INSTITUT PRÉPARATOIRE
AUX ÉTUDES D'INGÉNIEURS
DE SFAX
Département de la Préparation
Mathématiques Physique

BG 2
Février 2022
Durée : 1h

Devoir de Contrôle n° 2
Mathématiques

Exercice :

La mucoviscidose est une maladie héréditaire récessive qui se caractérise par la présence d'un allèle m au lieu d'un allèle M. Les personnes atteintes sont de génotype mm. Les personnes hétérozygotes sont de génotype Mm. Des études ont montré que 1 personne sur 1600 est atteinte de la mucoviscidose et 1 personne sur 20 est hétérozygote.

1. On choisit au hasard (avec remise) un échantillon de 4000 individus. On note X le nombre aléatoire de personnes atteintes de mucoviscidose.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres. Préciser $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
   (b) On peut approcher la loi de X par une loi de Poisson. Pourquoi ? Laquelle ?
   (c) Calculer la probabilité d'avoir au minimum 6 personnes atteintes de mucoviscidose.
2. On choisit les unes après les autres des personnes jusqu'à découvrir la première fois un hétérozygote. On note Y le nombre aléatoire de tirages nécessaires.
   (a) Quelle est la loi de Y ? Préciser son espérance, sa variance, son écart type.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(Y \geq 40)$.
   (c) Quel est le nombre minimal n de tirages à prévoir pour avoir $\mathbb{P}(Y \leq n) > 0.99$?

Probléme : On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Le but de ce problème est de calculer M^n, pour tout entier naturel n, de deux manières différentes.

Partie I :

1. Justifier que M est diagonalisable.
2. Calculer les valeurs propres de M.
3. On considère les vecteurs $v_1 = (1,-2,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$ et $v_3 = (1,1,1)$ et on pose $B' = (v_1, v_2, v_3)$. Montrer que B' est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres de M.
4. En déduire une matrice P telle que ${}^tP \times M \times P$ soit diagonale puis trouver M^n.

Partie II :

On pose $F = Vect(v_1)$ et $G = Vect(v_2, v_3)$.

1. Justifier que F et G sont orthogonaux.

- Soit p la projection orthogonale sur F et q la projection orthogonale sur G .

2. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$ et $p + q = Id$
3. On appelle respectivement A et$B$ les matrices de p et q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que:

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.
   (a) Montrer que $f = 5p - q$.
   (b) En déduire f^n en fonction de n, p et q.
   (c) En déduire alors M^n.