Donner la définition d'une ligne de courant et d'un écoulement incompressible. Expliquer ce qu'est un écoulement laminaire et ce qu'est un écoulement turbulent. Donner l'expression du nombre de Reynolds Re et l'ordre de grandeur de Re qui permet de différencier les régimes d'écoulement laminaire et turbulent dans un tronçon cylindrique.

A.1.2 Définir le débit volumique Q_v et le débit massique Q_m. En régime permanent, justifier le caractère conservatif d'un flux de masse. Ecrire la condition pour que le débit volumique et le débit massique d'un fluide soient proportionnels. Donner la relation qui relie ces deux grandeurs dans cette situation.

A.1.3 Le profil de vitesse dans ce tronçon cylindrique de rayon R, de longueur L et d'axe suivant $\vec{e}_x$ est un écoulement de Poiseuille et a ainsi pour expression :

$$\vec{v} = \frac{1}{4\,\eta}\frac{\Delta P}{L}(R^2 - r^2)\,\vec{e}_x$$

Où $\Delta P = P(x=0) - P(x=L) > 0$ est la différence de pression entre l'entrée et la sortie du tronçon cylindrique. On note r la coordonnée radiale, c'est-à-dire la distance à l'axe (Ox). Expliquer pourquoi on peut chercher un profil de vitesse sous la forme $\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_x$ Justifier que ΔP est positif.

A.1.4 Ecrire la condition aux limites que doit respecter le champ des vitesses et représenter graphiquement ce champ des vitesses.

A.1.5 Exprimer le débit volumique Q_v en fonction de η, R, ΔP et L. Etablir l'expression de la vitesse moyenne de l'écoulement v_m.

A.1.6 Définir la résistance hydraulique du tube et l'exprimer en fonction de la différence de pression ΔP et du débit volumique Q_v. A l'aide de la question précédente, donner son expression en fonction de la longueur du tube L, de son rayon R et de la viscosité du fluide η.

A.1.7 ***Application à la circulation sanguine*** **:** On considère un tronçon cylindrique modélisant une artère de rayon R, de longueur L, auquel est appliquée une différence de pression ΔP. Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement v_m, puis le nombre de Reynolds de l'écoulement. Précisez la nature de l'écoulement.

Données : $R = 6\,mm$; $L = 8\,cm$; $\Delta P = 40\,Pa$.

A.2 Modélisation d'une sténose

Une sténose correspond à une réduction brutale et localisée du diamètre d'un vaisseau sanguin. Schématiquement, cette situation peut être représentée comme étant la superposition de trois tronçons cylindriques, de même axe, et de rayons différents, R, R_s et R comme illustré sur la figure 2. La sténose correspond au tronçon de plus faible rayon et est située entre les abscisses $x = L$ et $x = L + L_s$.

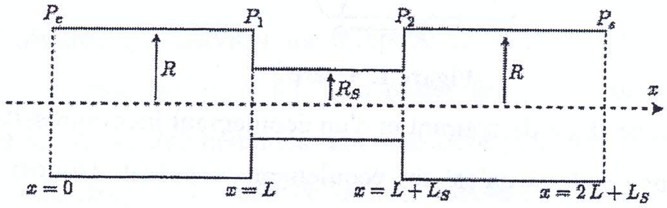

Figure 2. Schéma d'une sténose

A.2.1 Représenter schématiquement les lignes de courant entre $x = 0$ et $x = 2L + L_s$.

A.2.2 On note Q_1, Q_2, et Q_3 les débits volumiques à travers les sections situées respectivement en

$x = 0$, $x = L + \frac{L_s}{2}$ et $x = 2L + L_s$. Donner en justifiant la(les) relation(s) qui lie(nt) ces différents débits et le débit volumique total Q_v dans le vaisseau sanguin. En déduire la conséquence de ce résultat sur la vitesse moyenne du fluide au niveau de la zone sténose entre $x = 0$ et $x = L + L_s$.

A.2.3 Donner la relation liant la résistance hydraulique totale $R_{h,tot}$ en fonction du débit total dans le vaisseau sanguin Q_v et la différence de pression entre l'entrée et la sortie P_e et P_s (avec $P_e > P_s$). Exprimer la résistance hydraulique totale en fonction de la résistance hydraulique de chaque sous-partie, $R_{h,1}$, $R_{h,2}$ et $R_{h,3}$.

A.2.4 Déterminer la différence de pression de part et d'autre de la sténose $P_2 - P_1$ en fonction des différentes résistances hydrauliques et de la différence de pression totale $P_s - P_e$.

A.2.5 ***Application numérique :*** On considère une artère de rayon R, de longueur totale $2L + L_s$, à laquelle est appliquée une différence de pression ΔP. Une sténose se développe dans cette artère et conduit à un rétrécissement local de l'artère sur une distance L_s où le rayon de l'artère devient R_s. Déterminer la vitesse moyenne dans la zone sténose. En déduire le nombre de Reynolds dans chaque partie de l'artère. Déduire une information sur la nature de l'écoulement. Préciser quelle méthode peut être utilisée pour diagnostiquer une sténose.

Données : $R = 6\,mm$; $2L + L_s = 9\,cm$; $\Delta P = 40\,Pa$; $L_s = 1\,cm$; $R_s = 2\,mm$

B. Vélocimétrie par effet Doppler

Afin d'évaluer les risques de sténoses vasculaires chez un patient, il faut pouvoir estimer localement la vitesse de l'écoulement du sang. Pour cela, on utilise une technique d'échographie Doppler.

Le principe de cette mesure est le suivant : une sonde émet une onde ultrasonore de célérité c et de fréquence f_0. Une hématie (globule rouge) se déplaçant à la vitesse v renvoie cette onde à une fréquence différente.

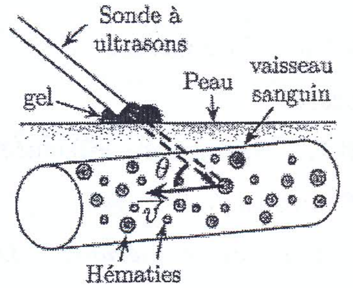

Figure 3. Echographie

La sonde à ultrasons jouant le rôle d'émetteur et de récepteur est positionnée sur la peau et émet des ultrasons. L'onde incidente fait un angle θ avec le vaisseau à explorer et la présence des hématies dans le sang permet aux ondes de se réfléchir à une fréquence légèrement différente. On prend : $c = 1,5\,km.s^{-1}$; $f_0 = 4,0\,MHz$.

B.1 Mesures de fréquence et vitesse des hématies

La mesure de la différence de fréquence donne accès à la vitesse v des hématies et donc du sang. Pendant la période T_0 de l'onde ultrasonore, on suppose que la distance parcourue par le globule rouge est très petite devant sa distance à la sonde et que l'angle θ entre le faisceau d'ultrasons et le vecteur vitesse $\vec{v}$ est constante. On définit le décalage en fréquence par

$\Delta f = f_2 - f_0$ où f_2 est la fréquence de l'onde reçue par la sonde après avoir être réfléchie par une hématie.

Pour déterminer l'expression du décalage en fréquence Δf, on se place dans le cas $\theta = 0$ dans les questions qui suivent.

B.1.1 Faire un schéma de la situation en représentant un globule rouge se déplaçant avec un vecteur vitesse $\vec{v}$ parallèle au signal envoyé par la sonde.

B1.2 Donner le sens du déplacement de l'hématie si le signal reçu par l'émetteur à un décalage en fréquence Δf positif.

B.1.3 Etablir, dans le référentiel de l'hématie, l'intervalle de temps Δt_1 qui sépare la réception de deux maximas successifs du signal. Donner alors la fréquence apparente f_1 de l'onde perçue par l'hématie.

B.1.4 L'onde ultrasonore est réfléchie par l'hématie avec une fréquence f_2 dans son référentiel en mouvement rectiligne constant à la vitesse v. Exprimer l'intervalle de temps Δt_2 qui sépare la réception par la sonde de deux maximas successifs de l'onde. En déduire la fréquence f_2 de l'onde réfléchie détectée par la sonde.

B.1.5 Dans la pratique, les hématies ont une vitesse v très petite devant la célérité des ultrasons.Simplifier en justifiant la relation établie à la question B.1.4.

B.1.6 En réalité, la sonde est orientée d'un angle θ par rapport au vaisseau sanguin et la fréquencereçue par la sonde à pour expression :

$$f_2 = f_o\left(1 + \frac{2v}{c}cos\theta\right)$$

Vérifier la cohérence de la formule obtenue à la question B.1.5 avec l'expression donnée ci-dessus.

B.1.7 Une mesure effectuée au niveau de l'aorte par la sonde conduit à une différence de fréquence $f_2 - f_0$ égale à $2,0\ kHz$ pour un angle θ de 20°.

Application numérique : Donner la vitesse des globules rouges dans ce vaisseau sanguin. Expliquer qualitativement pourquoi un médecin ne peut obtenir une mesure aussi précise de la vitesse des hématies en pratique.

B.2 Traitement du signal

En pratique, le signal d'entrée qui parvient au récepteur est composé de différentes fréquences : la fréquence $f_0 + f_2$ et la fréquence $|f_0 - f_2|$. On désire filtrer le signal pour ne garder que la composante qui décrit la vitesse des hématies. On considère pour cela le filtre, représenté sur la figure 4, branché sur une charge d'impédance infinie, c'est-à-dire avec $i_s = 0$. On se place en régime sinusoïdal forcé, de pulsation ω. A toute fonction sinusoïdale $f(t) = f_0\ \cos(\omega t + \Phi)$, on associe sa représentation complexe $\bar{f} = f_0\ exp(j(\omega t + \Phi))$.